

ДЕВІАНТНІ АЛГЕБРИ ІСТИННІСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ДЕВІАНТНІ КЛАСИ ЗАГАЛЬНИХ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРЕДИКАТІВ

Вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки загальних недетермінованих (*GND*) предикатів. *GND*-предикати моделюються як 7-значні *TD7*-предикати. Досліджено девіантні алгебри істиннісних значень (*TV*-алгебри) *TD7*-предикатів та девіантні класи *GND*-предикатів. Девіантна *TV*-алгебра не індукує алгебру *GND*-предикатів. Для підмножин істиннісних значень досліджено можливість модифікації \vee_* із умовою коректності *TFC*, що визначає відповідні класи *GND*-предикатів. Описано природні модифікації \vee_* без *TFC*, що дає низку девіантних *TV*-алгебр.

Ключові слова: логіка, алгебра, недетермінований предикат, 7-значний предикат.

Вступ

Основа сучасних інформаційних та програмних систем – це апарат математичної логіки. Різноманітні логічні формалізми успішно використовуються для розв'язання широкого кола задач інформатики й програмування [1 – 4]. Водночас розвиток та розширення сфери застосування інформаційних технологій зумовлює необхідність розробки нових логік, які більше адаптовані до потреб програмування й моделювання. Найперше, ці логіки мають враховувати широке використання в програмних системах та системах штучного інтелекту часткових недетермінованих відображень над неповними даними. До таких програмно-орієнтованих логічних формалізмів належать композиційно-номінативні логіки (КНЛ) квазіарних предикатів [5 – 7].

Важливим класом КНЛ є логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів, або *GND*-предикатів. Ці логіки запропоновано в [8], вони вивчалися в [8, 9]. Зазначені логіки відображають такі властивості програм, як частковість, недетермінізм, нефіксовану арність. В роботах [8, 9] виділено різновиди *GND*-предикатів, описано композиційні алгебри та мови логіки *GND*-предикатів. *GND*-предикати можна моделювати як 7-значні тотальні детерміновані (*TD7*) предикати. Описано усі 20 підалгебр алгебри істиннісних значень (*TV*-алгебри) *TD7*-предикатів

$ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$. Досліджено індукування цими підалгебрами відповідних алгебр *TD7*-предикатів та *GND*-предикатів.

Існує надзвичайно багато 7-значних логік, тому багато підмножин TV_7 незамкнені щодо \neg_* чи \vee_* , вони не утворюють підалгебр ATV_7 . Такі підмножини та відповідні їм класи *GND*-предикатів названо *девіантними*. Дослідженню девіантних *TV*-алгебр та девіантних класів *GND*-предикатів присвячена дана робота.

Для того, щоб девіантна $TV \subseteq TV_7$ утворила алгебру, необхідно модифікувати \neg_* чи \vee_* . Модифікація \neg_* веде до специфічних неklasичних логік, вона в роботі не розглядається. Найважливішими є модифікації \vee_* , для яких виконується умова *TFC* коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні *TFC* *TV*-алгебра *девіантна*, вона не індукує алгебру *GND*-предикатів. Для всіх підмножин TV_7 в роботі досліджено можливість модифікації \vee_* із умовою *TFC*, що визначає відповідні класи *GND*-предикатів. Описано природні модифікації \vee_* без *TFC*, що дає низку девіантних *TV*-алгебр. Для деяких девіантних множин не існує модифікацій \vee_* із умовою *TFC*, для них вказано відносно природні девіантні *TV*-алгебри.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [6, 8, 9].

1. GND та TD7-предикати

V-A-квазіарним предикатом називають часткову неоднозначну, взагалі кажучи, функцію вигляду $P : V A \rightarrow \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, $V A$ – множина всіх *V-A*-іменних множин.

Часткові неоднозначні предикати на множині $V A$ можна трактувати як відповідності (відношення) між $V A$ та $\{T, F\}$. Такі предикати названо [5, 6] квазіарними предикатами реляційного типу, або *R-предикатами*. Для *R-предикатів* неможлива ситуація, коли при застосуванні предиката *P* до певного даного *d* виробляється результат (можливо, не один), водночас застосування *P* до цього *d* може дати невизначеність (результат не виробляється).

В загальному випадку поняття неоднозначного (недетермінованого) квазіарного предиката адекватно уточнюється [8, 9] як поняття *GND-предиката* – загального недетермінованого предиката. Такий предикат $P : V A \rightarrow \{T, F\}$ при застосуванні до даного $d \in V A$ може приймати значення *T*, приймати значення *F*, а може і не приймати жодного значення (бути невизначеним). Множиною значень $P[d]$, які *GND-предикат P* може прийняти на даному $d \in V A$, може бути одна з множин $\{\emptyset\}, \{T\}, \{F\}, \{T, F\}, \{T, \emptyset\}, \{F, \emptyset\}, \{T, F, \emptyset\}$.

Скорочено позначимо ці множини як $\uparrow, T, F, TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow$.

Кожний *GND-предикат P* можна однозначно описати за допомогою 3-х множин: області істинності $T(P)$, області хибності $F(P)$ та області невизначеності $\perp(P)$. Ці множини задаються наступним чином:

$$\begin{aligned} - T(P) &= \{d \mid T \in P[d]\}; \\ - F(P) &= \{d \mid F \in P[d]\}; \\ - \perp(P) &= \{d \mid \emptyset \in P[d]\} = \\ &= \{d \mid P \text{ може бути невизначеним на } d\}. \end{aligned}$$

Такі множини пов'язує умова:

$$F(P) \cup T(P) \cup \perp(P) = V A .$$

Кожний *R-предикат P* : $V A \rightarrow \{T, F\}$ на даному $d \in V A$ може приймати лише значення *T*, лише значення *F*, обидва значення *T* та *F*, та може бути невизначеним. Тому

для *R-предиката P* множина $P[d]$ може бути однією з $\{\emptyset\}, \{T\}, \{F\}, \{T, F\}$. Кожний *R-предикат P* можна однозначно задати за допомогою 2-х множин: $T(P)$ та $F(P)$. Тоді $\perp(P)$ є доповненням до $T(P) \cup F(P)$.

Накладаючи ті чи інші обмеження на області істинності, хибності та невизначеності, виділено [8, 9] низку класів *GND-предикатів*. Зокрема, маємо 7 константних *GND-предикатів*: $\perp, T, F, Y, T_{\uparrow}, F_{\uparrow}, Y_{\uparrow}$.

GND-предикати можна моделювати [8] як 7-значні тотальні детерміновані предикати, або *TD7-предикати*. Множиною істиннісних значень *TD7-предикатів* є $TV_7 = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Класи *V-A-квазіарних GND-предикатів* та *TD7-предикатів* позначають відповідно PrG_{V-A} та $PrTD7_{V-A}$.

Базові пропозиційні композиції *TD7-предикатів* – це логічні зв'язки заперечення \neg_* та диз'юнкція \vee_* . Задаємо їх традиційним чином – за допомогою таблиць істинності (табл. 1, 2).

Таблиця 1. Композиція \neg_*

P	T	F	T↑	F↑	↑	TF	TF↑
\neg_*P	F	T	F↑	T↑	↑	TF	TF↑

Таблиця 2. Композиція \vee_*

\vee_*	T	F	T↑	F↑	↑	TF	TF↑
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T↑	F↑	↑	TF	TF↑
T↑	T	T↑	T↑	T↑	T↑	T↑	T↑
F↑	T	F↑	T↑	F↑	↑	TF↑	TF↑
↑	T	↑	T↑	↑	↑	T↑	T↑
TF	T	TF	T↑	TF↑	T↑	TF	TF↑
TF↑	T	TF↑	T↑	TF↑	T↑	TF↑	TF↑

Композиція кон'юнкції $\&_*$ – похідна:

$$P \&_* Q = \neg_*(\neg_*P \vee_* \neg_*Q).$$

Тому $\&_*$ можна подати так (табл. 3).

Таблиця 3. Композиція $\&_*$

$\&_*$	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F	F	F
$T\uparrow$	$T\uparrow$	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
$F\uparrow$	$F\uparrow$	F	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	$F\uparrow$	\uparrow	$F\uparrow$	$F\uparrow$
TF	TF	F	$TF\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$TF\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Множина істиннісних значень TV_7 замкнена щодо \neg_* , \vee_* та $\&_*$.

2. Алгебра істиннісних значень TD7-предикатів та її підалгебри

Алгебру $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$ назвемо алгеброю істиннісних значень, або TV -алгеброю TD7-предикатів. Розглядають також TV -алгебру TD7-предикатів розширеної сигнатури $ATV_{7E} = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$.

Для логічних зв'язок TD7-предикатів маємо [8, 9] традиційні властивості:

- комутативність \vee_* та $\&_*$;
- асоціативність \vee_* та $\&_*$;
- ідемпотентність \vee_* та $\&_*$;
- зняття подвійного заперечення;
- закон контрапозиції;
- закони де Моргана.

Проте для TD7-предикатів неправильні закони дистрибутивності \vee_* щодо $\&_*$ та $\&_*$ щодо \vee_* , також неправильні закони поглинання.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} (\uparrow \vee_* T) \&_* TF &= T \&_* TF = TF, \text{ водночас} \\ (\uparrow \&_* TF) \vee_* (T \&_* TF) &= F\uparrow \vee_* TF = TF\uparrow; \\ (\uparrow \&_* F) \vee_* TF &= F \vee_* TF = TF, \text{ водночас} \\ (\uparrow \vee_* TF) \&_* (F \vee_* TF) &= TF\uparrow \&_* TF = TF\uparrow. \end{aligned}$$

Приклад 2.

$$\begin{aligned} TF \vee_* (TF \&_* \uparrow) &= TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow \neq TF; \\ TF \&_* (TF \vee_* \uparrow) &= TF \&_* T\uparrow = TF\uparrow \neq TF. \end{aligned}$$

Це цілком зрозуміло в світлі того, що GND -предикати моделюються TD7-предикатами, а в логіці GND -предикатів не виконуються [8] закони дистрибутивності та закони поглинання.

Для множини TV_7 задаємо [8] природне впорядкування щодо \vee_* та щодо $\&_*$.

Впорядкування TV_7 щодо \vee_* :

$$\alpha \rightarrow_{\vee} \beta, \text{ якщо } \alpha \vee_* \beta = \beta.$$

Впорядкування TV_7 щодо $\&_*$:

$$\alpha \rightarrow_{\&} \beta, \text{ якщо } \alpha \&_* \beta = \alpha.$$

Твердження 1. Впорядкування \rightarrow_{\vee} та $\rightarrow_{\&}$ транзитивні:

$$\alpha \rightarrow_{\vee} \beta \text{ та } \beta \rightarrow_{\vee} \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow_{\vee} \gamma.$$

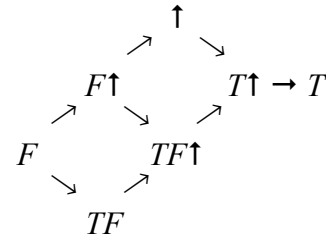
$$\alpha \rightarrow_{\&} \beta \text{ та } \beta \rightarrow_{\&} \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow_{\&} \gamma.$$

Таку транзитивність гарантує асоціативність \vee_* та $\&_*$:

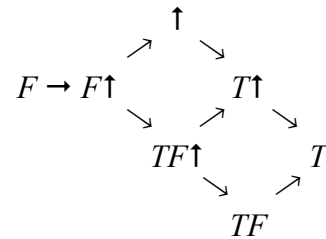
$$\begin{aligned} \alpha \vee_* \gamma &= \alpha \vee_* (\beta \vee_* \gamma) = \\ &= (\alpha \vee_* \beta) \vee_* \gamma = \beta \vee_* \gamma = \gamma; \\ \alpha \&_* \gamma &= \alpha \&_* (\beta \&_* \gamma) = (\alpha \&_* \beta) \&_* \gamma = \\ &= \beta \&_* \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

Наведемо діаграми Хасе для множини TV_7 щодо \vee_* та $\&_*$ [8].

Діаграма Хасе для TV_7 щодо \vee_* :



Діаграма Хасе для TV_7 щодо $\&_*$:



Це означає, що TV_7 не утворює решітки істиннісних значень. Причиною цього є те, що \vee_* та $\&_*$ невідмінні на множині $\{TF, TF\uparrow\}$.

Для опису підалгебр ATV_7 виділено [8] всі 20 підмножин множини TV_7 , які замкнені щодо \neg^* , \vee^* та $\&^*$. Ці підмножини TV_{m_n} задають підалгебри ATV_{m_n} алгебри ATV_7 . Далі ATV_{m_n} індукують підалгебри алгебри ATD_{V-A} , які в свою чергу індукують підалгебри алгебри GND -предикатів відповідного рівня: пропозиційної алгебри APG_{V-A} , реномінативної ARG_{V-A} , першого рядкової $AQG_{V-A} = (PrG_{V-A}, \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x\})$. Зауважимо, що існує 30 підмножин TV_7 , які замкнені лише щодо \neg^* .

Зв'язок ATV_7 та предикатних алгебр встановлюється так. Наявність істиннісного значення τ в TV_7 означає, що існують $P \in PrG_{V-A}$ та $d \in V_A$ такі: $\tau \in P[d]$.

Наведемо усі підмножини множини TV_7 , замкнені щодо \neg^* , \vee^* та $\&^*$, вказавши індуковані ними відповідні підалгебри ATV_{m_n} алгебр ATV_7 та підалгебри AQG_{V-A} .

$$TV_{6_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує $AQAU_{V-A}$;

$$TV_{6_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$$

індукує $AQTG_{V-A}$;

$$TV_{5_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow\}$$

індукує $AQSG_{V-A}$;

$$TV_{5_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує $AQTAU_{V-A}$;

$$TV_{5_3} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$$

індукує $AQImG_{V-A}$;

$$TV_{4_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$$

індукує $AQTS_{V-A}$;

$$TV_{4_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$$

індукує $AQUA_{V-A}$;

$$TV_{4_3} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$$

індукує $AQTIImG_{V-A}$;

$$TV_{4_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує $AQTIG_{V-A}$;

$$TV_{3_1} = \{T, F, \uparrow\}$$

індукує AQP_{V-A} ;

$$TV_{3_2} = \{T, F, TF\}$$

індукує AQT_{V-A} ;

$$TV_{3_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$$

індукує AQU_{V-A} ;

$$TV_{3_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує $AQTTIG_{V-A}$;

$$TV_{3_5} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow\}$$

індукує $AQSTIG_{V-A}$;

$$TV_{2_1} = \{T, F\}$$

індукує $AQTS_{V-A}$;

$$TV_{2_2} = \{T\uparrow, F\uparrow\}$$

індукує $AQTSTIG_{V-A}$;

$$TV_{2_3} = \{TF, TF\uparrow\}$$

індукує $AQTAmG_{V-A}$;

$$TV_{1_1} = \{\uparrow\}$$

індукує $AQ\perp_{V-A}$;

$$TV_{1_2} = \{TF\}$$

індукує AQY_{V-A} ;

$$TV_{1_3} = \{TF\uparrow\}$$

індукує $AQY\perp_{V-A}$.

Необхідною умовою коректності (“природності”) логічних зв'язок предикатних алгебр можна вважати умову TFC (TF -сегмент). Для \vee та \neg -вона задається так (тут $\alpha, \beta \in PrG_{V-A}$):

$$T(\alpha \vee \beta) = T(\alpha) \cup T(\beta), F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \cap F(\beta);$$

$$T(\neg \alpha) = F(\alpha), F(\neg \alpha) = T(\alpha).$$

Виконання умови TFC має бути, зокрема, для константних предикатів $T, F, \perp, T\uparrow, F\uparrow, Y, Y\uparrow$, індукованих істиннісними значеннями $\uparrow, T, F, TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow$.

Умова TFC виконується для алгебр $APG_{V-A}, ARG_{V-A}, AQG_{V-A}$, тому вона має виконуватися для всіх її підалгебр, індукованих відповідними підалгебрами ATV_7 .

3. Девіантні підмножини TV_7 та індуковані ними логіки GND -предикатів

Задаючи ті чи інші умови для областей істинності, хибності та невизначеності, виділено низку різноманітних класів

GND-предикатів. Водночас не всі так описані класи замкнені щодо композиції диз'юнкції *GND*-предикатів. Це, зокрема, клас *R*-предикатів та класи *AnU*-предикатів, *TAnU*-предикатів, *RAU*-предикатів, *UAU*-предикатів, *nU=A*-предикатів, *TnU=A*-предикатів. Ці класи індуковано відповідними класами *TD7*-предикатів із такими множинами істиннісних значень:

- $TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$;
- $TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$;
- $TV_{RAU} = TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$;
- $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$;
- $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$;
- $TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$;
- $TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$.

Ці множини замкнені щодо \neg_* , але незамкнені щодо \vee_* , тому вони не утворюють підалгебр *ATV*₇. Для того, щоб клас *TD7*-предикатів з такою множиною істиннісних значень утворював алгебру, треба тим чи іншим способом *модифікувати* \vee_* . Відповідно модифікується похідна $\&_*$.

Множини істиннісних значень, незамкнені щодо \neg_* чи \vee_* , назвемо *девіантними*. Класи *TD7*-предикатів із девіантними множинами істиннісних значень та відповідні класи *GND*-предикатів теж назвемо *девіантними*. Девіантні класи *GND*-предикатів незамкнені щодо \neg чи \vee .

Ми не розглядатимемо можливість модифікації композиції \neg_* , така модифікація веде до цілком неklasичних логік, які вимагають окремого дослідження. З цієї ж причини розглядаємо такі модифікації \vee_* , які можуть мати відмінні від \vee_* значення тільки для аргументів $\uparrow, TF, TF\uparrow$.

Отримані при модифікації \vee_* *TV*-алгебри індукують алгебри *TD7*-предикатів, які далі індукують відповідні алгебри *GND*-предикатів на пропозиційному, реномінативному, першопорядковому рівнях. В цих алгебрах відповідним чином модифікується \vee , тому вони не будуть підалгебрами алгебр *APGV-A, ARGV-A, AQGV-A*. В

деяких випадках маємо *ізоморфізм* цих алгебр та певних підалгебр алгебр *APGV-A, ARGV-A, AQGV-A*, а тому маємо їх *вкладення* в *APGV-A, ARGV-A, AQGV-A*.

Нехай $TV \subseteq TV_7$. Так як \neg_* не модифікуємо, то розглядаємо лише такі *TV*, які замкнені щодо \neg_* . Нехай в обмеженні таблиці істинності \vee_* для *TV* маємо деяке істиннісне значення $\vee \notin TV$. Модифікація \vee_* полягає у заміні значень \vee в таблиці \vee_* для *TV* на деяке $\tau \in TV$. Зрозуміло, що існує дуже багато способів це зробити. В першу чергу розглядаємо такі модифікації, для яких виконується умова *TFC* коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні *TFC* *TV*-алгебра *не індукує* для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними пропозиційними композиціями. Таку *TV*-алгебру назвемо *девіантною*.

Для множин $TV_{AnU}, TV_{TAnU}, TV_{D5}, TV_R, TV_{UAU}, TV_{TnU=A}$ існують модифікації \vee_* та \vee із дотриманням умови *TFC*, тому й маємо такі класи *GND*-предикатів, як *AnU, TAnU, RAU, R, UAU, nU=A, TnU=A*.

Ще залишається розглянути множини істиннісних значень $\{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$, яка незамкнена щодо \vee_* :

$$TF \vee_* \uparrow = T\uparrow \text{ та } TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow.$$

Її підмножини $\{TF, \uparrow\}$ та $\{TF\uparrow, \uparrow\}$ теж незамкнені щодо \vee_* . Далі покажемо, що для цих множин не існує модифікацій \vee_* , які індукують виконання *TFC*. Тому не існує *TV*-алгебр з носіями $\{\uparrow, TF, TF\uparrow\}, \{TF, \uparrow\}$ чи $\{TF\uparrow, \uparrow\}$, які індукують для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними \vee та $\&$. Інакше кажучи, усі такі *TV*-алгебри девіантні.

Логіка *AnU*-предикатів. Множина $TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Природна модифікація \vee_* як \vee_{AnU} така: $TF \vee_{AnU} F\uparrow = TF$.

Тоді TV_{AnU} замкнена щодо визначених нижче \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$ (табл. 4, 5).

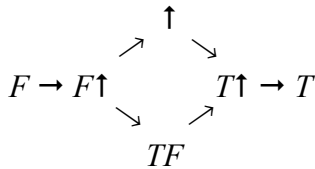
Таблиця 4. Композиція \vee_{AnU}

\vee_{AnU}	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF
T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF
$T\uparrow$	T	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$
$F\uparrow$	T	$F\uparrow$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF
\uparrow	T	\uparrow	$T\uparrow$	\uparrow	\uparrow	$T\uparrow$
TF	T	TF	$T\uparrow$	TF	$T\uparrow$	TF

 Таблиця 5. Композиція $\&_{AnU}$

$\&_{AnU}$	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF
T	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF
F	F	F	F	F	F	F
$T\uparrow$	$T\uparrow$	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	\uparrow	TF
$F\uparrow$	$F\uparrow$	F	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	$F\uparrow$	\uparrow	$F\uparrow$
TF	TF	F	TF	$F\uparrow$	$F\uparrow$	TF

Діаграма Хассе для TV_{AnU} щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$ така:



Отримуємо TV -алгебру ATV_{AnU} , яка індукує алгебру AnU -предикатів $AQAnU^{V-A}$.

Твердження 2. Модифікація \vee_* як \vee_{AnU} – єдина для TV_{AnU} , яка гарантує TFC .

Маємо

$$\begin{aligned}
 T(TF \vee F\uparrow) &= T(TF) \cup T(F\uparrow) = {}^V A \cup \emptyset = {}^V A, \\
 F(TF \vee F\uparrow) &= F(TF) \cap F(F\uparrow) = {}^V A \cap {}^V A = {}^V A,
 \end{aligned}$$

Отже, згідно TFC для $TF \vee_{AnU} F\uparrow$ можливі лише TF чи $TF\uparrow$.

Проте $TF\uparrow \notin TV_{AnU}$, тому TF – єдина можливість:

$$T(TF \vee F\uparrow) = T(TF), \quad F(TF \vee F\uparrow) = F(TF).$$

Таблицю істинності \vee_{AnU} для ATV_{AnU} можна отримати із таблиці істинності \vee_* для ATV_{6_1} заміною $TF\uparrow$ на TF . Звідси

Твердження 3. $ATV_{AnU} \sim_{iz} ATV_{6_1}$.

Наслідок 1. $AQAnU_{V-A} \sim_{iz} AQAU_{V-A}$.

Логіка $TAnU$ -предикатів. Множина $TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Маємо $TV_{TAnU} \subseteq TV_{AnU}$. Множина TV_{TAnU} замкнена щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$.

Діаграма Хассе для TV_{TAnU} щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$ така:

$$F \rightarrow F\uparrow \rightarrow TF \rightarrow T\uparrow \rightarrow T.$$

Маємо TV -алгебру ATV_{AnU} , яка індукує алгебру $TAnU$ -предикатів $AQTAnU^{V-A}$.

Модифікація \vee_* як \vee_{AnU} – єдина для TV_{AnU} , яка гарантує умови TFC , тому така модифікація теж єдина, яка гарантує умови TFC , для її підмножини $TV_{TAnU} \subseteq TV_{AnU}$.

Таблицю істинності \vee_{AnU} для ATV_{TAnU} можна отримати із таблиці істинності \vee_* для ATV_{5_1} заміною \uparrow на TF та із таблиці істинності \vee_* для ATV_{5_2} заміною $TF\uparrow$ на TF . Звідси

Твердження 4.

$$ATV_{TAnU} \sim_{iz} ATV_{5_1} \sim_{iz} ATV_{5_2}.$$

Наслідок 2.

$$AQTAnU_{V-A} \sim_{iz} AQSG_{V-A} \sim_{iz} AQTau_{V-A}.$$

Логіка RAU -предикатів. Множина $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$; $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Тому TV_{D5} не утворює підалгебри алгебри ATV_7 .

Розглянемо допустимі варіанти модифікації \vee_* у випадку TV_{D5} . Потрібно модифікувати значення $TF \vee_* \uparrow$ та $TF\uparrow \vee_* \uparrow$ так, щоб отримати елемент $\tau \in TV_{D5}$.

Маємо

$$\begin{aligned}
 T(TF \vee \uparrow) &= T(TF) \cup T(\uparrow) = T(TF) = {}^V A \quad \text{та} \\
 T(TF\uparrow \vee \uparrow) &= T(TF\uparrow) \cup T(\uparrow) = T(TF\uparrow) = {}^V A;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(TF \vee \uparrow) &= F(TF) \cap F(\uparrow) = F(TF) \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{та} \\
 F(TF\uparrow \vee \uparrow) &= F(TF\uparrow) \cap F(\uparrow) = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Отже, за умови TFC таким τ може бути лише T . Отримуємо

Твердження 5. Єдиною модифікацією \vee_* для TV_{D5} за умови TFC є така \vee_{RAU} :

$$TF \vee_{RAU} \uparrow = T \text{ та } TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T.$$

Маємо TV -алгебру ATV_{RAU} , задамо її логічні зв'язки \vee_{RAU} та $\&_{RAU}$ (табл. 6, 7).

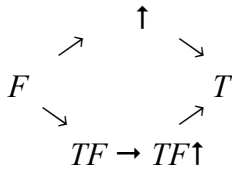
Таблиця 6. Композиція \vee_{RAU}

\vee_{RAU}	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
\uparrow	T	\uparrow	\uparrow	T	T
TF	T	TF	T	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

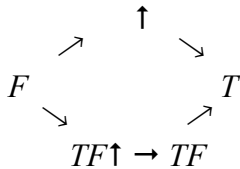
Таблиця 7. Композиція $\&_{RAU}$

$\&_{RAU}$	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	F	F
TF	TF	F	F	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	F	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Діаграма Хассе щодо \vee_{RAU} така:



Діаграма Хассе щодо $\&_{RAU}$ така:



Твердження 6. ATV_{RAU} неізоморфна алгебрам ATV_{5_1} , ATV_{5_2} , ATV_{5_3} , ATV_{AnU} .

Наслідок 3. Алгебра $AQRAU_{V-A}$ неізоморфна алгебрам $AQSG_{V-A}$, $AQTAU_{V-A}$, $AQImG_{V-A}$, $AQAnU_{V-A}$.

Логіка R -предикатів. Особливе місце посідає множина істиннісних значень $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$, безпосередньо пов'язана з логікою R -предикатів.

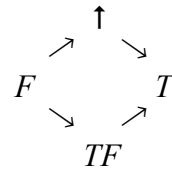
Множина TV_R незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Отже, TV_R не утворює підалгебри алгебри ATV_7 .

Таким чином, алгебра R -предикатів AQR_{V-A} не є підалгеброю алгебри AQG_{V-A} .

Маємо $TV_R \subseteq TV_{RAU}$. Множина TV_R замкнена щодо композицій \vee_{RAU} та $\&_{RAU}$.

Алгебра ATV_R – це фактично алгебра ATV_B істиннісних значень відомої [10] 4-значної логіки Белнапа. Композиції \vee_B та $\&_B$ логіки Белнапа – це звуження композицій \vee_{RAU} та $\&_{RAU}$ на множину TV_R . Це гарантує виконання умови TFC .

Діаграма Хассе для множини TV_R щодо композицій \vee_B та $\&_B$ така:



Твердження 7.

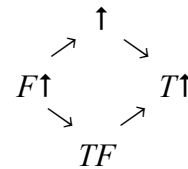
$$ATV_{4_4} \sim_{iz} ATV_B \sim_{iz} ATV_R.$$

Алгебра AQR_{V-A} є вкладенням в алгебра $AQImG_{V-A}$ та $AQAU_{V-A}$, тому й в AQG_{V-A} . Алгебра AQR_{V-A} не індукується підалгебрами алгебри ATV_7 . В AQR_{V-A} композиція \vee узгоджена із композицією \vee_B .

Наслідок 4. $AQR_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A}$.

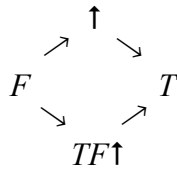
Логіка $nU=A$ -предикатів. Множина $TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\} \subseteq TV_{AnU}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$. Така $TV_{nU=A}$ замкнена щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$. TV -алгебра $ATV_{nU=A}$ індукує алгебру $nU=A$ -предикатів $AQnU_{V-A}$.

Діаграма Хассе для $TV_{nU=A}$ щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$ така:



Логіка UAU -предикатів. Множина $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо \vee_* : $\uparrow \vee_* TF\uparrow = T\uparrow$. Маємо $TV_{UAU} \subseteq TV_{RAU}$, така TV_{UAU} замкнена щодо \vee_{RAU} та $\&_{RAU}$. TV -алгебра ATV_{UAU} індукує алгебру UAU -предикатів $AQUAU_{V-A}$.

Діаграма Хассе для TV_{UAU} щодо \vee_{RAU} та $\&_{RAU}$ така:



Порівнюючи таблиці істинності \vee_{RAU} для ATV_{UAU} , \vee_{AnU} для $ATV_{nU=A}$, \vee_{RAU} для ATV_R та \vee_* для ATV_{4_4} , отримуємо:

Твердження 8. $ATV_{UAU} \sim_{iz} ATV_{nU=A} \sim_{iz} ATV_R \sim_{iz} ATV_{4_4}$.

$\sim_{iz} ATV_{nU=A} \sim_{iz} ATV_R \sim_{iz} ATV_{4_4}$.

Наслідок 5. $AQUAU_{V-A} \sim_{iz} AQnU_{V-A} \sim_{iz} AQR_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A}$.

$\sim_{iz} AQnU_{V-A} \sim_{iz} AQR_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A}$.

Логіка $TnU=A$ -предикатів. Множина $TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$. Водночас $TV_{TnU=A}$ замкнена щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$. TV -алгебра $ATV_{TnU=A}$ індукує алгебру $TnU=A$ -предикатів $AQTnU_{V-A}$.

Діаграма Хассе для $TV_{TnU=A}$ щодо \vee_{AnU} та $\&_{AnU}$ така:

$$F\uparrow \rightarrow TF \rightarrow T\uparrow$$

Порівнюючи таблицю істинності \vee_{AnU} для $ATV_{TnU=A}$ із таблицями істинності \vee_* для ATV_{3_1} , ATV_{3_2} , ATV_{3_3} , ATV_{3_4} , ATV_{3_5} , отримуємо:

Твердження 9. $ATV_{TnU=A} \sim_{iz} ATV_{3_1} \sim_{iz} ATV_{3_2} \sim_{iz} ATV_{3_3} \sim_{iz} ATV_{3_4} \sim_{iz} ATV_{3_5}$.

$\sim_{iz} ATV_{3_2} \sim_{iz} ATV_{3_3} \sim_{iz} ATV_{3_4} \sim_{iz} ATV_{3_5}$.

Наслідок 6.

$AQTnU_{V-A} \sim_{iz} AQP_{V-A} \sim_{iz} AQT_{V-A} \sim_{iz} AQTU_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A} \sim_{iz} AQRSTIG_{V-A}$.

$\sim_{iz} AQTU_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A} \sim_{iz} AQRSTIG_{V-A}$.

4. Логіки, індуковані TV_{D5}

Єдиним допустимим варіантом модифікації \vee_* за умови TFC у випадку TV_{D5} є такий: $TF \vee_{RAU} \uparrow = T$ та $TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T$. Він веде до логіки RAU -предикатів.

Інші варіанти модифікації \vee_* для TV_{D5} шляхом корекції виділених значень $T\uparrow$ в таблиці \vee_* ведуть до істотно девіантних логік, для яких не виконується TFC .

Через порушення умови TFC TV -ал-

гебри девіантні, вони не індукують для GND -предикатів композиційні алгебри із коректними \vee та $\&$.

Розглянемо для TV_{D5} варіант модифікації \vee_* , який веде до специфічної логіки EU -предикатів, істотно відмінної від логіки GND -предикатів.

5-значна логіка EU . Оригінальна 5-значна логіка EU описана в [11]. Множиною істиннісних значень такої логіки є $TV_{EU} = \{T, F, \uparrow, e, eu\}$; при цьому \uparrow (невизначеність) трактується як \uparrow у нас, проте трактування e (помилка) та eu дещо відмінне від їх трактування як TF та $TF\uparrow$ в алгебрі ATV_7 . Проте для уніфікації позначень множиною істиннісних значень логіки EU вважаємо $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Логічна зв'язка \neg_{eu} логіки EU ідентична логічній зв'язці \neg_* .

Логічні зв'язки \vee_{eu} та $\&_{eu}$ логіки EU задаються так (табл. 8, 9).

Таблиця 8. Композиція \vee_{eu}

\vee_{eu}	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
\uparrow	T	\uparrow	\uparrow	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
TF	T	TF	$TF\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 9. Композиція $\&_{eu}$

$\&_{eu}$	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
TF	TF	F	$TF\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Отже, \vee_{eu} отримано такою модифікацією \vee_* :

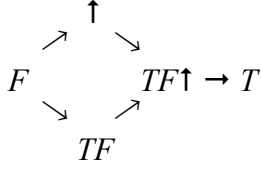
$$TF \vee_{eu} \uparrow = TF\uparrow \text{ та } TF\uparrow \vee_{eu} \uparrow = TF\uparrow.$$

Для EU умова TFC не виконується:

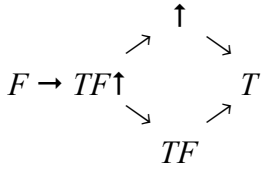
$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset$$

та $F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset$,
водночас $F(TF\uparrow) \neq \emptyset$.

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо \vee_{eu} :



Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\&_{eu}$:



Маємо TV -алгебру AEU . Через порушення TFC алгебра AEU девіантна, вона не індукує для GND -предикатів композиційну алгебру із коректними \vee та $\&$.

Алгебра AEU неізоморфна алгебрам ATV_{5_1} , ATV_{5_2} , ATV_{5_3} , ATV_{AnU} , ATV_{RAU} .

Опишемо ще 3 варіанти модифікації \vee_* для TV_{D5} . Всі інші варіанти такої модифікації видаються зовсім неприродними.

Варіант_1. Модифікуємо \vee_* як $\vee_{\#}$ так: $TF\vee_{\#}\uparrow = TF$ та $TF\uparrow\vee_{\#}\uparrow = TF\uparrow$.

Єдина відмінність $\vee_{\#}$ від \vee_{eu} у тому, що $TF\vee_{eu}\uparrow = TF\uparrow$.

Умова TFC не виконується:

$$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset,$$

водночас $F(TF) \neq \emptyset$.

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\vee_{\#}$:

$$F \rightarrow \uparrow \rightarrow TF \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T$$

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\&_{\#}$:

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow TF \rightarrow \uparrow \rightarrow T$$

Маємо TV -алгебру, яку через подібність до AEU назвемо $AEU_{\#}$.

$AEU_{\#}$ неізоморфна алгебрам ATV_{5_1} , ATV_{5_2} , ATV_{5_3} , ATV_{RAU} , ATV_{TanU} , AEU .

Через порушення TFC девіантна алгебра $AEU_{\#}$ не індукує композиційну алгебру GND -предикатів із коректними \vee та $\&$.

Варіант_2. Модифікуємо \vee_* як $\vee_{\#D}$ так: $TF\vee_{\#D}\uparrow = TF$ та $TF\uparrow\vee_{\#D}\uparrow = TF$.

Отримуємо логічні зв'язки $\vee_{\#D}$ та $\&_{\#D}$, що задаються так (табл. 10, 11).

Таблиця 10. Композиція $\vee_{\#D}$

$\vee_{\#D}$	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
\uparrow	T	\uparrow	\uparrow	TF	TF
TF	T	TF	TF	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	TF	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 11. Композиція $\&_{\#D}$

$\&_{\#D}$	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	TF	TF
TF	TF	F	TF	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	TF	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Умова TFC не виконується:

$$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset,$$

водночас $F(TF) \neq \emptyset$.

$\vee_{\#D}$ і $\&_{\#D}$ неасоціативні. Покажемо для $\vee_{\#D}$: $\uparrow\vee_{\#D}(TF\uparrow\vee_{\#D}TF) = \uparrow\vee_{\#D}TF\uparrow = TF$; $(\uparrow\vee_{\#D}TF)\vee_{\#D}TF\uparrow = TF\vee_{\#D}TF\uparrow = TF\uparrow$.

$\vee_{\#D}$ і $\&_{\#D}$ не задають впорядкування TV_{D5} через порушення транзитивності. Показуємо це для $\vee_{\#D}$. $\alpha \rightarrow \beta$ означає $\alpha\vee_{\#D}\beta = \beta$, тому $\uparrow \rightarrow TF$ та $TF \rightarrow TF\uparrow$. За транзитивністю має бути $\uparrow \rightarrow TF\uparrow$, тобто $\uparrow\vee_{\#D}TF\uparrow = TF\uparrow$. Проте $\uparrow\vee_{\#D}TF\uparrow = TF$.

Отже, отримана TV -алгебра $AEU_{\#D}$ цілком девіантна.

Варіант_3. Маємо $TV_R \subseteq TV_{D5}$, тому розглянемо модифікацію $\vee_{\#T}$ композиції \vee_* , яка є розширенням \vee_B на TV_{D5} .

Модифікуємо \vee_* як $\vee_{\#T}$ так:

$$TF\vee_{\#T}\uparrow = T \text{ та } TF\uparrow\vee_{\#T}\uparrow = TF\uparrow.$$

Така $\vee_{\#T}$ відмінна від \vee_{RAU} лише у тому, що $TF\uparrow\vee_{RAU}\uparrow = T$.

Отримуємо логічні зв'язки $\vee_{\#T}$ та $\&_{\#T}$, що задаються так (табл. 12, 13).

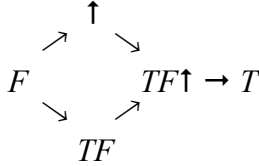
Таблиця 12. Композиція $\vee_{\#T}$

$\vee_{\#T}$	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
\uparrow	T	\uparrow	\uparrow	T	$TF\uparrow$
TF	T	TF	T	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

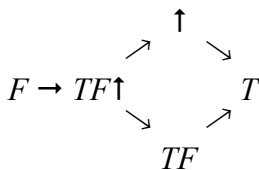
Таблиця 13. Композиція $\&_{\#T}$

$\&_{\#T}$	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	\uparrow	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	F	$TF\uparrow$
TF	TF	F	F	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\vee_{\#T}$:



Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\&_{\#T}$:



TFC не виконується: $F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset \neq F(TF\uparrow)$.

$\vee_{\#T}$ і $\&_{\#T}$ неасоціативні. Покажемо для $\vee_{\#T}$: $\uparrow\vee_{\#T}(TF\uparrow\vee_{\#T}TF) = \uparrow\vee_{\#T}TF\uparrow = TF\uparrow$; $(\uparrow\vee_{\#T}TF)\vee_{\#T}TF\uparrow = T\vee_{\#T}TF\uparrow = T$.

Отримали цілком девіантну TV -алгебру, яку назвемо AEU_T .

AEU_T неізоморфна алгебрам ATV_{5_1} , ATV_{5_2} , ATV_{5_3} , ATV_{RAU} , ATV_{TAnU} , AEU , $AEU_{\#}$.

TV -алгебри, індуковані підмножинами TV_{D5} . Маємо три 4-елементних підмножини TV_{D5} , які замкнені щодо \neg_* .

Це TV_{4_2} , TV_R та TV_{UAU} .

Множина $TV_{4_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$ генерує TV -алгебру ATV_{4_2} , яка індукує алгебри TUA -предикатів.

Множина $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF\vee_*\uparrow = T\uparrow$.

Модифікація \vee_* як \vee_{RAU} дає TV -алгебру ATV_R , яка індукує алгебри R -предикатів.

Множина $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо \vee_* : $\uparrow\vee_*TF\uparrow = T\uparrow$.

Модифікація \vee_* як \vee_{RAU} дає TV -алгебру ATV_{UAU} , яка індукує алгебри UAU -предикатів.

Модифікація \vee_* як \vee_{eu} дає TV -алгебру AEU_{4_1} .

Зауважимо, що на множині TV_{UAU} із \vee_{eu} та $\&_{eu}$ збігаються $\vee_{\#}$ та $\&_{\#}$, \vee_T та $\&_{\#T}$.

Діаграма Хассе для EU_{4_1} щодо \vee_{eu} :

$$F \rightarrow \uparrow \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T.$$

Діаграма Хассе для EU_{4_1} щодо $\&_{eu}$:

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow T.$$

Маємо TV -алгебру AEU_{4_1} .

Для AEU_{4_1} TFC не виконується:

$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset,$$

водночас $F(TF\uparrow) \neq \emptyset$. Тому девіантна AEU_{4_1} не індукує композиційну алгебру GND -предикатів із коректними \vee та $\&$.

AEU_{4_1} – це алгебра ATV_{4_2} , в якій $TF \Rightarrow \uparrow$. Тому $AEU_{4_1} \sim_{iz} ATV_{4_2}$. Водночас AEU_{4_1} неізоморфна алгебрам ATV_{4_1} , ATV_{4_3} , ATV_{4_4} , $ATV_{nU=A}$, ATV_R , ATV_{UAU} .

Розглянемо ще одну модифікацію \vee_* на TV_{UAU} – це \vee_{42} така: $TF\uparrow\vee_{42}\uparrow = \uparrow$.

Така \vee_{42} та похідна $\&_{42}$ видаються неприродними (табл. 14, 15).

Таблиця 14. Композиція \vee_{42}

\vee_{42}	T	F	\uparrow	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T
F	T	F	\uparrow	$TF\uparrow$
\uparrow	T	\uparrow	\uparrow	\uparrow
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	\uparrow	$TF\uparrow$

Таблиця 15. Композиція $\&_{42}$

$\&_{42}$	T	F	\uparrow	$TF\uparrow$
T	T	F	\uparrow	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F
\uparrow	\uparrow	F	\uparrow	\uparrow
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	\uparrow	$TF\uparrow$

Модифікація \vee_* як \vee_{42} дає TV -алгебру AEU_{4_2} .

Для AEU_{4_2} TFC не виконується:

$$T(TF\uparrow\vee\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup\emptyset = T(TF\uparrow) \neq \emptyset, \text{ водночас } T(\uparrow) = \emptyset.$$

Діаграма Хассе щодо \vee_{42} така:

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow T.$$

Діаграма Хассе щодо $\&_{42}$ така:

$$F \rightarrow \uparrow \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T.$$

AEU_{4_2} – це ATV_{4_2} , в якій $TF\uparrow \Rightarrow \uparrow$ та $TF \Rightarrow TF\uparrow$. Тому $AEU_{4_2} \sim_{iz} ATV_{4_2}$.

Отже, $AEU_{4_1} \sim_{iz} AEU_{4_2} \sim_{iz} ATV_{4_2}$.

Через порушення TFC девіантна AEU_{4_2} не індукує композиційну алгебру GND -предикатів із коректними \vee та $\&$.

Маємо чотири **3-елементних** підмножини TV_{D5} , які замкнені щодо \neg_* . Три з них замкнені щодо \vee_* .

Множина $TV_{3_1} = \{T, F, \uparrow\}$ генерує TV -алгебру ATV_{3_1} , яка індукує алгебри P -предикатів.

Множина $TV_{3_2} = \{T, F, TF\}$ генерує TV -алгебру ATV_{3_2} , яка індукує алгебри T -предикатів.

Множина $TV_{3_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$ генерує TV -алгебру ATV_{3_3} , яка індукує алгебри $TU=A$ -предикатів.

Множина $TV_{3_D} = \{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$ не замкнена щодо \vee_* : $TF\vee_*\uparrow = TF\uparrow\vee_*\uparrow = T\uparrow$.

Склад TV_{3_D} засвідчує *невідмінність* істини й фальші, що злилися воєдино!

Коректні модифікації \vee_* на TV_{3_D} , для яких виконується TFC , *неможливі*.

Справді маємо:

$$T(TF\vee\uparrow) = T(TF)\cup T(\uparrow) = \emptyset;$$

$$T(TF\uparrow\vee\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = \emptyset;$$

$$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset;$$

$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset.$$

Отже, *єдиною* модифікацією \vee_{md} композиції \vee_* за умови TFC є така:

$$TF\vee_{md}\uparrow = T \text{ та } TF\uparrow\vee_{md}\uparrow = T.$$

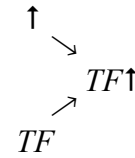
Проте $T \notin \{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Відносно “природними” модифікаціями \vee_* для $TV_{3_D} \in \vee_{eu}$ та $\vee_{\#}$, до певної міри $\vee_{\#D}$.

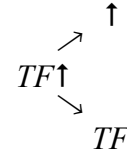
У випадку \vee_{eu} маємо TV -алгебру $ATV_{3_{eu}}$, вона є підалгеброю AEU .

\vee_{eu} та $\&_{eu}$ на TV_{3_D} збігаються.

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо \vee_{eu} :



Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\&_{eu}$:



У випадку $\vee_{\#}$ маємо TV -алгебру $ATV_{3_{\#}}$, вона є підалгеброю $AEU_{\#}$.

$\vee_{\#}$ та $\&_{\#}$ на TV_{3_D} збігаються.

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\vee_{\#}$:

$$\uparrow \rightarrow TF \rightarrow TF\uparrow.$$

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\&_{\#}$:

$$TF\uparrow \rightarrow TF \rightarrow \uparrow.$$

У випадку $\vee_{\#D}$ маємо TV -алгебру $ATV_{3_{\#D}}$, вона є підалгеброю $AEU_{\#D}$.

$\vee_{\#D}$ та $\&_{\#D}$ на TV_{3_D} збігаються.

$\vee_{\#D}$ та $\&_{\#D}$ на TV_{3_D} неасоціативні, тому TV -алгебра $ATV_{3_{\#D}}$ *цілком девіантна*.

Алгебри $ATV_{3_{eu}}$, $ATV_{3_{\#}}$, $ATV_{3_{\#D}}$ попарно неізоморфні, вони також неізоморфні жодній з 3-елементних алгебр ATV_{3_1} , ATV_{3_2} , ATV_{3_3} , ATV_{3_4} , ATV_{3_5} , $ATV_{TnU=A}$.

Через порушення умови TFC девіантні алгебри $ATV_{3_{eu}}$, $ATV_{3_{\#}}$, $ATV_{3_{\#D}}$ не індукують композиційні алгебри GND -предикатів із коректними \vee та $\&$.

Маємо чотири **2-елементних** підмножини TV_{D5} , які замкнені щодо \neg_* .

Множина $TV_{2_1} = \{T, F\}$ генерує класичну булеву TV -алгебру ATV_{2_1} , яка індукує алгебри TS -предикатів.

Множина $TV_{2_3} = \{TF, TF\uparrow\}$ генерує TV -алгебру ATV_{2_3} , яка індукує алгебри $TAmG$ -предикатів. Клас $TAmG$ -предикатів вироджений [8].

Множина $TV_{2_D} = \{\uparrow, TF\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Коректні модифікації \vee_* із TFC , *неможливі*, адже *єдиною* модифікацією \vee_{md} композиції \vee_* за умови TFC є така: $TF \vee_{md} \uparrow = T$ та $TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T$.

Водночас $T \notin \{\uparrow, TF\}$.

Природні модифікації \vee_* на TV_{2_D} – це $\vee_{\#}$ і дуальна їй на TV_{2_D} композиція $\vee_{\#d}$: $\uparrow \vee_{\#d} \uparrow = TF \vee_{\#d} \uparrow = \uparrow \vee_{\#d} TF = TF$, $TF\uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$.

У випадку $\vee_{\#}$ маємо TV -алгебру $ATV_{2_{D\#}}$, вона ізоморфна алгебрі ATV_{2_3} (при перейменуванні \uparrow на TF та TF на $TF\uparrow$).

У випадку $\vee_{\#d}$ маємо TV -алгебру $ATV_{2_{Dd}}$, вона ізоморфна ATV_{2_3} (при перейменуванні \uparrow на $TF\uparrow$).

Множина $TV_{2_U} = \{\uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо \vee_* : $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Коректні модифікації \vee_* , для яких виконується TFC , *неможливі*, адже *єдиною* модифікацією \vee_{md} композиції \vee_* за умови TFC є така:

$$TF \vee_{md} \uparrow = T \text{ та } TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T.$$

Проте $T \notin \{\uparrow, TF\uparrow\}$.

Природні модифікації \vee_* на TV_{2_U} – це $\vee_{\#}$ і дуальна їй на TV_{2_U} композиція $\vee_{\#du}$: $\uparrow \vee_{\#du} \uparrow = TF\uparrow \vee_{\#du} \uparrow = \uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$, $TF\uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$.

У випадку $\vee_{\#}$ маємо TV -алгебру $ATV_{2_{U\#}}$, вона ізоморфна ATV_{2_3} (при перейменуванні \uparrow на TF).

У випадку $\vee_{\#du}$ маємо TV -алгебру $ATV_{2_{Ud}}$, вона ізоморфна алгебрі ATV_{2_3} (при перейменуванні \uparrow на $TF\uparrow$ та $TF\uparrow$ на \uparrow).

Через порушення TFC девіантні алгебри $ATV_{2_{D\#}}$, $ATV_{2_{Dd}}$, $ATV_{2_{U\#}}$, $ATV_{2_{Ud}}$ не індукують композиційні алгебри GND -предикатів із коректними \vee та $\&$.

Висновки

Вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки загальних недетермінованих (GND) предикатів. GND -предикати моделюються як 7-значні $TD7$ -предикати. Множина TV_7 їх істиннісних значень задає алгебру істиннісних значень (TV -алгебру) $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$. Багато підмножин TV_7 незамкнені щодо \neg_* чи \vee_* , тому не утворюють підалгебр ATV_7 . Такі підмножини та відповідні класи GND -предикатів названо девіантними. Девіантні TV -алгебри та девіантні класи GND -предикатів досліджено в даній роботі. Для того, щоб девіантна $TV \subseteq TV_7$ утворила алгебру, необхідно модифікувати \neg_* чи \vee_* . В роботі не розглядається модифікація \neg_* , яка веде до специфічних некласичних логік. Найважливішими є такі модифікації \vee_* , для яких виконується умова TFC коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні умова TFC TV -алгебра стає девіантною, вона не індукує алгебру GND -предикатів. Для всіх підмножин TV_7 досліджено можливість модифікації \vee_* із умовою TFC , що визначає відповідні класи GND -предикатів. Описано природні модифікації \vee_* без умови TFC , що дає низку девіантних TV -алгебр. Для трьох девіантних множин не існує модифікацій \vee_* із TFC , для них вказано відносно природні девіантні TV -алгебри.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993 – 2000.
2. Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenther (eds.), 2nd ed. 2011. Springer Netherlands. Vol. 16. P. 227–304.
3. Hähnle R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. *Logic Journal of the IGPL*, 2005. **13**. P. 415–433.
4. Jones C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. Elsevier,

- Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2006. Vol. 145. P. 3–25.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
 6. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першого порядку логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.
 7. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2017. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
 8. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Алгебри загальних недетермінованих предикатів. *Проблеми програмування*. 2018. № 1. С. 5–21.
 9. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти. *Проблеми програмування*. 2018. № 2–3. С. 31–45.
 10. Belnap N., Steel T. *The Logic of Questions and Answers*. New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
 11. Нікітченко М.С., Шишацька О.В. Семантичні властивості п'ятизначних логік. *Проблеми програмування*. 2018. № 1. С. 22–35.
 7. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
 8. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. In *Problems in Programming*. N1. P. 5–21 (in ukr).
 9. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Logics of general non-deterministic predicates: semantic aspects. In *Problems in Programming*. N2–3. P. 31–45 (in ukr).
 10. Belnap N. and Steel T. (1976). *The Logic of Questions and Answers*. New Haven and London: Yale Univ. Press.
 11. Nikitchenko M., and Shyshatska E. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. In *Problems in Programming*. N1. P. 22–35 (in ukr).

Одержано 08.02.2019

References

1. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T. (editors). (1993–2000). *Handbook of Logic in Computer Science* Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. Avron A. and Zamansky A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. In *Handbook of Philosophical Logic*, D.M. Gabbay, F. Guenther (eds.), 2nd ed., vol. 16, Springer Netherlands. P. 227–304.
3. Hähnle R. (2005). Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. In *Logic Journal of the IGPL*, **13**. P. 415–433
4. Jones C. (2006). Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In *Proceedings of AVoCS'05*. V. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. P. 3–25.
5. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskiy Universytet (in ukr).
6. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In *Problems in Programming*. N2–3. P. 73–86 (in ukr).

Про авторів:

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 90,
у тому числі у фахових виданнях – 35.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 12.
Scopus Author ID: 57190873266
h-індекс (Google Scholar): 5 (4 з 2014)
<http://orcid.org/0000-0003-4139-2525>.

Місце роботи автора:

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19.
E-mail: me.oksana@gmail.com