УДК 004.42:510.69 https://doi.org/10.15407/pp2019.03.011

О.С. Шкільняк

ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В ЛОГІКАХ ЧАСТКОВИХ ПРЕДИКАТІВ З КОМПОЗИЦІЄЮ ПРЕДИКАТНОГО ДОПОВНЕННЯ

Досліджено нові програмно-орієнтовані логіки часткових предикатів з операцією (композицією) предикатного доповнення, такі логіки названо LC. Для першопорядкових LC запропоновано низку відношень логічного наслідку та відношень логічного наслідку за умови невизначеності. Досліджено властивості цих відношень, встановлено співвідношення між ними. Для відношень типів $|=_T$ та $|=_F$ доведено теорему про елімінацію умов невизначеності. Для запропонованих відношень описано умови їх гарантованої наявності, наведено властивості декомпозиції формул та елімінації кванторів.

Ключові слова: логіка, частковий предикат, композиційна алгебра, логічний наслідок.

Вступ

Розвиток інформаційних технологій та розширення сфери їх застосування роблять першочерговою задачу створення надійних і ефективних програмних систем. Недавні авіакатастрофи з літаками Boeing 737 MAX 8 яскраво це засвідчують. В основі таких систем лежить апарат математичної логіки (див., напр., [1]). Зазвичай це класична логіка [2] предикатів та базовані на ній спеціальні логіки. Проте класична логіка має [3] принципові обмеження, які ускладнюють її використання. Тому проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів набуває особливої актуальності. Такими формалізмами є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) часткових квазіарних предикатів. Описано та досліджено [3–6] низку класів КНЛ на різних рівнях абстрактності й загальності.

Важливим різновидом програмно-орієнтованих логік, які успішно застосовуються в системах верифікації програм, є логіки Флойда-Хоара [7]. Ці логіки використовують тотальні перед- та після-умови (предикати), тому запропоновано [8, 9] їх розширення на випадок часткових предикатів. Введення спеціальної операції (композиції) предикатного доповнення [9] є продуктивним напрямком такого розширення. КНЛ часткових предикатів з композицією предикатного доповнення запропоновано в [10], їх названо LC. Дослідженню пропозиційних LC присвячена робота [10].

Метою даної роботи є вивчення семантичних властивостей першопорядкових LC. Запропоновано низку відношень логічного наслідку в LC та відношень логічного наслідку за умови невизначеності. Досліджено властивості цих відношень, встановлено співвідношення між цими. Для відношень типів $|=_T$ та $|=_F$ доведено теорему про елімінацію умов невизначеності. Для цих відношень описано умови їх гарантованої наявності, наведено властивості декомпозиції формул та елімінації кванторів.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі [3, 5].

1. Композиційні системи логік з предикатним доповненням

Під *V*-*A*-квазіарним предикатом розуміємо часткову неоднозначну функцію вигляду $P : {}^VA \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^VA$ – множина всіх *V*-*A*-іменних множин.

Множину всіх значень, які неоднозначний предикат P може приймати на аргументі (даному) $d \in {}^VA$, позначаємо $P[d]$.

В цій роботі розглядаємо неоднозначні (недетерміновані) предикати реляційного типу, або *R*-предикати.

Кожний *R*-предикат Q можна однозначно задати за допомогою 2-х множин:
– область істинності $T(Q) = \{d \mid T \in Q[d]\}$;
– область хибності $F(Q) = \{d \mid F \in Q[d]\}$.

Область невизначеності *R*-предиката Q визначається через $T(Q)$ та $F(Q)$ так:

$$\perp(Q) = \overline{T(Q) \cup F(Q)} = \overline{T(Q)} \cap \overline{F(Q)}.$$

V-A-квазіарний R-предикат Q:

– частковий однозначний або P-предикат, якщо $T(Q)\cap F(Q)=\varnothing$;

– тотальний, або T-предикат, якщо $T(Q)\cup F(Q) = {}^{V}\!A$; тоді $\perp(Q) = \varnothing$.

Для P-предикатів пишемо $Q(d)\downarrow$, якщо значення $Q(d)$ визначене, та пишемо $Q(d)\uparrow$, якщо значення $Q(d)$ невизначене.

Тому для P-предикатів:

$$T(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = T\},$$

$$F(Q) = \{d \mid Q(d)\downarrow = F\}.$$

Тоді $\perp(Q) = \{d \mid Q(d)\uparrow\}$.

Класи V-A-квазіарних R-предикатів та P-предикатів позначимо $Pr^{V\text{–}A}$ та $PrP^{V\text{–}A}$. Маємо [5] 4 константних R-предикати T, F, $\perp$, Υ: $T(\mathrm{T}) = F(\mathrm{F}) = {}^{V}\!A$, $T(\mathrm{F}) = F(\mathrm{T}) = \varnothing$, $T(\perp) = F(\perp) = \varnothing$, $T(\Upsilon) = F(\Upsilon) = {}^{V}\!A$.

Опишемо композиції R-предикатів.

Композиції пропозиційного рівня називають логічними зв'язками. За базові логічні зв'язки R-предикатів візьмемо $\neg$ та $\vee$, вони задаються так:

$$T(\neg P) = F(P);\ \ F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q);\ \ F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q).$$

Композиції $\to$, & є *похідними*, вони виражаються через базові композиції $\neg$, $\vee$:

$$P\&Q = \neg(\neg P\vee\neg Q);\ \ P\to Q = \neg P\vee Q.$$

Для R-предикатів $\perp(\neg Q) = \perp(Q)$;

$$\perp(P\vee Q) = (\perp(P)\cap\overline{T(Q)})\cup(\perp(Q)\cap\overline{T(P)}).$$

1-арна композиція реномінації $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}} : Pr^{V-A}\to Pr^{V-A}$ задається умовою:

$$\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)[d] = P\,[\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(d)].$$

Тут $\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ – операція реномінації [3, 5].

$\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$ можна визначити через області істинності та хибності предиката $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)$:

$$T(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \{d \mid \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(d)\in T(P)\};$$

$$F(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = \{d \mid \mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(d)\in F(P)\}.$$

Визначальними для першопорядкових логік є 1-арні композиції *квантифікації*. За базову візьмемо $\exists x$, задамо її так:

$$T(\exists xP) = \bigcup_{a\in A}\{d \mid d\nabla x\mapsto a\in T(P)\};$$

$$F(\exists xP) = \bigcap_{a\in A}\{d \mid d\nabla x\mapsto a\in F(P)\}.$$

Композиція $\forall x$ є *похідною*:

$$\forall xP = \neg\exists x\neg P.$$

Маємо $\perp(\exists xP) =$

$$=\overline{T(\exists xP)\cup F(\exists xP)} = \overline{T(\exists xP)}\cap\overline{F(\exists xP)}.$$

Звідси $\perp(\exists xP) =$

$$=\bigcap_{a\in A}\{d \mid d\nabla x\mapsto a\in F(P)\cup\perp(P)\}\cap$$

$$\cap\bigcup_{a\in A}\{d \mid d\nabla x\mapsto a\in\perp(P)\}.$$

Зокрема, для P-предикатів маємо

$$\perp(\exists xQ) = \bigcap_{a\in A}\{d \mid Q(d\nabla x\mapsto a)\neq T\}\cap$$

$$\cap\bigcup_{a\in A}\{d \mid d\nabla x\mapsto a\in\perp(P)\}.$$

Таким чином, для P-предикатів:

$\exists xQ(d)\uparrow \Leftrightarrow Q(d\nabla x\mapsto b)\uparrow$ для деякого $b\in A$ та неможливо $\exists xQ(d) = T$.

Характерна особливість LC – наявність спеціальної немонотонної 1-арної композиції предикатного доповнення $\sim$.

Композицію $\sim$ можна задати так:

$$T(\sim P) = \perp(P) = \overline{T(P)\cup F(P)} = \overline{T(P)}\cap\overline{F(P)},$$

$$F(\sim P) = \varnothing.$$

Тоді маємо $\perp(\sim P) = T(P)\cup F(P)$.

Для P-предикатів $\sim$ задається так:

$$(\sim P)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } P(d)\uparrow, \\ \text{невизначене}, & \text{якщо } P(d)\downarrow. \end{cases}$$

Отже, композиція $\sim$ немонотонна.

Класи P-предикатів та R-предикатів замкнені щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\to$, &, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists xQ$, $\forall xP$, $\sim$.

$\sim Q$ є P-предикатом для довільного $Q\in Pr^{V\text{–}A}$, тому клас T-предикатів незамкнений щодо $\sim$. Отже, для T-предикатів LC не мають смислу.

Тому розглядаємо загальний клас LC – логіки R-предикатів з композицією $\sim$, та їх підклас LCP – LC P-предикатів.

LC пропозиційного, реномінативного, чистого першопорядкового рівнів називаємо PLC, RLC, QLC. LC P-предикатів відповідних рівнів називаємо PLCP, RLCP, QLCP. Множини базових композицій PLC, RLC, QLC – це множини $C_{PLC}=\{\neg,\vee,\sim\}$, $C_{RLC}=\{\neg,\vee,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\sim\}$, $C_{QLC}=\{\neg,\vee,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\sim,\exists x\}$.

Семантичною основою LC є композиційні предикатні системи вигляду CS = $({}^{V}\!A, Pr^{V\text{–}A}, C_{LC})$, де C_{LC} – множина базових композицій відповідного рівня. Отже, маємо композиційні LC-системи: пропозиційну $({}^{V}\!A, Pr^{V\text{–}A}, C_{PLC})$, реномінативну $({}^{V}\!A, Pr^{V\text{–}A}, C_{RLC})$, чисту першопорядкову $({}^{V}\!A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QLC})$. Відповідно отримуємо композиційні LC-алгебри R-предикатів: реномінативну $APLC = (Pr^{V\text{–}A}, C_{PLC})$, реномінативну $ARLC = (Pr^{V\text{–}A}, C_{RLC})$, чисту першопорядкову $AQLC = (Pr^{V\text{–}A}, C_{QLC})$.

Клас P-предикатів замкнений щодо $\sim$, тому в $APLC$, $ARLC$, $AQLC$ виділені підалгебри $APLCP$, $ARLCP$, $AQLCP$ з носієм $PrP^{V\text{–}A}$ – композиційні LC-алгебри P-предикатів пропозиційного, реномінативного, чистого першопорядкового рівнів.

Опишемо основні властивості композицій LC.

Не пов'язані з $\sim$ властивості пропозиційних композицій, композицій реномінації та квантифікації в LC аналогічні властивостям цих композицій у традиційних логіках квазіарних предикатів (див. [3–5]).

На пропозиційному рівні властивості композиції $\sim$ описано в [10]. Зокрема:

$$\sim\neg P=\sim P;\quad \sim\sim\sim P=\sim P;\quad \sim\sim\sim\sim P=\sim\sim P.$$

Для P-предикатів додатково маємо

$$\sim\sim P=P\vee\neg P.$$

Твердження 1. Маємо

$$F(\neg\sim P)=T(\sim P)=\perp(P)=\overline{T(P)}\cap\overline{F(P)},$$

$$T(\neg\sim P)=F(\sim P)=\varnothing,$$

$$\perp(\neg\sim P)=\perp(\sim P)=T(P)\cup F(P);$$

$$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P))=T(\sim(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))),$$

$$\perp(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P))=\perp(\sim(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))),$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P))=F(\sim(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)))=\varnothing.$$

Твердження 2. Властивість $\mathrm{R}\sim$-дистрибутивності:

$$\mathrm{R}\sim)\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim P)=\sim\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P).$$

Твердження 3. Маємо

$$\perp(\sim\exists xP)=T(\exists xP)\cup F(\exists xP);$$
$$T(\sim\exists xP)=\perp(\exists xP);\quad F(\sim\exists xP)=\varnothing.$$

Твердження 4. Дія композиції $\sim$ на константні предикати T, F, $\perp$, Υ:

$$\sim(\perp)=\mathrm{T};\ \sim(\mathrm{T})=\sim(\mathrm{F})=\sim(\Upsilon)=\perp.$$

Отже, множини $\mathrm{S_R}=\{\mathrm{T},\mathrm{F},\perp,\Upsilon\}$ та $\mathrm{S_P}=\{\mathrm{T},\mathrm{F},\perp\}$ замкнені щодо $\neg,\vee,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x,\sim$.

Тому можна виділити підалгебри $AQsC=(\mathrm{S_R}, C_{QLC})$ та $AQsCP=(\mathrm{S_P}, C_{QLC})$ алгебр $AQLC$ та $AQLCP$. Аналогічні алгебри $APsC$, $ARsC$ з носієм $\mathrm{S_R}$ та $APsCP$, $ARsCP$ з носієм $\mathrm{S_P}$ виділяємо на пропозиційному та реномінативному рівнях; для них маємо $APsC\prec APLC$, $ARsC\prec ARLC$, $APsCP\prec APLCP$, $ARsCP\prec ARLCP$.

Опишемо мови логік з композицією предикатного доповнення. Розглядаємо загальний випадок першопорядкових LC.

Алфавіт мови:

– множина V предметних імен (змінних),

– множина Ps предикатних символів,

– множина $C_{QLC}=\{\neg,\vee,\sim,R_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x\}$ символів базових композицій.

Задамо множину Fr формул мови. Маємо $Ps\subseteq Fr$, далі задаємо індуктивно:

$$\Phi,\Psi\in Fr\Rightarrow\neg\Phi,\vee\Phi\Psi,\sim\Phi,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi,\exists x\Phi\in Fr.$$

Розширена сигнатура мови QLC – це $\Sigma=(V, V_T, C_{QLC}, Ps)$, де $V_T\subseteq V$ – множина тотально неістотних [5] імен.

Інтерпретуємо мову на композиційних системах CS = $({}^{V}A, Pr^{V\text{–}A}, C_{QLC})$.

Задаємо тотальне однозначне $I : Ps \to Pr^{V\text{–}A}$, яке продовжимо до відображення інтерпретації формул $I : Fr \to Pr^{V\text{–}A}$:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)),\ I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)),$$

$$I(\tilde{}\,\Phi) = \tilde{}\,(I(\Phi)),$$

$$I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi)),\ I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)).$$

Інтерпретація мови сигнатури Σ – це $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$; скорочено її позначаємо (A, I). Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ позначимо Φ_J.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ позначимо σ(Γ) множину всіх $p \in Ps$, які входять до складу $\Phi \in \Gamma$; позначимо $nm(\Gamma)$ множину всіх $x \in V$, які фігурують у формулах $\Phi \in \Gamma$.

Для формул мови QLC визначимо множини гарантовано неістотних імен за допомогою відображення $\nu : Fr \to 2^V$ так, як для традиційних логік квазіарних предикатів [3, 5], додаючи пункт $\nu(\tilde{}\,\Phi) = \nu(\Phi)$.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ задаємо

$$\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi \in \Gamma} \nu(\Phi),\ fu(\Gamma) = V_T \setminus nm(\Gamma).$$

Подібним чином, опускаючи пункти для $\exists x$, описуємо мову RLC.

При описі мови PLC опускаємо пункти для $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists x$, а також поняття, пов'язані з неістотністю імен.

Виділення класів предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій, які називають [3, 5] семантиками. Зокрема, це *R*-семантика, *P*-семантика, *T*-семантика.

Клас *T*-предикатів незамкнений щодо $\tilde{}$, тому для LC *T*-семантика *малозмістовна*. Змістовними для LC є *R*-семантика та *P*-семантика, їх позначаємо $\boldsymbol{R_C}$ та $\boldsymbol{P_C}$.

Фіксуючи пропозиційний, реномінативний, чистий першопорядковий рівні розгляду, отримуємо семантики $\boldsymbol{R_{PC}}$ та $\boldsymbol{P_{PC}}$, $\boldsymbol{R_{RC}}$ та $\boldsymbol{P_{RC}}$, $\boldsymbol{R_{QC}}$ та $\boldsymbol{P_{QC}}$.

Властивості композицій LC можна подати із використанням формул мови.

Наведемо для прикладу основні властивості, пов'язані з реномінацією.

R) $\mathrm{R}(\Phi)_J = \Phi_J$;

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$;

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$, де $z \in \nu(\Phi)$;

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_J = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$;

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi)_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_J$;

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_J = R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_J$;

$R\tilde{}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\tilde{}\,\Phi)_J = \tilde{}\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$

$R\tilde{}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\tilde{}\,\Phi)_J = \tilde{}\,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$

Ren) $\exists y(\Phi)_J = \exists z\ R_z^y(\Phi)_J$, де $z \in \nu(\Phi)$;

$R\exists s$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_J = \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_J$,

де $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)_J = \exists z\ R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi)_J$,

де $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$.

2. Відношення логічного наслідку в LC

На множинах формул мови LC можна визначити низку відношень логічного наслідку. Зокрема, на мову LC природним чином поширимо відомі [5] відношення ${}^{P}|\!\!=_{IR}$, ${}^{P}|\!\!=_{T}$, ${}^{P}|\!\!=_{F}$, ${}^{P}|\!\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!\!=_{TF}$. Такі відношення в LC будемо позначати ${}^{Pc}|\!\!=_{IR}$, ${}^{Pc}|\!\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!\!=_{TF}$. При цьому істотні особливості вносить нова композиція предикатного доповнення.

Нехай деяка $\Sigma \subseteq Fr$, нехай $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Далі позначаємо:

$\bigcap_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} \perp(\theta_J)$ як $\perp^{\cup}(\Sigma_J)$.

У випадку, коли $\Sigma = \varnothing$, маємо:

$$T^{\cup}(\Sigma_J) = F^{\cup}(\Sigma_J) = \perp^{\cup}(\Sigma_J) = \varnothing,$$

$T^{\cap}(\Sigma_J) = F^{\cap}(\Sigma_J) = \perp^{\cap}(\Sigma_J) = {}^{V}\!A$.

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$.

Δ є T-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_T \Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_F \Delta$), якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_{TF} \Delta$), якщо

$$\Gamma\ {}_J\!\models_T \Delta \text{ та } \Gamma\ {}_J\!\models_F \Delta.$$

Δ є IR-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_{IR} \Delta$), якщо

$$T^{\cap}(\Gamma_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing.$$

Відповідні відношення логічного τ-наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемою:

$$\Phi\ {}^{\alpha}\!\models_{\tau} \Psi, \text{ якщо } \Phi\ {}_J\!\models_{\tau} \Psi \text{ для кожної } \boldsymbol{J}\in\boldsymbol{\alpha}.$$

Приклад 1. Нехай $\vartheta\in Ps$. Візьмемо $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{R_C}$ таку: $\vartheta_J = \Upsilon$; тоді $T(\vartheta_J)\cap F(\vartheta_J) = {}^{V}\!A$, тому $\vartheta\ {}_J\!\not\models_{IR} \vartheta$, звідки $\vartheta\ {}^{Rc}\!\not\models_{IR} \vartheta$.

Приклад 1 узагальнимо так.

Твердження 5. Нехай формули в Γ та Δ не мають входжень $\sim$, тоді $\Gamma\ {}^{Rc}\!\not\models_{IR} \Delta$.

Справді, візьмемо $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{R_C}$ таку, що $\vartheta_J = \Upsilon$ для кожного $\vartheta\in\sigma(\Gamma\cup\Delta)$, тоді маємо $\Gamma\ {}_J\!\not\models_{IR} \Delta$, звідки $\Gamma\ {}^{Rc}\!\not\models_{IR} \Delta$.

Приклад 2. Для кожних $\Phi\in Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{R_C}$ маємо $F(\sim\!\Phi_J) = \varnothing$, $T(\neg\!\sim\!\Phi_J) = \varnothing$.

Звідси $\Gamma\ {}^{Rc}\!\models_F \sim\!\Phi$, $\neg\!\sim\!\Phi\ {}^{Rc}\!\models_T \Delta$, $\Gamma\ {}^{Rc}\!\models_{IR} \sim\!\Phi$, $\neg\!\sim\!\Phi\ {}^{Rc}\!\models_{IR} \Delta$.

Приклад 3. Для кожних $\Phi\in Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{R_C}$ маємо $T(\Phi_J) \not\subset T(\sim\!\Phi_J) = \perp(\Phi_J)$ та $F(\Phi_J) \not\subset F(\neg\!\sim\!\Phi_J) = \perp(\Phi_J)$.

Звідси $\Phi\ {}^{Pc}\!\not\models_T \sim\!\Phi$ та $\neg\!\sim\!\Phi\ {}^{Pc}\!\not\models_F \Phi$, тому й $\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_T \sim\!\Phi$ та $\neg\!\sim\!\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_F \Phi$.

Таким чином, в LC відношення ${}^{Rc}\!\models_{IR}$, ${}^{Rc}\!\models_T$, ${}^{Rc}\!\models_F$, ${}^{Rc}\!\models_{TF}$ різні, водночас в традиційній логіці квазіарних предикатів маємо ${}^{R}\!\models_{IR} = \varnothing$ та ${}^{R}\!\models_T = {}^{R}\!\models_F = {}^{R}\!\models_{TF}$. При цьому в LC ${}^{R}\!\models_{IR} \neq \varnothing$, проте має дуже вироджений характер: якщо в Γ та Δ немає входжень $\sim$, то $\Gamma\ {}^{Rc}\!\not\models_{IR} \Delta$.

Приклад 4. Нехай $\vartheta, \xi\in Ps$. Візьмемо $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}\in\boldsymbol{R_C}$ такі: $\vartheta_I = \Upsilon$, $\xi_I = \perp$, $\vartheta_J = \perp$, $\xi_J = \Upsilon$; тоді маємо: $\vartheta, \neg\vartheta\ {}_I\!\not\models_T \xi, \neg\xi$ та $\vartheta, \neg\vartheta\ {}_J\!\not\models_F \xi, \neg\xi$.

Звідси маємо: $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_T \Psi, \neg\Psi$; $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_F \Psi, \neg\Psi$; $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_{TF} \Psi, \neg\Psi$. Зокрема: $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_T \Delta$ та $\Gamma\ {}^{Rc}\!\not\models_T \Psi, \neg\Psi$; $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Rc}\!\not\models_F \Delta$ та $\Gamma\ {}^{Rc}\!\not\models_F \Psi, \neg\Psi$.

Приклад 5. Для кожних $\Phi, \Psi\in Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ маємо $\Phi, \neg\Phi\ {}_J\!\models_{TF} \Psi, \neg\Psi$.

Звідси $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Pc}\!\models_{TF} \Psi, \neg\Psi$.

Приклад 6. Для кожних $\Phi, \Psi\in Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ маємо $\Phi, \neg\Phi\ {}_J\!\models_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_J\!\models_F \Psi, \neg\Psi$. Звідси $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Pc}\!\models_T \Delta$ та $\Gamma\ {}^{Pc}\!\models_F \Psi, \neg\Psi$.

Приклад 7. Нехай $\vartheta, \xi\in Ps$. Візьмемо $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ такі: $\vartheta_I = \perp$, $\xi_I = \mathrm{F}$, $\vartheta_J = \mathrm{T}$, $\xi_J = \perp$; тоді $\vartheta, \neg\vartheta\ {}^{Pc}\!\not\models_F \xi$ та $\vartheta\ {}^{Pc}\!\not\models_T \xi, \neg\xi$. Звідси $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Pc}\!\not\models_F \Delta$ та $\Gamma\ {}^{Pc}\!\not\models_T \Psi, \neg\Psi$.

Приклад 8. Для довільних $\Phi, \vartheta\in Fr$ маємо $\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)\ {}^{Pc}\!\models_{IR} \Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)$.

Для кожної $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ маємо:

$$T(\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)_J) = T(\Phi_J),$$

$$F(\Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)_J) = F(\Phi_J).$$

Звідси $T(\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)_J) \cap F(\Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)_J) =$ $= T(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$.

Приклад 9. Маємо

$\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)\ {}^{Pc}\!\not\models_T \Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)$ та

$\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)\ {}^{Pc}\!\not\models_F \Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)$.

Візьмемо $\Phi, \vartheta\in Ps$ та $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{P_C}$ такі: $T(\vartheta_J)\cup F(\vartheta_J) \subset T(\Phi_J)$, $T(\vartheta_J)\cup F(\vartheta_J) \subset F(\Phi_J)$.

Наприклад, $\Phi_J = Ez$, $\vartheta_J = \perp$. Тоді:

$T(\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)_J) = T(\Phi_J)$, $T(\Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)_J) =$ $= T(\Phi_J)\cap(T(\vartheta_J)\cup F(\vartheta_J)) \subset T(\Phi_J)$;

$F(\Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)_J) = F(\Phi_J)$, $F(\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)_J) =$ $= F(\Phi_J)\cap(F(\vartheta_J)\cup T(\vartheta_J)) \subset F(\Phi_J)$. Звідси:

$T(\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)_J) \not\subset T(\Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)_J)$ та

$F(\Phi \vee (\vartheta\&\neg\vartheta)_J) \not\subset F(\Phi \,\&\, (\vartheta\vee\neg\vartheta)_J)$.

Зведемо результати щодо наявності логічного наслідку в таблицю.

Таблиця. Наявність логічного наслідку

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7
$\models_1$	+	+	+	+	+	+	+
$\models_2$	–	+	–	+	+	–	+
$\models_3$	–	–	+	+	+	+	–
$\models_4$	–	–	–	+	+	–	–
$\models_5$	–	–	–	–	–	+	+
$\models_6$	–	–	–	–	+	–	+
$\models_7$	–	–	–	–	+	+	–
$\models_8$	–	–	–	–	+	–	–

Тут введено скорочені позначення:

$\models_1$: ${}^{Pc}\models_{IR}$, $\models_2$: ${}^{Pc}\models_{T}$,

$\models_3$: ${}^{Pc}\models_{F}$, $\models_4$: ${}^{Pc}\models_{TF}$,

$\models_5$: ${}^{Rc}\models_{IR}$, $\models_6$: ${}^{Rc}\models_{T}$,

$\models_7$: ${}^{Rc}\models_{F}$, $\models_8$: ${}^{Rc}\models_{TF}$;

φ_1: $\Phi \vee (\vartheta \& \neg\vartheta) \models \Phi \,\&\, (\vartheta \vee \neg\vartheta)$,

φ_2: $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \models \Delta$,

φ_3: $\Gamma \models \neg\Psi, \Psi, \Delta$,

φ_4: $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \models \neg\Psi, \Psi, \Delta$,

φ_5: $\Phi, \Gamma \models \Phi, \Delta$,

φ_6: $\Gamma, \Phi \models {}^{\sim}\Phi, \Delta$,

φ_7: $\Gamma, \neg{}^{\sim}\Phi \models \Phi, \Delta$.

Теорема 1. Між розглянутими відношеннями логічного наслідку в LC маємо такі співвідношення:

${}^{Rc}\models_{TF} \subset {}^{Rc}\models_{T} \subset {}^{Pc}\models_{T}$; ${}^{Rc}\models_{TF} \subset {}^{Rc}\models_{F} \subset {}^{Pc}\models_{F}$;

${}^{Rc}\models_{TF} \subset {}^{Pc}\models_{TF} \subset {}^{Pc}\models_{F}$; ${}^{Rc}\models_{TF} \subset {}^{Pc}\models_{TF} \subset {}^{Pc}\models_{T}$;

${}^{Pc}\models_{TF} = {}^{Pc}\models_{T} \cap {}^{Pc}\models_{F}$; ${}^{Rc}\models_{TF} = {}^{Rc}\models_{T} \cap {}^{Rc}\models_{F}$;

${}^{Pc}\models_{T} \subset {}^{Pc}\models_{IR}$; ${}^{Pc}\models_{F} \subset {}^{Pc}\models_{IR}$;

${}^{Rc}\models_{IR} \subset {}^{Pc}\models_{IR}$; ${}^{Rc}\models_{IR} \not\subset {}^{Pc}\models_{T}$; ${}^{Rc}\models_{IR} \not\subset {}^{Pc}\models_{F}$;

${}^{Rc}\models_{T} \not\subset {}^{Pc}\models_{F}$ та ${}^{Pc}\models_{F} \not\subset {}^{Rc}\models_{T}$;

${}^{Rc}\models_{F} \not\subset {}^{Pc}\models_{T}$ та ${}^{Pc}\models_{T} \not\subset {}^{Rc}\models_{F}$.

Графічно це можна подати так (тут замість $\subset$ вживаємо стрілку $\to$):

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{Rc}\models_{T} \arrow[r] & {}^{Pc}\models_{T} \arrow[dr] & & \\
{}^{Rc}\models_{TF} \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[dr] & {}^{Pc}\models_{TF} \arrow[ur] \arrow[dr] & & {}^{Pc}\models_{IR} & {}^{Rc}\models_{IR} \arrow[l] \\
 & {}^{Rc}\models_{F} \arrow[r] & {}^{Pc}\models_{F} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Вироджене відношення ${}^{Rc}\models_{IR}$ далі розглядати не будемо.

Надалі, якщо інше не зазначене окремо, будемо вживати такі позначення:

$\models_*$ – одне з відношень ${}^{Pc}\models_{IR}$, ${}^{Pc}\models_{T}$, ${}^{Pc}\models_{F}$, ${}^{Pc}\models_{TF}$, ${}^{Rc}\models_{T}$, ${}^{Rc}\models_{F}$, ${}^{Rc}\models_{TF}$;

${}_J\models_*$ – одне з ${}_J\models_{IR}$, ${}_J\models_{T}$, ${}_J\models_{F}$, ${}_J\models_{TF}$;

${}^{Pc}\models_*$ – одне з ${}^{Pc}\models_{IR}$, ${}^{Pc}\models_{T}$, ${}^{Pc}\models_{F}$, ${}^{Pc}\models_{TF}$;

${}^{Rc}\models_*$ – одне з ${}^{Rc}\models_{T}$, ${}^{Rc}\models_{F}$, ${}^{Rc}\models_{TF}$;

$\models_T$ – одне з ${}^{Pc}\models_{T}$, ${}^{Rc}\models_{T}$;

$\models_F$ – одне з ${}^{Pc}\models_{F}$, ${}^{Rc}\models_{F}$;

$\models_{TF}$ – одне з ${}^{Pc}\models_{TF}$, ${}^{Rc}\models_{TF}$.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності між двома формулами.

Нехай $\Phi, \vartheta \in Fr$. Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ задаємо за схемою: $\Phi\ {}_J{\sim}_*\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J\models_*\ \Psi$ та $\Psi\ {}_J\models_*\ \Phi$.

Особливе значення має відношення ${}_J{\sim}_{TF}$ строгої еквівалентності:

Твердження 6. $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi_J = \Psi_J$, тобто Φ_J та Ψ_J – один і той же предикат.

Справді, $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Задаємо відношення ${}^{Pc}{\sim}_{TF}$ та ${}^{Rc}{\sim}_{TF}$:

$\Phi\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$;

$\Phi\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$.

Згідно $\boldsymbol{P_C} \subset \boldsymbol{R_C}$ для всіх $\Phi, \Psi \in Fr$:

$$\Phi\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Psi \Rightarrow \Phi\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Psi.$$

Водночас (приклад 4) невірно

$$\Phi\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Psi \Rightarrow \Phi\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Psi.$$

Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності. Для LC та LCP вона формулюється так:

Теорема 2. Нехай Ф' отримана з Ф заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$.

Якщо $\Phi_1\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Psi_1,\ ...,\ \Phi_n\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Psi_n$, то $\Phi\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Phi'$;

якщо $\Phi_1\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Psi_1,\ ...,\ \Phi_n\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Psi_n$, то $\Phi\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Phi'$.

Теорема еквівалентності доводиться індукцією за побудовою формули подібно до відповідного доведення в традиційній логіці квазіарних предикатів [3, 4].

Теорема заміни еквівалентних для множин формул формулюється так.

Теорема 3. Нехай $\Phi\ {}^{Rc}{\sim}_{TF}\ \Psi$, тоді:

$$\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_* \Delta;$$

$$\Gamma \models_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_*\!\models \Delta, \Psi.$$

Нехай $\Phi\ {}^{Pc}{\sim}_{TF}\ \Psi$, тоді:

$$\Phi, \Gamma\ {}^{Pc}{\models_*}\ \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma\ {}^{Pc}{\models_*}\ \Delta;$$

$$\Gamma\ {}^{Pc}{\models_*}\ \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{Pc}{\models_*}\!\models \Delta, \Psi.$$

Дослідимо відношення ${}^{Pc}{\models}_{IR}$, ${}^{Pc}{\models}_{T}$, ${}^{Pc}{\models}_{F}$, ${}^{Pc}{\models}_{TF}$, ${}^{Rc}{\models}_{T}$, ${}^{Rc}{\models}_{F}$, ${}^{Rc}{\models}_{TF}$.

Властивості, в яких не фігурує композиція предикатного доповнення, в цілому аналогічні відповідним властивостям [3, 5] відношень ${}^{P}{\models}_{IR}$, ${}^{P}{\models}_{T}$, ${}^{P}{\models}_{F}$, ${}^{P}{\models}_{TF}$ ${}^{R}{\models}_{TF}$.

Властивості монотонності:

M) $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma \Rightarrow (\Gamma \models_* \Delta \Rightarrow \Lambda \models_* \Sigma)$.

Властивості декомпозиції формул:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_* \Delta$.

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \Phi$.

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_R$) $\Gamma \models_* \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models_* \Delta$.

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models_* \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models_* \Delta, \neg\Psi$.

Для ${}^{Pc}{\models}_{IR}$ додатково маємо:

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma\ {}^{Pc}{\models}_{IR}\ \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{Pc}{\models}_{IR}\ \Delta, \Phi$.

$\neg_R$) $\Gamma\ {}^{Pc}{\models}_{IR}\ \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ {}^{Pc}{\models}_{IR}\ \Delta$.

Властивості $\neg_L$ та $\neg_R$ невірні для ${}^{Pc}{\models}_{T}$, ${}^{Pc}{\models}_{F}$, ${}^{Pc}{\models}_{TF}$, ${}^{Rc}{\models}_{T}$, ${}^{Rc}{\models}_{F}$, ${}^{Rc}{\models}_{TF}$.

Новими для відношень в LC є специфічні властивості декомпозиції в яких фігурує ${}^{\sim}\Phi$. Зокрема, стосовно ${}^{Pc}{\models}_{TF}$ та ${}^{Rc}{\models}_{TF}$ така декомпозиція можлива лише окремо для $\models_T$ та для $\models_F$; для ${}^{Pc}{\models}_{IR}$ коректно зробити декомпозицію ${}^{\sim}\Phi$ неможливо.

Теорема 4. Для відношення ${}^{Pc}{\models}_{IR}$ неможливо задати коректним способом умови декомпозиції формул вигляду ${}^{\sim}\Phi$.

Нехай $\Phi, \Psi, \vartheta \in Fr$; $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$.

Маємо ${}^{\sim}\theta, \Phi\ {}_{J}{\models}_{IR}\ \Psi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \perp({}^{\sim}\theta_J) \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{T(\theta_J) \cup F(\theta_J)} \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing.$$

Нехай предикат α утворено за допомогою ∨ та ¬ із деяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Тоді $T(\alpha)$ та $F(\alpha)$ подаються через області істинності й хибності предикатів $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ за допомогою лише ∩ та ∪.

Шукаємо теоретико-множинну функцію $f(X, Y)$, будовану із ∩ та ∪ таку, що за умови $X \cap Y = \varnothing$ маємо $\overline{X \cup Y} \cap L = \varnothing$ $\Leftrightarrow f(X, Y) \cap L = \varnothing$. Має виконуватись умова

$$\overline{T(\theta_J) \cup F(\theta_J)} \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(T(\theta_J), F(\theta_J)) \cap T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing.$$

Проте із X, Y таких, що $X \cap Y = \varnothing$, за допомогою ∩ та ∪ можна отримати лише 4 різних множини: $\varnothing$, X, Y, $X \cup Y$. Тому для $f(T(\theta_J), F(\theta_J))$ маємо лише 4 варіанти: $\varnothing$, $T(\vartheta_J)$, $F(\vartheta_J)$, $T(\vartheta_J) \cup F(\vartheta_J)$. Жоден з них не влаштовує зазначену умову.

Декомпозиція формул необхідна при побудові секвенційного числення, яке формалізує відповідне відношення логічного наслідку. Для ${}^{Pc}{\models}_{IR}$ така декомпозиція вимагає явного виділення області невизначеності, адже умова для $_J|\!\!=_{IR}$ не дає змоги подати область невизначеності через області істинності та хибності за допомогою лише $\cap$ та $\cup$. Явне виділення області невизначеності означає перехід від $^{Pc}|\!\!=_{IR}$ до більш загального відношення $|\!\!=_{IR}^{\perp}$ *неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності*, що зроблено в [10].

Відношення $^{Pc}|\!\!=_{IR}$ далі зазвичай розглядати не будемо.

В подальшому використаємо такі теоретико-множинні співвідношення:

$$A\cap\bar{B}\subseteq L \Leftrightarrow A\subseteq B\cup L \qquad \text{(Set1)}$$

$$A\cap B\subseteq L \Leftrightarrow A\subseteq\bar{B}\cup L \qquad \text{(Set2)}$$

Розглянемо властивості декомпозиції формул $\sim\!\Phi$ для $^{Pc}|\!\!=_T$, $^{Pc}|\!\!=_F$, $^{Rc}|\!\!=_T$, $^{Rc}|\!\!=_F$.

$\sim\!\Phi$ та $\neg\!\sim\!\Phi$ можуть бути в лівій частині та в правій частині відношення типу $|\!\!=_T$ та типу $|\!\!=_F$ – всього 8 комбінацій.

$\sim_{\mathrm{LT}}$) $\sim\!\Phi,\Gamma\,|\!\!=_T\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_T\Delta,\Phi,\neg\Phi$.

Використаємо Set1 та умову $T(\sim\!P)=\overline{T(P)\cup F(P)}=\overline{T(P)\cup T(\neg P)}$.

Маємо $\sim\!\Phi,\Gamma\,|\!\!=_T\Delta \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap T(\sim\!\Phi_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap\overline{T(\Phi_J)\cup T(\neg\Phi_J)}\subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup T(\Phi_J)\cup T(\neg\Phi_J)$ $\Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_T\Delta,\Phi,\neg\Phi$.

$\sim_{\mathrm{RT}}$) $\Gamma\,|\!\!=_T\Delta,\sim\!\Phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi,\Gamma\,|\!\!=_T\Delta$ та $\neg\Phi,\Gamma\,|\!\!=_T\Delta$.

Беремо до уваги Set2 та умову $T(\sim\!P)=\overline{T(P)\cup T(\neg P)}$.

Маємо $\Gamma\,|\!\!=_T\Delta,\sim\!\Phi \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup T(\sim\!\Phi_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup\overline{T(\Phi_J)\cup T(\neg\Phi_J)} \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap(T(\Phi_J)\cup T(\neg\Phi_J))\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$ $\Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap T(\Phi_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$ та $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap T(\neg\Phi_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow \Gamma,\Phi\,|\!\!=_T\Delta$ та $\Gamma,\neg\Phi\,|\!\!=_T\Delta$.

$\neg\!\sim_{\mathrm{RF}}$) $\Gamma\,|\!\!=_F\Delta,\neg\!\sim\!\Phi \Leftrightarrow \Gamma,\Phi,\neg\Phi\,|\!\!=_F\Delta$.

Використаємо Set1 та умову $F(\neg\!\sim\!P)=T(\sim\!P)=\overline{F(P)\cup F(\neg P)}$.

Маємо $\Gamma\,|\!\!=_F^{\perp}\Delta,\neg\!\sim\!\Phi \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $F^{\cap}(\Delta_J)\cap F(\neg\!\sim\!\Phi)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $F^{\cap}(\Delta_J)\cap\overline{F(\Phi_J)\cup F(\neg\Phi_J)}\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$ $\Leftrightarrow$ $F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup F(\Phi_J)\cup F(\neg\Phi_J)$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $\Leftrightarrow \Gamma,\Phi,\neg\Phi\,|\!\!=_F\Delta$.

$\neg\!\sim_{\mathrm{LF}}$) $\neg\!\sim\!\Phi,\Gamma\,|\!\!=_F\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_F\Delta,\Phi$ та $\Gamma\,|\!\!=_F\Delta,\neg\Phi$.

Використаємо Set2 та умову $F(\neg\!\sim\!P)=\overline{F(P)\cup F(\neg P)}$.

Маємо $\neg\!\sim\!\Phi,\Gamma\,|\!\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup F(\neg\!\sim\!\Phi_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup\overline{F(\Phi_J)\cup F(\neg\Phi_J)}$ $\Leftrightarrow F^{\cap}(\Delta_J)\cap(F(\Phi_J)\cup F(\neg\Phi_J))\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $\Leftrightarrow$ $F^{\cap}(\Delta_J)\cap F(\Phi_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$ та $F^{\cap}(\Delta_J)\cap F(\neg\Phi_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma\,|\!\!=_F\Delta,\Phi$ та $\Gamma\,|\!\!=_F\Delta,\neg\Phi$.

Наступні властивості $\neg\!\sim_{\mathrm{El}}$ та $\sim_{\mathrm{El}}$ фактично є властивостями спрощення.

Для $\neg\!\sim_{\mathrm{El}}$ та $\sim_{\mathrm{El}}$ беремо до уваги $T(\neg\!\sim\!P)=F(\sim\!P)=\varnothing$.

$\neg\!\sim_{\mathrm{El}}$) $\Gamma\,|\!\!=_T\Delta,\neg\!\sim\!\Phi \Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_T\Delta$.

Маємо $\Gamma\,|\!\!=_T^{\perp}\Delta,\neg\!\sim\!\Phi \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup T(\neg\!\sim\!\Phi_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $T^{\cap}(\Gamma_J)\cap\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup\varnothing \Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_T\Delta$.

$\sim_{\mathrm{El}}$) $\sim\!\Phi,\Gamma\,|\!\!=_F\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_F\Delta$.

Маємо $\sim\!\Phi,\Gamma\,|\!\!=_F\Delta \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup F(\sim\!\Phi_J) \Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{J}$ $F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup\varnothing \Leftrightarrow \Gamma\,|\!\!=_F\Delta$.

Залишились 2 комбінації, які дають властивості гарантованої наявності відношення логічного наслідку. Для всіх $\boldsymbol{J}\in\boldsymbol{R_C}$ маємо $F(\sim\!\Phi_J)=T(\neg\!\sim\!\Phi_J)=\varnothing$ звідки:

$C\!\sim$) $\Gamma\,|\!\!=_F\sim\!\Phi,\Delta$.

$C\neg\!\sim$) $\Gamma,\neg\!\sim\!\Phi\,|\!\!=_T\Delta$.

Зауважимо, що аналогічна до $C\sim$ властивість для $|\!=_T$ – це властивість $\sim_{LT}$, аналогічна до $C\neg\sim$ властивість для $|\!=_F$ – це властивість $\neg\sim_{LF}$.

На відміну від $_J|\!=_{IR}$, для $_J|\!=_T$ та $_J|\!=_F$ області невизначеності *можна* подати через області істинності та хибності за допомогою лише $\cap$ та $\cup$, тобто *можна* елімінувати області невизначеності. Це засвідчують $\sim_{LT}$, $\sim_{RT}$, $\neg\sim_{RF}$, $\neg\sim_{LF}$, $\neg\sim_{El}$, $\sim_{El}$.

Для відношень $^{Rc}|\!=_{TF}$ та $^{Pc}|\!=_{TF}$ ситуація дещо інша. Це зумовлено асиметричною поведінкою композиції $\sim$ щодо областей істинності й хибності. Для відношень типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$ маємо різні властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$, які не можна подати як спільну властивість для відношень типу $|\!=_{TF}$. Для них маємо:

$\sim\Phi, \Gamma \,|\!=_{TF} \Delta \;\Leftrightarrow\; \sim\Phi, \Gamma \,|\!=_T \Delta$ та $\sim\Phi, \Gamma \,|\!=_F \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_T \Delta, \Phi, \neg\Phi$ та $\Gamma \,|\!=_F \Delta$.

$\Gamma \,|\!=_{TF} \Delta, \neg\sim\Phi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_T \Delta, \neg\sim\Phi$ та $\Gamma \,|\!=_F \Delta, \neg\sim\Phi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_T \Delta$ та $\Gamma, \Phi, \neg\Phi \,|\!=_F \Delta$.

$\Gamma \,|\!=_{TF} \Delta, \sim\Phi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_T \Delta, \sim\Phi$ та $\Gamma \,|\!=_F \Delta, \sim\Phi \;\Leftrightarrow\; \Phi, \Gamma \,|\!=_T \Delta$ та $\neg\Phi, \Gamma \,|\!=_T \Delta$.

$\neg\sim\Phi, \Gamma \,|\!=_{TF} \Delta \;\Leftrightarrow\; \neg\sim\Phi, \Gamma \,|\!=_T \Delta$ та $\neg\sim\Phi, \Gamma \,|\!=_F \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_F \Delta, \Phi$ та $\Gamma \,|\!=_F \Delta, \neg\Phi$.

Тому при побудові секвенційних числень, які формалізують $^{Rc}|\!=_{TF}$ та $^{Pc}|\!=_{TF}$, опираємось на базові визначення:

$$\Gamma \,^{Rc}|\!=_{TF} \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,^{Rc}|\!=_T \Delta \text{ та } \Gamma \,^{Rc}|\!=_F \Delta;$$

$$\Gamma \,^{Pc}|\!=_{TF} \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,^{Pc}|\!=_T \Delta \text{ та } \Gamma \,^{Pc}|\!=_F \Delta.$$

Таким чином, секвенційне числення для відношення $|\!=_{TF}$ має бути поєднанням числень для відношень $\Gamma \,|\!=_T \Delta$ та $\Gamma \,|\!=_F \Delta$: для встановлення $\Gamma \,|\!=_{TF} \Delta$ будуємо два виведення, перше виведення встановлює $\Gamma \,|\!=_T \Delta$, а друге – $\Gamma \,|\!=_F \Delta$.

Розглянемо властивості, які гарантують наявність відношення логічного наслідку. Для усіх розглянутих відношень логічного наслідку маємо властивість:

C) $\Phi, \Gamma \,|\!=_* \Delta, \Phi$.

Для $^{Pc}|\!=_{IR}$ C випливає з того, що $T(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$.

Для інших відношень використовуємо співвідношення $T(\Phi_J) \cap \mathrm{L} \subseteq T(\Phi_J) \cup \mathrm{M}$ та $F(\Phi_J) \cap \mathrm{L} \subseteq F(\Phi_J) \cup \mathrm{M}$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення такі властивості.

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \,^{Pc}|\!=_T \Delta$.

Випливає з того, що для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$ $T(\Phi_J) \cap T(\neg\Phi_J) = T(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = \varnothing$.

CR) $\Gamma \,^{Pc}|\!=_F \Delta, \Phi, \neg\Phi$.

Випливає з того, що для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$ $F(\Phi_J) \cap F(\neg\Phi_J) = F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) = \varnothing$.

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \,^{Pc}|\!=_{TF} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Справді, для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$ маємо $F(\Phi_J) \cap F(\neg\Phi_J) = F(\Psi_J) \cap F(\neg\Psi_J) = \varnothing$.

Маємо властивості гарантованої наявності відношення логічного наслідку:

– C, CL, $C\neg\sim$ для $^{Pc}|\!=_T$;

– C, CR, $C\sim$ для $^{Pc}|\!=_F$;

– C, CLR для $^{Pc}|\!=_{TF}$;

– C, $C\neg\sim$ для $^{Rc}|\!=_T$;

– C, $C\sim$ для $^{Rc}|\!=_F$;

– C для $^{Rc}|\!=_{TF}$.

Описані властивості засвідчують істотну відмінність LC від традиційної логіки квазіарних предикатів. Зокрема, $^R|\!=_T$, $^R|\!=_F$, $^R|\!=_{TF}$ – це єдине відношення, а в LC маємо *різні* відношення $^{Rc}|\!=_T$, $^{Rc}|\!=_F$, $^R|\!=_{TF}$. В LC відношення $^{Pc}|\!=_{IR}$ є некоректним.

Розглянемо пов'язані з реномінацією властивості еквівалентних перетворень для відношень логічного наслідку в LC. Їх доведення базується на теоремі 3. Кожна з наведених вище властивостей R, RI, RU, RR, $R\neg$, $R\vee$, $R\sim$, $R\exists$, $R\exists s$ продукує 4 відповідні властивості для відношень $^{Pc}|\!=_T$, $^{Pc}|\!=_F$, $^{Rc}|\!=_T$, $^{Rc}|\!=_F$, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення. Ці властивості формулюються однотипно.

Наведемо тут властивості, індуковані $R\sim$, інші властивості формулюються аналогічно відповідним властивостям [5] для ${}^{P}|\!=_T$, ${}^{P}|\!=_F$, ${}^{R}|\!=_{TF}$.

Нехай $\Phi\in Fr$; $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$; нехай $|\!=_*$ – одне з ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$.

R~$_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi), \Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!=_* \Delta$.

R~$_R$) $\Gamma \,|\!=_* \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi) \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_* \Delta, \sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

¬R~$_L$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi), \Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \neg\sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \,|\!=_* \Delta$.

¬R~$_R$) $\Gamma \,|\!=_* \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi) \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_* \Delta, \neg\sim R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

Для відношень типу $|\!=_{TF}$ властивості еквівалентних перетворень теж вірні, проте їх задаємо *опосередковано*, через відповідні властивості для відношень типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$. При цьому враховуємо:

$\Gamma \,|\!=_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \,|\!=_T \Delta$ та $\Gamma \,|\!=_F \Delta$.

Властивості елімінації кванторів, E-розподілу та первісного означення для відношень ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_F$ формулюються та доводяться аналогічно відповідним властивостям [5] для відношень ${}^{P}|\!=_T$, ${}^{P}|\!=_F$, ${}^{R}|\!=_{TF}$.

Теорема 5. Нехай $\Phi\in Fr$; $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$; тоді:

∃$_L$) за умови $z\in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ маємо $\exists x\Phi, \Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \,|\!=_* \Delta$;

∃R$_L$) за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), Ez, \Gamma \,|\!=_* \Delta$;

¬∃$_R$) за умови $z\in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$ маємо $\Gamma \,|\!=_* \neg\exists x\Phi, \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma, Ez \,|\!=_* \neg R_z^x(\Phi), \Delta$

¬∃R$_R$) за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$ $\Gamma \,|\!=_* \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma, Ez \,|\!=_* \neg R_{\bar{v},z}^{\bar{u},x}(\Phi), \Delta$

∃v$_R$) $\Gamma, Ey \,|\!=_* \exists x\Phi, \Delta \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \Gamma, Ey \,|\!=_* \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$.

∃Rv$_R$) $\Gamma, Ey \,|\!=_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \Gamma, Ey \,|\!=_* \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)$.

¬∃v$_L$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \,|\!=_* \Delta$.

¬∃Rv$_L$) $\neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), Ey, \Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\; \neg R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \neg R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi), Ey, \Gamma \,|\!=_* \Delta$.

Теорема 6. Для $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$ маємо:

Ed) $\Gamma \,|\!=_* \Delta \;\Leftrightarrow\; \Gamma \,|\!=_* \Delta, Ey$ та $Ey, \Gamma \,|\!=_* \Delta$.

Ev) $\Gamma \,|\!=_* \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \,|\!=_* \Delta$, де $z\in fu(\Gamma, \Delta)$.

3. Відношення логічного наслідку за умов невизначеності

Наявність в LC нової композиції предикатного доповнення мотивує до розгляду нових відношень логічного наслідку, які враховують особливості цієї композиції. Такими є відношення *логічного наслідку за умови невизначеності*.

Узагальненням відношення ${}^{P}|\!=_{IR}$ є досліджене в [10] відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ неспростовнісного логічного наслідку за умов невизначеності. Нехай $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$.

Δ є неспростовнісним наслідком Γ за умов невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\,{}_J|\!=_{IR}^{\perp}\Delta$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є неспростовнісним логічним наслідком Γ за умов невизначеності U, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma \,|\!=_{IR}^{\perp}\Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\,{}_J|\!=_{IR}^{\perp}\Delta$ для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}\in \boldsymbol{P_C}$.

Якщо $\mathrm{U} = \varnothing$, то отримуємо визначення відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$.

Подібне вироджене відношення ${}^{R}|\!=_{IR}^{\perp}$, яке відповідає виродженому відношенню ${}^{Rc}|\!=_{IR}$, тут розглядати не будемо.

Узагальненнями відомих [3, 5] відношень типу $|\!=_T$, $|\!=_F$ та $|\!=_{TF}$ для традиційних логік квазіарних предикатів є пропоновані в цій роботі відношення істиннісного хибнісного та строгого логічного наслідку за умов невизначеності. Ми вводимо:

– відношення ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$ логічного T-наслідку в LPC за умов невизначеності;

– відношення ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$ логічного F-наслідку в LPC за умов невизначеності;

– відношення ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$ логічного TF-наслідку в LPC за умов невизначеності;

– відношення ${}^{R}|\!=_{T}^{\perp}$ логічного T-наслідку в LC за умов невизначеності;

– відношення ${}^{R}|\!=_{F}^{\perp}$ логічного F-наслідку в LC за умов невизначеності;

– відношення ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$ логічного FT-наслідку в LC за умов невизначеності.

Неформально те, що Δ є T-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, має означати: "для кожного $d \in {}^{V}\!A$ якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$, то $(d \in T^{\cap}(\Gamma_J) \Rightarrow d \in T^{\cup}(\Delta_J))$". Це рівносильне наступному:

"для кожного $d \in {}^{V}\!A$ якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$ та $d \in T^{\cap}(\Gamma_J)$ то $d \in T^{\cup}(\Delta_J)$".

Те, що Δ є F-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, має означати: "для кожного $d \in {}^{V}\!A$ якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$, то $(d \in F^{\cap}(\Delta_J) \Rightarrow d \in F^{\cup}(\Gamma_J))$".

Це рівносильне: "для кожного $d \in {}^{V}\!A$ якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$ та $d \in F^{\cap}(\Delta_J)$ то $d \in F^{\cup}(\Gamma_J)$".

Те, що Δ є TF-наслідком Γ за умов невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, має означати: "для кожного $d \in {}^{V}\!A$ якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$, то $(d \in T^{\cap}(\Gamma_J) \Rightarrow d \in T^{\cup}(\Delta_J))$ та $(d \in F^{\cap}\Delta_J) \Rightarrow d \in F^{\cup}(\Gamma_J))$".

Це рівносильне: "для кожного $d \in {}^{V}\!A$ якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$ та $d \in T^{\cap}(\Gamma_J)$ то $d \in T^{\cup}(\Delta_J)$ та якщо $d \in \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)$ та $d \in F^{\cap}(\Delta_J)$ то $d \in F^{\cup}(\Gamma_J)$)".

Приходимо до наступних визначень.

Δ є T-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Це позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$.

Δ є F-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Це позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$.

Δ є TF-наслідком Γ за умови невизначеності U при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$.

Це позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta$.

Якщо $\mathrm{U} = \varnothing$, то маємо визначення відношень $\Gamma\ {}_{J}|\!=_{T} \Delta$, $\Gamma\ {}_{J}|\!=_{F} \Delta$, $\Gamma\ {}_{J}|\!=_{TF} \Delta$ в LC.

Далі визначаємо традиційно.

Δ є логічним T-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{P_C}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$.

Δ є логічним F-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{P_C}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$.

Δ є логічним TF-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{P_C}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$.

Δ є логічним T-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{R_C}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$.

Δ є логічним F-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{R_C}$, що позначимо $\Gamma\ {}^{R}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$.

Δ є логічним TF-наслідком Γ за умови невизначеності U в семантиці $\boldsymbol{R_C}$, що позначимо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta$, якщо $\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{R_C}$.

Якщо $\mathrm{U} = \varnothing$, то маємо визначення ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$.

Твердження 7. $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$;

$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|\!=_{TF}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|\!=_{T}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|\!=_{F}^{\perp} \Delta$.

Твердження 8. Для $\mathrm{S} \subseteq Fr$ та $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$ $T^{\cup}(\mathrm{S}_J) \cap F^{\cap}(\mathrm{S}_J) = \varnothing$ та $F^{\cup}(\mathrm{S}_J) \cap T^{\cap}(\mathrm{S}_J) = \varnothing$.

Звідси як наслідок отримуємо

Твердження 9. Для довільних $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$ та $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$ маємо:

$\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{T}^{\perp} \Delta \Rightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{IR}^{\perp} \Delta$;

$\mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{F}^{\perp} \Delta \Rightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ {}_{J}|\!=_{IR}^{\perp} \Delta$.

Справді, згідно твердження 8:

$$T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing;$$
$$F^{\cap}(\Delta_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing.$$

Твердження 10. Беручи до уваги приклади 4–7, маємо наступні властивості:

1) $\mathrm{U}/\Gamma \mid=_{IR}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$ та $\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi \mid=_{IR}^{\perp} \Delta$;

2) $\Gamma\ {}^{Pc}|\neq_{T} \Psi, \neg\Psi$ та $\Phi, \neg\Phi\ {}^{Pc}|\neq_{F} \Delta$, тому
$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|\neq_{T}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$ та $\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{P}|\neq_{F}^{\perp} \Delta$;

3) $\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{P}|=_{T}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$ та
$\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{P}|=_{F}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$, тому
$\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{P}|=_{TF}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$;

4) $\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{R}|\neq_{T} \Psi, \neg\Psi$;
$\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{R}|\neq_{F}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$;
$\mathrm{U}/\Phi, \neg\Phi\ {}^{R}|\neq_{TF}^{\perp} \Psi, \neg\Psi$.

Теорема 7. Маємо співвідношення:

${}^{R}|=_{TF}^{\perp} \subset {}^{R}|=_{T}^{\perp} \subset {}^{P}|=_{T}^{\perp}$;

${}^{R}|=_{TF}^{\perp} \subset {}^{R}|=_{F}^{\perp} \subset {}^{P}|=_{F}^{\perp}$;

${}^{R}|=_{TF}^{\perp} \subset {}^{P}|=_{TF}^{\perp} \subset {}^{P}|=_{F}^{\perp}$;

${}^{R}|=_{TF}^{\perp} \subset {}^{P}|=_{TF}^{\perp} \subset {}^{P}|=_{T}^{\perp}$;

${}^{P}|=_{T}^{\perp} \subset |=_{IR}^{\perp}$; ${}^{P}|=_{F}^{\perp} \subset |=_{IR}^{\perp}$;

${}^{R}|=_{T}^{\perp} \not\subset {}^{P}|=_{F}^{\perp}$ та ${}^{P}|=_{F}^{\perp} \not\subset {}^{R}|=_{T}^{\perp}$;

${}^{R}|=_{F}^{\perp} \not\subset {}^{P}|=_{T}^{\perp}$ та ${}^{P}|=_{T}^{\perp} \not\subset {}^{R}|=_{F}^{\perp}$.

Графічно це можна подати так (тут замість $\subset$ вживаємо стрілку $\rightarrow$):

$$\begin{tikzcd}
& {}^{R}|=_{T}^{\perp} \arrow[rr] && {}^{P}|=_{T}^{\perp} \arrow[dr] & \\
{}^{R}|=_{TF}^{\perp} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr] && {}^{P}|=_{TF}^{\perp} \arrow[ur] \arrow[dr] && |=_{IR}^{\perp} \\
& {}^{R}|=_{F}^{\perp} \arrow[rr] && {}^{P}|=_{F}^{\perp} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Таким чином, співвідношення між відношеннями $|=_{IR}^{\perp}$, ${}^{P}|=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|=_{F}^{\perp}$, ${}^{P}|=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{F}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{TF}^{\perp}$ ідентичні співвідношенням між відношеннями ${}^{Pc}|=_{IR}$, ${}^{Pc}|=_{T}$, ${}^{Pc}|=_{F}$, ${}^{Pc}|=_{TF}$, ${}^{Rc}|=_{T}$, ${}^{Rc}|=_{F}$, ${}^{Rc}|=_{TF}$.

Сформулюємо теорему заміни еквівалентних для відношень $|=_{T}^{\perp}$, $|=_{F}^{\perp}$, $|=_{TF}^{\perp}$.

Теорема 8. 1) Нехай $\Phi\ {}^{P}\!\sim_{TF} \Psi$, тоді маємо (${}^{P}|=_{*}$ – це ${}^{P}|=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|=_{F}^{\perp}$ чи ${}^{P}|=_{TF}^{\perp}$):

$$\mathrm{U}/\Phi, \Gamma\ {}^{P}|=_{*} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Psi, \Gamma\ {}^{P}|=_{*} \Delta;$$
$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|=_{*} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ {}^{P}|=_{*} \Delta, \Psi;$$
$$\mathrm{U}, \Phi/\Gamma\ {}^{P}|=_{*} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}, \Psi/\Gamma\ {}^{P}|=_{*} \Delta.$$

2) Нехай $\Phi\ {}^{R}\!\sim_{TF} \Psi$, тоді маємо (${}^{R}|=_{*}$ – це ${}^{R}|=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{F}^{\perp}$ чи ${}^{R}|=_{TF}^{\perp}$):

$$\mathrm{U}/\Phi, \Gamma\ {}^{R}|=_{*} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Psi, \Gamma\ {}^{R}|=_{*} \Delta;$$
$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|=_{*} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ {}^{R}|=_{*} \Delta, \Psi;$$
$$\mathrm{U}, \Phi/\Gamma\ {}^{R}|=_{*} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}, \Psi/\Gamma\ {}^{R}|=_{*} \Delta.$$

Дослідимо властивості відношень ${}^{P}|=_{T}^{\perp}$, ${}^{P}|=_{F}^{\perp}$, ${}^{P}|=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{T}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{F}^{\perp}$, ${}^{R}|=_{TF}^{\perp}$.

Особливості цих відношень проявляються вже на пропозиційному рівні, тому в першу чергу розглядаємо властивості пропозиційного рівня.

Для множини формул $\Sigma \subseteq Fr$ використаємо позначення ${}^{\neg}\Sigma = \{\neg\Phi \mid \Phi \in \Sigma\}$.

Позначимо $\bigcap\limits_{\theta\in\Sigma} T(\neg\theta_J)$ як $T^{\cap}({}^{\neg}\Sigma_J)$, $\bigcap\limits_{\theta\in\Sigma} F(\neg\theta_J)$ як $F^{\cap}({}^{\neg}\Sigma_J)$, $\bigcap\limits_{\theta\in\Sigma} \perp(\neg\theta_J)$ як $\perp^{\cap}({}^{\neg}\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta\in\Sigma} T(\neg\theta_J)$ як $T^{\cup}({}^{\neg}\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta\in\Sigma} F(\neg\theta_J)$ як $F^{\cup}({}^{\neg}\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\theta\in\Sigma} \perp(\neg\theta_J)$ як $\perp^{\cup}({}^{\neg}\Sigma_J)$.

Маємо $\perp(S) = \overline{T(S)} \cap \overline{F(S)}$. Звідси

$$\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) = \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} \perp(\theta_J) = \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} (\overline{T(\theta_J)} \cap \overline{F(\theta_J)}) =$$
$$= \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} \overline{T(\theta_J)} \cap \bigcap_{\theta\in\mathrm{U}} \overline{F(\theta_J)} = \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)}.$$

Таким чином, для R-предикатів:

$$\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) = \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} T(\neg\theta_J)} =$$
$$= \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup_{\theta\in\mathrm{U}} F(\neg\theta_J)}.$$

Звідси визначальне твердження:

Теорема 9. Відношення ${}_J|\!=_T^{\perp}$ можна звести до ${}_J|\!=_T$; відношення ${}_J|\!=_F^{\perp}$ можна звести до ${}_J|\!=_F$.

Для довільних $\Gamma, \mathrm{U}, \Delta \subseteq Fr$ та $\boldsymbol{J}$ маємо (тут $\Leftrightarrow_{\mathrm{S}}$ означає "$\Leftrightarrow$ згідно Set1"):

$\mathrm{U}/\Gamma\ {}_J|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow T^{\cap}(\Gamma_J)\cap\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow$

$T^{\cap}(\Gamma_J)\cap \overline{\bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} T(\neg\theta_J)} \subseteq T^{\cup}(\Delta_J) \Leftrightarrow_{\mathrm{S}}$

$T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup \bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} T(\theta_J)\cup \bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} T(\neg\theta_J) \Leftrightarrow$

$T^{\cap}(\Gamma_J)\subseteq T^{\cup}(\Delta_J)\cup T^{\cup}(\mathrm{U}_J)\cup T^{\cup}(\neg\mathrm{U}_J) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\ {}_J|\!=_T \Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$

$\mathrm{U}/\Gamma_J|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow F^{\cap}(\Delta_J)\cap\perp^{\cap}(\mathrm{U}_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J) \Leftrightarrow$

$F^{\cap}(\Delta_J)\cap \overline{\bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)} \cap \overline{\bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} F(\neg\theta_J)} \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J) \Leftrightarrow_{\mathrm{S}}$

$F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup \bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} F(\theta_J)\cup \bigcup\limits_{\theta\in\mathrm{U}} F(\neg\theta_J) \Leftrightarrow$

$F^{\cap}(\Delta_J)\subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)\cup F^{\cup}(\mathrm{U}_J)\cup F^{\cup}(\neg\mathrm{U}_J) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}_J|\!=_F \Delta.$

Подібним способом отримуємо загальніші твердження:

$$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}_J|\!=_T^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Gamma\ {}_J|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$$

$$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}_J|\!=_F^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}_J|\!=_F^{\perp}\Delta.$$

Ми отримали фундаментальну теорему про елімінацію умов невизначеності:

Теорема 10.

$$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_T^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Gamma\ {}^P|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$$

$$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_T^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Gamma\ {}^R|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$$

$$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_F^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^P|\!=_F^{\perp}\Delta;$$

$$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_F^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^R|\!=_F^{\perp}\Delta.$$

Як наслідок отримуємо: відношення ${}^P|\!=_T^{\perp}$, ${}^P|\!=_F^{\perp}$, ${}^R|\!=_T^{\perp}$, ${}^R|\!=_F^{\perp}$ можна цілком звести до відношень ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$.

Наслідок 1.

$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_T^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$$

$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_T^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma\ {}^{Rc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$$

$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_F^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^{Pc}|\!=_F\Delta;$$

$$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_F^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^{Rc}|\!=_F\Delta.$$

Теорема 10 дає змогу сформулювати властивості елімінації умов невизначеності у відношеннях ${}^P|\!=_T^{\perp}$, ${}^P|\!=_F^{\perp}$, ${}^R|\!=_T^{\perp}$, ${}^R|\!=_F^{\perp}$:

ElU$_{\mathrm{T}}$) $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\ {}^P|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$

$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma\ {}^R|\!=_T^{\perp}\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U};$

ElU$_{\mathrm{F}}$) $\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^P|\!=_F^{\perp}\Delta;$

$\mathrm{W}, \mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{W}/\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^R|\!=_F^{\perp}\Delta.$

Таким чином, від відношень ${}^P|\!=_T^{\perp}$, ${}^P|\!=_F^{\perp}$, ${}^R|\!=_T^{\perp}$, ${}^R|\!=_F^{\perp}$ можна перейти до відношень ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$.

Дещо складніша ситуація із відношеннями ${}^P|\!=_{TF}^{\perp}$ та ${}^R|\!=_{TF}^{\perp}$. Маємо:

$\mathrm{U}/\Gamma\ |\!=_{TF}^{\perp}\Delta \ \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\ |\!=_T^{\perp}\Delta$ та $\Gamma\ |\!=_F\Delta\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \Gamma\ |\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$ та $\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ |\!=_F^{\perp}\Delta.$

Звідси:

Наслідок 2. $\mathrm{U}/\Gamma\ {}^P|\!=_{TF}^{\perp}\Delta\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$ та $\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^{Pc}|\!=_F^{\perp}\Delta.$

$\mathrm{U}/\Gamma\ {}^R|\!=_{TF}^{\perp}\Delta\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ \Gamma\ {}^{Rc}|\!=_T\Delta, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}$ та $\Gamma, \mathrm{U}, \neg\mathrm{U}\ {}^{Rc}|\!=_F^{\perp}\Delta.$

Отже, відношення типу $|\!=_{TF}^{\perp}$ можна звести лише до сукупності відношень типу $|\!=_T$ та типу $|\!=_F$, а не до єдиного відношення типу $|\!=_{TF}$. Те ж саме було для ${}^{Pc}|\!=_{TF}$ та ${}^{Rc}|\!=_{TF}$: проведення декомпозиції формул вимагає подання ${}^{Rc}|\!=_{TF}$ через ${}^{Rc}|\!=_T$ та ${}^{Rc}|\!=_F$, а ${}^{Pc}|\!=_{TF}$ – через ${}^{Pc}|\!=_T$ та ${}^{Pc}|\!=_F$.

Підсумовуючи, отримуємо:

Теорема 11. Відношення ${}^P|\!=_T^{\perp}$, ${}^P|\!=_F^{\perp}$, ${}^R|\!=_T^{\perp}$, ${}^R|\!=_F^{\perp}$ та ${}^P|\!=_{TF}^{\perp}$, ${}^R|\!=_{TF}^{\perp}$ можна промоделювати за допомогою ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$, усунувши умови невизначеності.

Водночас для відношення $|\!=_{IR}^{\perp}$ *неможливо* таким способом усунути умови невизначеності і тим самим промоделювати $|\!=_{IR}^{\perp}$ за допомогою ${}^{Pc}|\!=_{IR}$. Це фактично вже випливає з теореми 4: для відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ неможливо задати коректним способом умови декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$. Доведення неможливості моделювання $|\!=_{IR}^{\perp}$ за допомогою ${}^{Pc}|\!=_{IR}$ подібне до доведення теореми 4:

Нехай $\Phi, \Psi, \vartheta \in Fr$; $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{P_C}$. Маємо $\vartheta / \Phi\ _J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) \cap \perp(\vartheta_J) = \varnothing$ $\Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) \cap \overline{T(\theta_J) \cup F(\theta_J)} = \varnothing$

Нехай предикат α утворено за допомогою $\vee$ та $\neg$ із деяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Тоді $T(\alpha)$ та $F(\alpha)$ подаються через області істинності й хибності предикатів $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ за допомогою лише $\cap$ та $\cup$. Проте із множин X, Y таких, що $X \cap Y = \varnothing$, за допомогою $\cap$ та $\cup$ можна отримати лише 4 різних множини: $\varnothing$, X, Y, $X \cup Y$. Нехай $f(X, Y)$ – будована із $\cap$ та $\cup$ така теоретико-множинна функція, що за умови $X \cap Y = \varnothing$ маємо $L \cap \overline{X \cup Y} = \varnothing \Leftrightarrow L \cap f(X, Y) = \varnothing$. Має виконуватись наступна умова: $\vartheta / \Phi\ _J|\!=_{IR}{}^{\perp} \Psi$ $\Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) \cap \overline{T(\theta_J) \cup F(\theta_J)} = \varnothing \Leftrightarrow$ $T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) \cap f(T(\theta_J), F(\theta_J)) = \varnothing$. Проте для $f(T(\vartheta_J), F(\vartheta_J))$ маємо лише 4 варіанти: $\varnothing$, $T(\vartheta_J)$, $F(\vartheta_J)$, $T(\vartheta_J) \cup F(\vartheta_J)$. Жоден з них не влаштовує нашу умову. Таким чином:

Теорема 12. В LC відношення $|\!=_{IR}{}^{\perp}$ не можна звести до відношення ${}^{Pc}|\!=_{IR}$.

Укажемо основні властивості відношень ${}^{P}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}{}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{TF}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}{}^{\perp}$. Надалі, якщо інше не зазначене окремо:

$|\!=_{*}{}^{\perp}$ – одне з ${}^{P}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}{}^{\perp}$;

$|\!=_{T}{}^{\perp}$ – одне з ${}^{P}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}{}^{\perp}$;

$|\!=_{F}{}^{\perp}$ – одне з ${}^{P}|\!=_{F}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}{}^{\perp}$;

$|\!=_{TF}{}^{\perp}$ – одне з ${}^{P}|\!=_{TF}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}{}^{\perp}$.

Із визначень отримуємо властивості монотонності M:

M) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$, $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{W}$, та $\Delta \subseteq \Sigma$; тоді $\mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta \Rightarrow \mathrm{W} / \Lambda\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Sigma$.

Маємо такі властивості гарантованої наявності логічного наслідку.

C) $\mathrm{U} / \Phi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \Phi$.

$C\neg^{\sim}$) $\mathrm{U} / \neg^{\sim}\Phi, \Gamma\ |\!=_{T}{}^{\perp} \Delta$.

$C^{\sim}$) $\mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{F}{}^{\perp} \Delta, {}^{\sim}\Phi$.

Властивість C випливає з того що $T(\Phi_J) \cap \mathrm{L} \subseteq T(\Phi_J) \cup \mathrm{M}$, $F(\Phi_J) \cap \mathrm{L} \subseteq F(\Phi_J) \cup \mathrm{M}$.

В силу $T(\neg^{\sim}\Phi\ _J) = F({}^{\sim}\Phi\ _J) = \varnothing$ умова $T(\neg^{\sim}\Phi\ _J) \cap T^{\cap}(\Gamma_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$ гарантована, звідки випливає $C\neg^{\sim}$.

Властивість $C^{\sim}$ випливає з того, що $F({}^{\sim}\Phi_J) = \varnothing$, звідки маємо гарантоване $F^{\cap}(\Delta_J) \cap \perp^{\cap}(\mathrm{U}_J) \cap F({}^{\sim}\Phi_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Додатково гарантують наявність відповідного відношення такі властивості.

CL) $\mathrm{U} / \Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{P}|\!=_{T}{}^{\perp} \Delta$; це рівносильне такому: $\Phi, \neg\Phi, \Gamma\ {}^{Pc}|\!=_{T} \Delta, \mathrm{U}, {}^{\neg}\mathrm{U}$;

CR) $\mathrm{U} / \Gamma\ {}^{P}|\!=_{F}{}^{\perp} \Delta, \Phi, \neg\Phi$; це рівносильне такому: $\Gamma, \mathrm{U}, {}^{\neg}\mathrm{U}\ {}^{Pc}|\!=_{F} \Delta, \Phi, \neg\Phi$.

Властивості C, $C^{\sim}$, $C\neg^{\sim}$, CL, CR вже були сформульовані для відношень логічного наслідку в LC, тут вони узагальнені для відношень логічного наслідку за умов невизначеності.

Властивості декомпозиції логічних зв'язок аналогічні відповідним властивостям для відношень ${}^{P}|\!=_{T}$, ${}^{P}|\!=_{F}$, ${}^{P}|\!=_{TF}$, ${}^{R}|\!=_{TF}$ традиційної логіки квазіарних предикатів та наведеним вище відповідним властивостям для ${}^{Pc}|\!=_{T}$, ${}^{Pc}|\!=_{F}$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_{T}$, ${}^{Rc}|\!=_{F}$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$; вони виконуються для усіх відношень ${}^{P}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{F}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{T}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{F}{}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{TF}{}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}{}^{\perp}$.

$\neg\neg_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \neg\neg\Phi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow \mathrm{U} / \Phi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta$.

$\neg\neg_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \Phi$.

$\vee_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \Phi\vee\Psi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U} / \Phi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta$ та $\mathrm{U} / \Psi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta$.

$\vee_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U} / \neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U} / \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta$.

$\neg\vee_{\mathrm{R}}$) $\mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \neg\Phi$ та $\mathrm{U} / \Gamma\ |\!=_{*}{}^{\perp} \Delta, \neg\Psi$.

Для $|\!=_{IR}{}^{\perp}$ додатково маємо [10] властивості $\neg_{\mathrm{L}}$ та $\neg_{\mathrm{R}}$. Ці властивості невірні для ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Pc}|\!=_{TF}$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_{TF}$ та для ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$.

Для ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$ властивості декомпозиції, в яких фігурує $\sim\Phi$, аналогічні наведеним вище відповідним властивостям для ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$.

$\sim_{\mathrm{LT}}$) $\mathrm{U}/\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta,\Phi,\neg\Phi$;

$\sim_{\mathrm{RT}}$) $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta,\sim\Phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U}/\Phi,\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta$ та $\mathrm{U}/\neg\Phi,\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta$;

$\neg\sim_{\mathrm{RF}}$) $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta,\neg\sim\Phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma,\Phi,\neg\Phi\,|\!=_F^{\perp}\Delta$;

$\neg\sim_{\mathrm{LF}}$) $\mathrm{U}/\neg\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta,\Phi$ та $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta,\neg\Phi$;

$\neg\sim_{\mathrm{El}}$) $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta,\neg\sim\Phi \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta$;

$\sim_{\mathrm{El}}$) $\mathrm{U}/\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta$.

Властивості $\neg\sim_{\mathrm{El}}$ та $\sim_{\mathrm{El}}$ – це властивості спрощення, елімінації $\sim$.

Доведення цих властивостей зводиться до елімінації умов невизначеності згідно теореми 10, застосування одноіменних властивостей для відношень логічного наслідку в LC та застосування теореми 10 в зворотному порядку. Наведемо для прикладу доведення $\sim_{\mathrm{LT}}$ та $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$.

Маємо $\mathrm{U}/\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta \Leftrightarrow$ (теорема 10) $\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_T\Delta,\mathrm{U},\urcorner\mathrm{U} \Leftrightarrow$ ($\sim_{\mathrm{LT}}$ в LC) $\Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_T\Delta,\mathrm{U},\urcorner\mathrm{U},\Phi,\neg\Phi \Leftrightarrow$ (теорема 10) $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta,\Phi,\neg\Phi$.

Маємо $\mathrm{U}/\neg\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta \Leftrightarrow$ (теорема 10) $\neg\sim\Phi,\Gamma,\mathrm{U},\urcorner\mathrm{U}\,|\!=_F\Delta \Leftrightarrow$ ($\neg\sim_{\mathrm{LF}}$ в LC) $\Leftrightarrow \Gamma,\mathrm{U},\urcorner\mathrm{U}\,|\!=_F\Delta,\Phi$ та $\Gamma,\mathrm{U},\urcorner\mathrm{U}\,|\!=_F\Delta,\neg\Phi$ $\Leftrightarrow$ (теорема 10) $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta,\Phi$ та $\mathrm{U}/\Gamma\,|\!=_F^{\perp}\Delta,\neg\Phi$.

Для всіх відношень ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$ можна сформулювати:

$C_{\sim*}$) $\mathrm{U},\Phi/\Gamma\,|\!=_*^{\perp}\Delta,\sim\Phi$;

$C_{\neg\sim*}$) $\mathrm{U},\Phi/\neg\sim\Phi,\Gamma\,|\!=_*^{\perp}\Delta$.

Для $|\!=_F^{\perp}$ властивість $C_{\sim*}$ – окремий випадок $C\sim$; для $|\!=_T^{\perp}$ $C_{\sim*}$ є похідною від $\mathrm{ElU_T}$, $\sim_{\mathrm{RT}}$, C. Для $|\!=_T^{\perp}$ властивість $C_{\neg\sim*}$ – окремий випадок $C\neg\sim$; для $|\!=_F^{\perp}$ ця властивість є похідною від $\mathrm{ElU_F}$, $\neg\sim_{\mathrm{LF}}$, C.

Властивості декомпозиції формул вигляду $\sim\Phi$ *різні* для відношень типу $|\!=_T^{\perp}$ та типу $|\!=_F^{\perp}$, тому для відношень типу $|\!=_{TF}^{\perp}$ властивості декомпозиції $\sim\Phi$ не можна подати як спільну властивість для відношень типу $|\!=_{TF}$.

Проте $\Gamma\,|\!=_{TF}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=_T^{\perp}\Delta$ та $\Gamma\,|\!=_F^{\perp}$, тому властивості декомпозиції та гарантованої наявності логічного наслідку для відношень типу $|\!=_{TF}^{\perp}$ можна задати опосередковано, через відповідні властивості для відношень типу $|\!=_T^{\perp}$ та типу $|\!=_F^{\perp}$.

Властивості, в яких фігурує $\sim\Phi$, *істотно різні* для $|\!=_{IR}^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_{TF}^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_{TF}^{\perp}$. Це ще раз засвідчує відмінність усіх зазначених відношень.

Пов'язані з реномінацією властивості еквівалентних перетворень для відношень ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$ подібні до відповідних властивостей еквівалентних перетворень для відношень ${}^{Pc}|\!=_T$, ${}^{Pc}|\!=_F$, ${}^{Rc}|\!=_T$, ${}^{Rc}|\!=_F$. Їх доведення базується на теоремі 8. Кожна з властивостей R, RI, RU, RR, $R\neg$, $R\vee$, $R\sim$, $R\exists$, $R\exists s$ дає 6 відповідних властивостей для ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині цього відношення або входить до умови невизначеності. Враховуючи властивості $\mathrm{ElU_T}$ та $\mathrm{ElU_F}$ елімінації умови невизначеності, явно виписувати 2 випадки, коли виділена формула чи її заперечення входить до умови невизначеності, немає потреби, тому залишаються 4 випадки. Наведемо для прикладу властивості, індуковані, $R\sim$.

Нехай $\Phi,\Psi\in Fr$; $\Gamma,\mathrm{U},\Delta\subseteq Fr$; $|\!=_*^{\perp}$ – одне з ${}^{P}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{P}|\!=_F^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_T^{\perp}$, ${}^{R}|\!=_F^{\perp}$.

$\mathrm{R}\sim_{\mathrm{L}}$) $\mathrm{U}/R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim\Phi),\Gamma\,|\!=_*^{\perp}\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ U/{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta;$

$R{\sim}_R)\ U/\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}({\sim}\Phi)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ U/\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta, {\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi);$

$\neg R{\sim}_L)\ U/\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}({\sim}\Phi),\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ U/\neg{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi),\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta;$

$\neg R{\sim}_R)\ U/\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta,\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}({\sim}\Phi)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ U/\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta,\neg{\sim}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi).$

Для відношень типу $|{=_{TF}}^{\perp}$ властивості еквівалентних перетворень можна задати опосередковано, через відповідні властивості для відношень типу $|{=_T}^{\perp}$ та $|{=_F}^{\perp}$.

Властивості елімінації кванторів, *E*-розподілу та первісного означення для відношень ${}^P|{=_T}^{\perp}$, ${}^R|{=_T}^{\perp}$, ${}^P|{=_F}^{\perp}$, ${}^R|{=_F}^{\perp}$ подібні до відповідних властивостей для відношень ${}^{Pc}|{=_T}$, ${}^{Rc}|{=_T}$, ${}^{Pc}|{=_F}$, ${}^{Rc}|{=_F}$, сформульованих в теоремах 5 та 6.

Наведемо для прикладу властивості $\exists_L$ та $\exists Rv_R$.

$\exists_L$) за умови $z\in fu(U,\Gamma,\Delta,\exists x\Phi)$)

$$U/\exists x\Phi,\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta \Leftrightarrow U/R_z^x(\Phi),Ez,\Gamma\,|{=_*}^{\perp}\Delta;$$

$\exists Rv_R)\ U/\Gamma,Ey\,|{=_*}^{\perp}\Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ U/\Gamma,Ey\,|{=_*}^{\perp}\Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi).$

Доведення властивостей елімінації кванторів та побудова для LC першопорядкових числень секвенційного типу будуть проведені в наступних статтях.

Висновки

В роботі досліджено першопорядкові LC – логіки часткових предикатів з композицією (операцією) предикатного доповнення ~ Подібні операції використовуються в різних варіантах логік Флойда-Хоара з частковими перед- та після-умовами. Описано композиційні алгебри і мови LC. Запропоновано низку відношень логічного наслідку в LC (типів $|{=_T}$, $|{=_F}$, $|{=_{TF}}$, а також відношення ${}^{Pc}|{=_{IR}}$) та відношень логічного наслідку за умови невизначеності (типів $|{=_T}^{\perp}$, $|{=_F}^{\perp}$, $|{=_{TF}}^{\perp}$). Досліджено властивості цих відношень, встановлено співвідношення між ними. Для запропонованих відношень описано умови їх гарантованої наявності, наведено властивості декомпозиції формул та елімінації кванторів.

Для відношень типів $|{=_T}$ та $|{=_F}$ доведено теорему про елімінацію умов невизначеності, що дає змогу звести відношення ${}^P|{=_T}^{\perp}$, ${}^P|{=_F}^{\perp}$, ${}^R|{=_T}^{\perp}$, ${}^R|{=_F}^{\perp}$ до відношень ${}^{Pc}|{=_T}$, ${}^{Pc}|{=_F}$, ${}^{Rc}|{=_T}$, ${}^{Rc}|{=_F}$. Водночас $|{=_{IR}}^{\perp}$ неможливо звести до відношення ${}^{Pc}|{=_{IR}}$. Понад те, для ${}^{Pc}|{=_{IR}}$ неможливо коректно задати умови декомпозиції формул ${\sim}\Phi$.

Встановлені властивості LC засвідчують істотну її відмінність від традиційної логіки квазіарних предикатів.

Для пропонованих відношень логічного наслідку в LC та відношень логічного наслідку за умов невизначеності в наступних статтях планується побудова першопорядкових числень секвенційного типу.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993–2000.
2. S.C. Kleene. Mathematical Logic. New York, 1967.
3. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
4. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. К.: ВПЦ Київський університет, 2008. 528 с.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.
6. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. Algebra and Discrete Mathematics, Vol. 23 (2017). N 2. P. 263–278.
7. Hoare C. An axiomatic basis for computer programming, Comm. 1969. ACM. 12(10). P. 576–580.
8. Ivanov I., Nikitchenko M. On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. In Proceedings of the 14th International Conference on ICT.

Vol. 2104 of CEUR Workshop Proc. 2018. P. 716–724.
9. Ivanov I., Nikitchenko M. Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement, Comm. in Computer and Information Science. 2019. Vol. 1007. Springer, Cham. P. 71–88.
10. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С., Мамедов Т.А. Пропозиційні логіки часткових предикатів з композицією предикатного доповнення. *Проблеми програмування.* 2019. № 1. С. 3–13.

References

1. ABRAMSKY, S., GABBAY, D. and MAIBAUM, T. (editors). (1993–2000). *Handbook of Logic in Computer Science* Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. KLEENE, S. (1967) *Mathematical Logic.* New York.
3. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
4. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2008). *Mathematical logic and theory of algorithms*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
5. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O. and SHKILNIAK, S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In *Problems in Progamming*. No 2–3. P. 73–86 (in ukr).
6. NIKITCHENKO, M. and SHKILNIAK, S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 23. No 2. P. 263–278.
7. HOARE, C. (1969). An axiomatic basis for computer programming, Comm. ACM 12(10), 576–580, 1969.
8. IVANOV, I. and NIKITCHENKO, M. (2018). On the sequence rule for the Floyd-Hoare logic with partial pre- and post-conditions. *In Proceedings of the 14th International Conference on ICT.* Vol 2104 of CEUR Workshop Proc., P. 716–724.
9. IVANOV, I. and NIKITCHENKO, M. (2019). Inference Rules for the Partial Floyd-Hoare Logic Based on Composition of Predicate Complement. *In Communication. in Computer and Information Science.* Vol. 1007. Springer, Cham, P. 71–88.
10. NIKITCHENKO, M., SHKILNIAK, O., SHKILNIAK, S. and MAMEDOV, T. (2019). Propositional logics of partial predicates with composition of predicate complement. In *Problems in Progamming*. No 1. P. 3–13 (in ukr).

Одержано 21.05.2019

Про автора:

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 95,
у тому числі у фахових виданнях – 36.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 13.
Scopus Author ID: 57190873266
h-індекс (Google Scholar): 5 (4 з 2014)
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19.
E-mail: me.oksana@gmail.com