УДК 004.42:510.69

О.С. Шкільняк

ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В ЛОГІКАХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Вивчаються відношення логічного наслідку в логіках тотальних однозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Поряд із розглянутими раніше відношеннями типів *T*, *F*, *TF*, *IR*, *DI*, для логік квазіарних предикатів запропоновано і досліджено відношення типів $T\vee F$ та *C*. Описано властивості відношень логічного наслідку. Наведено приклади, які засвідчують відмінності розглянутих відношень. Показана нетранзитивність відношень типів $T\vee F$ та *C*, можливість моделювання відношень типу *C* за допомогою відношень типу *TF*. Встановлено співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку.

Ключові слова: логіка, предикат, семантика, логічний наслідок.

Вступ

Розвиток інформаційних технологій зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Створено багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в інформатиці й програмуванні. Ці системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Водночас принципові обмеження класичної логіки спонукають необхідність розробки нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ), збудовані на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу.

КНЛ вивчались, зокрема, в [1–4].

Фундаментальним поняттям логіки є поняття логічного наслідку. Широке використання в програмуванні часткових відображень, які можуть бути неоднозначними, робить актуальною проблему дослідження логік із нетрадиційними семантиками та відношень логічного наслідку для цих логік. Такі відношення є семантичною основою побудови числень секвенційного типу. Для пропозиційної логіки нестандартні семантики та відношення логічного наслідку розглянуто в [5]. Для чистих першопорядкових КНЛ (ЧКНЛ) такі відношення вивчались в [2–4].

Мета даної роботи – це дослідження відношень логічного наслідку для КНЛ тотальних однозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів. Поряд із розглянутими в [2–4] відношеннями типів *T*, *F*, *TF*, *Cl* (в нових позначеннях *IR*), *Cm* (в нових позначеннях *DI*), для КНЛ пропонуються і вивчаються відношення типів $T\vee F$ та *C*. Описано властивості таких відношень, наведено низку прикладів, які засвідчують відмінності одних відношень від інших. Показана нетранзитивність відношень типів $T\vee F$ і *C*, можливість моделювання $^{R}|\!\!=_{C}$ за допомогою $^{R}|\!\!=_{TF}$. Встановлено співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку.

Невизначені в даній роботі поняття тлумачимо в сенсі [1, 2].

1. Квазіарні предикати, їх різновиди. Алгебри предикатів

Під *V*-*A*-квазіарним предикатом будемо розуміти довільну часткову неоднозначну функцію вигляду $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$.

Тут ${}^{V}\!A$ – клас *V*-*A*-іменних множин, $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

V-*A*-іменна множина (*V*-*A*-ІМ) – це часткова однозначна функція $d : V \to A$. Трактуємо *V* і *A* як множини предметних імен (змінних) і предметних значень.

Позначимо через $P(d)$ множину тих значень, які *P* може прийняти на $d\in{}^{V}\!A$. Маємо $P(d)\subseteq\{T, F\}$, тому $P(d)$ може бути одним із значень: $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Області істинності та хибності предиката $P : {}^{V}\!A \to \{T, F\}$ – це множини

$$T(P) = \{d\in{}^{V}\!A \mid T\in P(d)\},$$

$$F(P) = \{d\in{}^{V}\!A \mid F\in P(d)\}.$$

Ми трактуємо часткові неоднозначні квазіарні предикати як відношення між ${}^{V}A$ та $\{T, F\}$. Їх називають [2] предикатами реляційного типу, або *R*-предикатами.

V-*A*-квазіарний предикат *P*:

– однозначний, якщо $T(P)\cap F(P) = \varnothing$;

– тотальний, якщо $T(P)\cup F(P) = {}^{V}A$.

Часткові однозначні предикати назвемо *P*-предикатами, тотальні – *T*-предикатами, тотальні однозначні – *TS*-предикатами. Класи часткових неоднозначних, часткових однозначних, тотальних, тотальних однозначних *V*-*A*-квазіарних предикатів позначимо PrR_A^V, PrP_A^V, PrT_A^V, $PrTS_A^V$.

V-*A*-квазіарний предикат *P*:

– неспростовний (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$;

– виконуваний, якщо $T(P) \neq \varnothing$;

– тотально істинний, якщо $T(P) = {}^{V}A$;

– тотально хибний, якщо $F(P) = {}^{V}A$;

– тотожно істинний, якщо

$$T(P) = {}^{V}A \text{ та } F(P) = \varnothing;$$

– тотожно хибний, якщо

$$T(P) = \varnothing \text{ та } F(P) = {}^{V}A;$$

– всюди невизначений, якщо

$$T(P) = \varnothing \text{ та } F(P) = \varnothing;$$

– тотально насичений (повне бінарне відношення), якщо $T(P) = {}^{V}A$ та $F(P) = {}^{V}A$.

Кожний неспростовний та кожний невиконуваний предикат є однозначними.

Всюди невизначений *V*-*A*-квазіарний предикат позначимо як $\perp_A^V$, тотожно істинний – як T_A^V, тотожно хибний – як F_A^V, тотально насичений – як $\top_A^V$. Якщо *V* та *A* маються на увазі, предикати $\perp_A^V$, T_A^V, F_A^V, $\top_A^V$ позначаємо як $\perp$, T, F, $\top$.

V-*A*-квазіарний предикат $\tilde{P}$ дуальний до *V*-*A*-квазіарного предиката *P*, якщо

$$T(\tilde{P}) = \overline{F(P)};\, F(\tilde{P}) = \overline{T(P)}.$$

Із визначень випливає:

Q – *P*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *T*-предикат;

Q – *T*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *P*-предикат;

якщо Q – *TS*-предикат, то $\tilde{Q} = Q$.

Задамо відображення дуалізації $\delta : PrR_A^V \to PrR_A^V$ наступним чином:

$$\delta(P) = \tilde{P} \text{ для кожного } P \in PrR_A^V.$$

Для класів предикатів маємо:

$$\delta(PrP_A^V) = PrT_A^V,\ \delta(PrT_A^V) = PrP_A^V;$$

$$\delta(PrR_A^V) = PrR_A^V,\ \delta(PrTS_A^V) = PrTS_A^V;$$

$$\delta(\{\perp_A^V\}) = \{\top_A^V\},\ \delta(\{\top_A^V\}) = \{\perp_A^V\}.$$

Розглянемо тепер композиції квазіарних предикатів.

На пропозиційному рівні композиції працюють лише з істиннісними значеннями, які вироблені предикатами. Традиційна їх назва – логічні зв'язки. Основними є 1-арна композиція заперечення $\neg$ та 2-арні композиції диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція &, імплікація $\to$, еквіваленція $\leftrightarrow$.

Пропозиційні композиції задамо через області істинності й хибності відповідних предикатів. Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$, $\to(P, Q)$, $\&(P, Q)$, $\leftrightarrow(P, Q)$ традиційно позначаємо як $\neg P$, $P\vee Q$, $P\to Q$, $P\&Q$, $P\leftrightarrow Q$.

Предикати $\neg P$ та $P\vee Q$ задамо так:

$T(\neg P) = F(P)$; $F(\neg P) = T(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q)$; $F(P\vee Q) = (P)\cap F(Q)$.

$\neg$ та $\vee$ – це базові пропозиційні композиції. Композиції $\to$, &, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$:

$$P\to Q = \neg P\vee Q;$$

$$P\&Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);$$

$$P\leftrightarrow Q = (P\to Q)\&(Q\to P).$$

На рівні ЧКНЛ до пропозиційних композицій додаємо композиції реномінації та квантифікації. Спочатку опишемо необхідні для цього операції над *V*-*A*-ІМ.

Операцію ∇ накладки задаємо так:

$$\delta\nabla\eta = \eta\cup[v\mapsto a\in\delta \mid v\notin asn(\eta)].$$

Тут $asn(d) = \{v\in V \mid v\mapsto a\in d\}$.

Параметризовану за множиною пар імен операцію $\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n}^{v_1,\ldots,v_n} : {}^{V}A\to {}^{V}A$ реномінації задаємо так:

$\mathrm{r}^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(d) = d\nabla[v_1 \mapsto d(x_1),...,v_n \mapsto d(x_n)]$.

Замість $y_1,...,y_n$ далі пишемо $\bar{y}$.

Задамо композицію реномінації $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$: $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)(d) = P(\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(d))$ для кожного $d \in {}^V A$.

Параметричні композиції квантифікації $\exists x$ і $\forall x$ можна задати через області істинності та хибності відповідних предикатів. При цьому композиція $\forall x$ є похідною.

Дамо визначення предиката $\exists xP$:

$T(\exists xP) = \{d \in {}^V A \mid T \in P[d\nabla x \mapsto a]$ для деякого $a \in A\}$;

$F(\exists xP) = \{d \in {}^V A \mid F \in P[d\nabla x \mapsto a]$ для всіх $a \in A\}$.

Композицію $\forall x$ задаємо умовою

$$\forall xP = \neg\exists x\neg P.$$

Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$ називають базовими композиціями ЧКНЛ.

Властивості композицій квазіарних предикатів описано в [1–4].

Зокрема, $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$ зберігають однозначність і тотальність квазіарних предикатів. Звідси випливає, що класи *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів замкнені відносно композицій $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$.

Для предикатів $\perp$ та $\top$ маємо:

$\neg\perp = \perp$, $\perp \vee \perp = \perp$, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\perp) = \perp$, $\exists x(\perp) = \perp$,

$\neg\top = \top$; $\top \vee \top = \top$; $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\top) = \top$; $\exists x(\top) = \top$.

Отже, 1-елементні множини $\{\perp\}$ та $\{\top\}$ замкнені відносно $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$.

Алгебра $QR^V_A = (PrR^V_A, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x\}$, називається чистою першопорядковою композиційною алгеброю квазіарних предикатів. Можна виділити наступні підалгебри алгебри QR^V_A:

$QP^V_A = (PrP^V_A, CQ)$ – алгебра *P*-предикатів,

$QT^V_A = (PrT^V_A, CQ)$ – алгебра *T*-предикатів,

$QTS^V_A = (PrTS^V_A, CQ)$ – алгебра *TS*-предикатів.

Виділяємо сингулярні підалгебри $\perp_{V\text{-}A} = (\{\perp^V_A\}, CQ)$ та $\top_{V\text{-}A} = (\{\top^V_A\}, CQ)$.

Нехай δ – відображення дуалізації.

Алгебри (Pr_1, CQ) та (Pr_2, CQ) дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1) = \mathrm{Pr}_2$ та $\delta(\mathrm{Pr}_2) = \mathrm{Pr}_1$.

Маємо пару дуальних алгебр QP^V_A та QT^V_A, алгебри QR^V_A та QTS^V_A автодуальні. Дуальними є $\perp_{V\text{-}A}$ та $\top_{V\text{-}A}$.

2. Мови та семантичні моделі

Семантичними моделями ЧКНЛ є [1, 2] чисті першопорядкові композиційні системи квазіарних предикатів. Вони мають вигляд (A, Pr, CQ).

Композиційна система (A, Pr, CQ) задає алгебру даних (A, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, CQ). Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови ЧКНЛ.

Алфавіт мови ЧКНЛ:

- множина $Cs = \{\neg, \vee, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x\}$ символів базових композицій;
- множина *Ps* предикатних символів;
- множина *V* предметних імен (змінних), в якій виділена множина $U \subseteq V$ тотально неістотних [2] імен.

Четвірку $\Sigma = (V, U, Cs, Ps)$ назвемо розширеною сигнатурою мови.

Дамо індуктивне визначення множини *Fr* формул:

– $Ps \subseteq Fr$; формули $p \in Ps$ – атомарні;

– $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Для зручності далі пишемо скорочення формул (див. [1, 2]), користуючись символами похідних композицій та інфіксною формою запису для $\vee$, &, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Інтерпретуємо мову на композиційних системах вигляду $\mathrm{CS} = (A, \mathrm{Pr}, CQ)$. Імена $x \in V$ позначають елементи множини базових даних *A*, символи композицій – композиції із CQ. Символи *Ps* позначають базові предикати в множині Pr. Для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I : Ps \to \mathrm{Pr}$. Відображення інтерпретації формул $I : Fr \to \mathrm{Pr}$ задамо як розширення відображення $I : Ps \to \mathrm{Pr}$ згідно побудови формул із простіших за допомогою символів Cs:

– $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$,

– $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$,

– $I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$;

– $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійку $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$ називатимемо інтерпретацією мови ЧКНЛ сигнатури Σ. Скорочено інтерпретації позначаємо (A, I).

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Виділення підалгебр квазіарних предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій. Маємо загальний клас R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій, T-інтерпретацій, TS-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій назвемо семантиками, будемо їх позначати відповідно $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{TS}$.

Отже, далі можна говорити про R-семантику, T-семантику, P-семантику, TS-семантику логік квазіарних предикатів.

Логіки R-предикатів, T-предикатів, P-предикатів, TS-предикатів назвемо логіками з R-семантикою, T-семантикою, P-семантикою, TS-семантикою відповідно.

Семантики $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$ в [2] названо неокласичною, пересиченою, загальною.

Для семантик $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{TS}$ маємо:

$\mathcal{TS} \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{R}$, $\mathcal{TS} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{R}$.

Відображення дуалізації δ продовжимо на класи інтерпретацій.

Інтерпретація $\delta(\boldsymbol{J}) = (A, I_\delta)$ дуальна до інтерпретації $\boldsymbol{J} = (A, I)$, якщо для кожного $\Phi \in Ps$ маємо $T(\Phi_{\delta(J)}) = \overline{F(\Phi_J)}$ та $F(\Phi_{\delta(J)}) = \overline{T(\Phi_J)}$. Тоді $\boldsymbol{J}$ дуальна до $\delta(\boldsymbol{J})$: $T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_{\delta(J)})}$ та $F(\Phi_J) = \overline{T(\Phi_{\delta(J)})}$.

Виділення дуальних пар алгебр квазіарних предикатів індукує виділення дуальних пар класів інтерпретацій. Зокрема:

$\delta(\mathcal{P}) = \mathcal{T}$, $\delta(\mathcal{T}) = \mathcal{P}$, $\delta(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, $\delta(\mathcal{TS}) = \mathcal{TS}$.

Отже, P-семантика і T-семантика дуальні, а R-семантика і TS-семантика автодуальні.

Нехай інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ дуальні. Тоді (див. [2]) для всіх $\Phi \in Fr$ маємо:

$$T(\Phi_J) = \overline{F(\Phi_\vartheta)} \text{ та } F(\Phi_\vartheta) = \overline{T(\Phi_J)}.$$

Для кожної $\boldsymbol{J} \in \mathcal{P}$ можна побудувати систему тотальних розширень $\boldsymbol{M} \in \mathcal{TS}$. Це означає: для кожного $p \in Ps$ маємо $T(p_J) \subseteq T(p_M) = {}^V\!A$ та $F(p_J) \subseteq F(p_M) = {}^V\!A$. Згідно теореми про розширення [1] тоді $T(\Phi_J) \subseteq T(\Phi_M) = {}^V\!A$ та $F(\Phi_J) \subseteq F(\Phi_M) = {}^V\!A$ для кожної $\Phi \in Fr$.

Нехай $\mathcal{J}$ – клас інтерпретацій.

Формула Φ неспростовна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$-неспростовна (позн. $\boldsymbol{J} \models \Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний.

Формула Φ неспростовна в $\mathcal{J}$ (позн. ${}^{\mathcal{J}}\!\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{J} \models \Phi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \mathcal{J}$.

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$-виконувана, якщо Φ_J – виконуваний предикат.

Формула Φ виконувана в $\mathcal{J}$, якщо Φ $\boldsymbol{J}$-виконувана при деякій $\boldsymbol{J} \in \mathcal{J}$.

Кожна формула буде виконуваною в $\mathcal{T}$ та в $\mathcal{R}$ (беремо інтерпретацію, задану сингулярною алгеброю $\top_{V\text{-}A}$).

Отже, поняття виконуваної формули змістовне лише для P-інтерпретацій.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J} \models\!\equiv \Phi$), якщо Φ_J – тотально істинний предикат.

Формула Φ тотально істинна в $\mathcal{J}$ (позн. ${}^{\mathcal{J}}\!\models\!\equiv \Phi$), якщо $\boldsymbol{J} \models\!\equiv \Phi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \mathcal{J}$.

Формула Φ тотожно істинна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, якщо $\Phi_J = \mathrm{T}$.

Формула Φ тотожно істинна в $\mathcal{J}$, якщо Φ тотожно істинна при кожній $\boldsymbol{J} \in \mathcal{J}$.

Подібним чином даємо визначення:

– тотально хибної при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та тотально хибної в $\mathcal{J}$ формули;
– тотожно хибної при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та тотожно хибної в $\mathcal{J}$ формули.

Теорема 1. 1) для R-семантики класи неспростовних, тотально істинних і тотожно істинних формул порожні;

2) для P-семантики класи тотально істинних і тотожно істинних формул порожні;

3) для T-семантики класи неспростовних і тотожно істинних формул порожні;

4) для TS-семантики класи неспростовних, тотально істинних і тотожно істинних формул збігаються.

Відповідні твердження теореми 1 можна сформулювати для класів тотально хибних та тотожно хибних формул.

Твердження 1. ${}^{P}\!\models \Phi \Leftrightarrow {}^{T}\!\models\equiv \Phi$.

Φ_J буде неспростовним при $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Phi_\vartheta$ тотально істинний при дуальній $\boldsymbol{\vartheta}\in\mathcal{T}$.

Твердження 2. ${}^{P}\!\models \Phi \Leftrightarrow \neg\Phi$ невиконувана в $\mathcal{P}$.

Справді, ${}^{P}\!\models \Phi \Leftrightarrow F(\Phi_J) = \varnothing$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P} \Leftrightarrow T(\neg\Phi_J) = \varnothing$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P} \Leftrightarrow \neg\Phi$ невиконувана.

Теорема 2. ${}^{P}\!\models \Phi \Leftrightarrow \Phi$ тотожно істинна в $\mathcal{TS}$.

Доводимо $\Rightarrow$. Якщо Φ не є тотожно істинною в $\mathcal{TS}$, то $F(\Phi_J) \neq \varnothing$ для деякої $\boldsymbol{J}\in\mathcal{TS}$, тому ${}^{P}\!\not\models \Phi$ в силу $\mathcal{TS}\subset\mathcal{P}$.

Доводимо $\Leftarrow$. Якщо ${}^{P}\!\not\models \Phi$, то маємо $F(\Phi_J) \neq \varnothing$ для деякої $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$. Візьмемо для $\boldsymbol{J}$ систему тотальних розширень $\boldsymbol{M}\in\mathcal{TS}$. Тоді $F(\Phi_J)\subseteq F(\Phi_M)$, звідки $F(\Phi_M) \neq \varnothing$, тому Φ не є тотожно істинною в $\mathcal{TS}$.

Наслідок 1. Φ тотожно істинна в $\mathcal{TS} \Leftrightarrow {}^{P}\!\models \Phi \Leftrightarrow {}^{T}\!\models\equiv \Phi$.

Поняття тавтології для ЧКНЛ вводимо традиційним чином (див. [1]).

Формула пропозиційно нерозкладна, якщо вона атомарна або має вигляд $\exists x\Phi$ чи $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$. Нехай Fr_0 – множина пропозиційно нерозкладних формул. Істиннісна оцінка мови – це тотальне відображення $\tau : Fr_0 \rightarrow \{T, F\}$. Таке τ продовжуємо [1] до відображення $\tau : Fr \rightarrow \{T, F\}$ згідно дії композицій $\neg$ та $\vee$ на предикати.

Формула Φ *тавтологія*, якщо $\tau(\Phi) = T$ для кожної істиннісної оцінки τ.

Теорема 3. Φ тавтологія $\Rightarrow \Phi$ тотожно істинна в $\mathcal{TS}$.

Нехай Φ утворена із пропозиційно нерозкладних формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Припустимо, що Φ не тотожно істинна в $\mathcal{TS}$, тоді $\Phi(d) = F$ для деяких $\boldsymbol{J} = (A, I) \in\mathcal{TS}$ та $d\in{}^{V}\!A$. Візьмемо істиннісну оцінку τ: $\tau(\varphi_i) = \varphi_{iJ}(d)$. Тоді $\tau(\Phi) = F$, тому Φ не тавтологія.

Наслідок 2. Пропозиційна формула Φ є тавтологія $\Leftrightarrow \Phi$ тотожно істинна в $\mathcal{TS} \Leftrightarrow \Phi$ неспростовна в $\mathcal{P} \Leftrightarrow \Phi$ тотально істинна в $\mathcal{T}$.

3. Відношення логічного наслідку

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів можна ввести низку відношень на множині формул мови ЧКНЛ.

Спочатку вводимо (див. [2]) відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

1. Істиннісний, або T-наслідок ${}_{J}\!\models_T$:

$$\Phi \;{}_{J}\!\models_T \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J).$$

2. Хибнісний, або F-наслідок ${}_{J}\!\models_F$:

$$\Phi \;{}_{J}\!\models_F \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J).$$

3. Сильний, або TF-наслідок ${}_{J}\!\models_{TF}$:

$$\Phi \;{}_{J}\!\models_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J) \text{ та } F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J).$$

4. Неспростовнісний, або IR-наслідок ${}_{J}\!\models_{IR}$: $\Phi \;{}_{J}\!\models_{IR} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J) = \varnothing$.

5. Дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_{J}\!\models_{DI}$: $\Phi \;{}_{J}\!\models_{DI} \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J) = {}^{V}\!A$.

До цих “природних” відношень наслідку, досліджених в [2–4], додамо ще два.

6. C-наслідок ${}_{J}\!\models_C$:

$$\Phi \;{}_{J}\!\models_C \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J).$$

7. $T\vee F$-наслідок ${}_{J}\!\models_{T\vee F}$:

$$\Phi \;{}_{J}\!\models_{T\vee F} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J) \text{ або } F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J).$$

C-наслідок для пропозиційної логіки розглянуто в [5]. Дослідити $T\vee F$-наслідок запропонував М.С. Нікітченко.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці α визначаємо за схемою:

$\Phi\ {}^{\alpha}|\!\!=_{*} \Psi$, якщо $\Phi\ {}_{J}|\!\!=_{*} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Твердження 3. Усі визначені вище відношення рефлексивні.

Твердження 4. Маємо:

${}_{J}|\!\!=_{IR} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{C}$, ${}_{J}|\!\!=_{DI} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{C}$;

${}_{J}|\!\!=_{TF} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{T} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{T\vee F}$, ${}_{J}|\!\!=_{TF} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{F} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{T\vee F}$.

У випадках класичної логіки та логіки *TS*-предикатів маємо $T(\Phi_J)=\overline{F(\Phi_J)}$ та $F(\Phi_J)=\overline{T(\Phi_J)}$. Для цих логік усі наведені відношення логічного наслідку втрачають відмінності, вони збігаються і фактично стають єдиним логічним наслідком. Для логіки *TS*-предикатів таке відношення логічного наслідку позначимо ${}^{TS}|\!\!=$. Отже:

Теорема 4. ${}^{TS}|\!\!=_{TF} = {}^{TS}|\!\!=_{T} = {}^{TS}|\!\!=_{F} = {}^{TS}|\!\!=_{IR} = {}^{TS}|\!\!=_{DI} = {}^{TS}|\!\!=_{C} = {}^{TS}|\!\!=_{T\vee F} = {}^{TS}|\!\!=$.

Твердження 5. ${}^{P}|\!\!=_{DI} = {}^{T}|\!\!=_{IR} = \varnothing$.

Візьмемо *P*-інтерпретацію, задану алгеброю $\perp_{V\text{-}A}$, на ній усі формули інтерпретуються як $\perp$. Звідси маємо ${}^{P}|\!\!=_{DI} = \varnothing$.

Візьмемо *T*-інтерпретацію, задану алгеброю $\top_{V\text{-}A}$, на ній усі формули інтерпретуються як $\top$. Звідси маємо ${}^{T}|\!\!=_{IR} = \varnothing$.

Наслідок 3. ${}^{R}|\!\!=_{IR} = {}^{R}|\!\!=_{DI} = \varnothing$.

У випадку $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$ маємо

${}_{J}|\!\!=_{T} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{IR}$ та ${}_{J}|\!\!=_{F} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{IR}$.

Справді, для $\Phi, \Psi\in Fr$ із умов $T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$ та $T(\Psi_J)\cap F(\Psi_J)=\varnothing$ маємо $T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)=\varnothing$; із умов $F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$ та $T(\Phi_J)\cap F(\Phi_J)=\varnothing$ маємо $T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)=\varnothing$.

У випадку $\boldsymbol{J}\in\mathcal{T}$ маємо

${}_{J}|\!\!=_{T} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{DI}$ та ${}_{J}|\!\!=_{F} \subseteq {}_{J}|\!\!=_{DI}$.

Справді, для $\Phi, \Psi\in Fr$ із умов $F(\Phi_J)\cup T(\Phi_J) = {}^{V}\!A$ та $T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$ маємо $F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J) = {}^{V}\!A$; із $F(\Psi_J)\cup T(\Psi_J) = {}^{V}\!A$ та $F(\Psi_J)\subseteq F(\Phi_J)$ маємо $F(\Phi_J)\cup T(\Psi_J) = {}^{V}\!A$.

Таким чином, маємо.

Теорема 5. ${}^{P}|\!\!=_{T} \subseteq {}^{P}|\!\!=_{IR}$, ${}^{P}|\!\!=_{F} \subseteq {}^{P}|\!\!=_{IR}$; ${}^{T}|\!\!=_{T} \subseteq {}^{T}|\!\!=_{DI}$, ${}^{T}|\!\!=_{F} \subseteq {}^{T}|\!\!=_{DI}$.

Наслідок 4. ${}^{P}|\!\!=_{*} \subseteq {}^{TS}|\!\!=$ та ${}^{T}|\!\!=_{*} \subseteq {}^{TS}|\!\!=$.

Справді, $\mathcal{TS}\subset\mathcal{P}$ та $\mathcal{TS}\subset\mathcal{T}$.

Теорема 6. Маємо ${}^{P}|\!\!=_{IR} = {}^{TS}|\!\!=$.

Згідно наслідку 4 маємо ${}^{P}|\!\!=_{IR} \subseteq {}^{TS}|\!\!=$. Покажемо ${}^{TS}|\!\!= \subseteq {}^{P}|\!\!=_{IR}$.

Нехай супротивне: ${}^{TS}|\!\!= \not\subseteq {}^{P}|\!\!=_{IR}$. Тоді для деяких $\Phi,\Psi\in Fr$ та $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$ маємо $\Phi\ {}^{TS}|\!\!= \Psi$ та $\Phi\ {}_{J}|\!\!\neq_{IR} \Psi$. Останнє означає, що $T(\Phi_J)\cap F(\Psi_J)\neq\varnothing$. Візьмемо для $\boldsymbol{J}$ систему тотальних розширень $\boldsymbol{M}\in\mathcal{TS}$. Тоді $T(\Phi_J)\subseteq T(\Phi_M)$ та $F(\Psi_J)\subseteq F(\Psi_M)$, звідки $T(\Phi_M)\cap F(\Psi_M)\neq\varnothing$, тому $\Phi\ {}_{M}|\!\!\neq_{IR} \Psi$. Звідси випливає $\Phi\ {}^{TS}|\!\!\neq \Psi$ – суперечність.

Теорема 7. Нехай інтерпретації $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ дуальні. Тоді маємо:

1) $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{T} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{F} \Psi$ та $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{T} \Psi$;

2) $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{TF} \Psi$;

3) $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{T\vee F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{T\vee F} \Psi$;

4) $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{IR} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{DI} \Psi$ та $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{DI} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{IR} \Psi$;

5) $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{C} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{C} \Psi$.

Зауважимо, що пп. 1, 2, 4 теореми доведено в [2]. Тому доведемо пп. 3, 5.

Доводимо п. 3. $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{T\vee F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{A}|\!\!=_{T} \Psi$ або $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{F} \Psi \Leftrightarrow$ (за п. 1) $\Phi\ {}_{B}|\!\!=_{F} \Psi$ або $\Phi\ {}_{B}|\!\!=_{T} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{T\vee F} \Psi$.

Доводимо п. 5. Маємо $\Phi\ {}_{A}|\!\!=_{C} \Psi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow T(\Phi_A)\cap F(\Psi_A)\subseteq F(\Phi_A)\cup T(\Psi_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{F(\Phi_B)}\cap\overline{T(\Psi_B)}\subseteq\overline{T(\Phi_B)}\cup\overline{F(\Psi_B)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{F(\Phi_B)\cup T(\Psi_B)}\subseteq\overline{T(\Phi_B)\cap F(\Psi_B)} \Leftrightarrow$$

$$T(\Phi_B)\cap F(\Psi_B)\subseteq F(\Phi_B)\cup T(\Psi_B) \Leftrightarrow \Phi\ {}_{B}|\!\!=_{C} \Psi.$$

Теорема 8. Маємо (див. також [2]):

$$\Phi\ {}^{R}|\!\!=_{T} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}^{R}|\!\!=_{F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}^{R}|\!\!=_{TF} \Psi.$$

Покажемо: $\Phi\ |\!\!=_{T} \Psi \Rightarrow \Phi\ |\!\!=_{TF} \Psi$.

Нехай супротивне: $\Phi\ |\!\!=_{T} \Psi$, проте $\Phi\ |\!\!\neq_{TF} \Psi$. Тоді $T(\Phi_J)\subseteq T(\Psi_J)$ для кожної і $\boldsymbol{J}$, проте $\Phi\ {}_{A}|\!\!\neq_{TF} \Psi$ для деякої $\boldsymbol{A}$. Тоді неправильно $F(\Psi_A)\subseteq F(\Phi_A)$, тому для дуальної $\boldsymbol{B}$

неправильно $T(\Phi_B) \subseteq T(\Psi_B)$, а це суперечить $\Phi \models_T \Psi$.

Аналогічно $\Phi \models_F \Psi \Rightarrow \Phi \models_{TF} \Psi$.

Із теорем 4, 6–8 маємо:

Наслідок 5. ${}^R\!\models_T = {}^R\!\models_F = {}^R\!\models_{TF}$; ${}^P\!\models_{IR} = {}^T\!\models_{DI} = {}^P\!\models_C = {}^T\!\models_C = {}^{TS}\!\models$; ${}^P\!\models_T = {}^T\!\models_F$; ${}^P\!\models_F = {}^T\!\models_T$; ${}^P\!\models_{TF} = {}^T\!\models_{TF}$; ${}^P\!\models_{T\vee F} = {}^T\!\models_{T\vee F}$.

Отже, із перелічених вище відношень різними можуть бути лише такі:

${}^P\!\models_{IR}$, ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^P\!\models_{T\vee F}$, ${}^R\!\models_C$, ${}^R\!\models_{TF}$.

Твердження 6. Відношення ${}_J\!\models_T$, ${}_J\!\models_F$, ${}_J\!\models_{TF}$ та відношення ${}^P\!\models_T$, ${}^P\!\models_F$, ${}^P\!\models_{TF}$, ${}^R\!\models_{TF}$ є транзитивними.

Складніше із транзитивністю ${}_J\!\models_{IR}$, ${}_J\!\models_{DI}$, ${}_J\!\models_C$, ${}_J\!\models_{T\vee F}$ та ${}^P\!\models_{IR}$, ${}^P\!\models_{T\vee F}$, ${}^R\!\models_C$.

Приклад 1. Нехай $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$, $p, q, s\in Ps$. Задамо предикат p_A як T, q_A – як $\perp$, s_A – як F. Тоді $p\ {}_A\!\models_{IR}\ q$ та $q\ {}_A\!\models_{IR}\ s$, проте $p\ {}_A\!\not\models_{IR}\ s$.

Отже, відношення ${}_A\!\models_{IR}$ нетранзитивне. Звідси для дуальної інтерпретації $\boldsymbol{B}$ маємо нетранзитивність ${}_B\!\models_{DI}$. Проте для відношення ${}^P\!\models_{IR}$ ситуація нормалізується.

Теорема 9. ${}^P\!\models_{IR}$ транзитивне.

Нехай маємо супротивне: $\Phi\ {}^P\!\models_{IR}\ \Psi$, $\Psi\ {}^P\!\models_{IR}\ \Xi$, проте $\Phi\ {}^P\!\not\models_{IR}\ \Xi$. Тоді для деякої $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$, маємо $T(\Phi_A)\cap F(\Xi_A) \neq \varnothing$. Візьмемо для $\boldsymbol{A}$ деяку інтерпретацію тотальних розширень $\boldsymbol{M}$, тоді $T(\Phi_A) \subseteq T(\Phi_M)$ та $F(\Xi_A) \subseteq F(\Xi_M)$, звідки $T(\Phi_M)\cap F(\Xi_M) \neq \varnothing$. Предикати Φ_M, Ψ_M, Ξ_M тотальні, звідки отримуємо

$T(\Phi_M)\cup F(\Phi_M) = T(\Psi_M)\cup F(\Psi_M) =$
$= T(\Xi_M)\cup F(\Xi_M) = {}^V\!A$, тоді умови $\Phi\ {}^P\!\models_{IR}\ \Psi$ та $\Psi\ {}^P\!\models_{IR}\ \Xi$ дають $T(\Phi_M) \subseteq T(\Psi_M)$ та $T(\Psi_M) \subseteq T(\Xi_M)$, звідки $T(\Phi_M) \subseteq T(\Xi_M)$, що суперечить $T(\Phi_M)\cap F(\Xi_M) \neq \varnothing$.

Приклад 2. Нехай $p, q\in Ps$, Φ – це формула $p \vee (q \& \neg q)$, Ψ – це $p \& (q \vee \neg q)$.

Для кожної $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$ маємо:

$$T(\Phi_A) = T(p_A) \cup (T(q_A)\cap F(q_A)) = T(p_A),$$

$$F(\Phi_A) = F(p_A) \cap (T(q_A)\cup F(q_A)) \subseteq F(p_A),$$

$$T(\Psi_A) = T(p_A) \cap (T(q_A)\cup F(q_A)) \subseteq T(p_A),$$

$$F(\Psi_A) = F(p_A) \cup (T(q_A)\cap F(q_A)) = F(p_A).$$

Отже, $\Phi\ {}_A\!\models_T\ p$ та $p\ {}_A\!\models_F\ \Psi$ для кожного $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$, тому $\Phi\ {}^P\!\models_{T\vee F}\ p$ та $p\ {}^P\!\models_{T\vee F}\ \Psi$.

Водночас маємо $p\ {}^P\!\models_{TF}\ \Phi$ та $\Psi\ {}^P\!\models_{TF}\ p$, тому $p\ {}^P\!\models_{T\vee F}\ \Phi$ та $\Psi\ {}^P\!\models_{T\vee F}\ p$.

Задамо інтерпретацію $\boldsymbol{B}\in\mathcal{P}$ таку:

$$T(\Psi_B) = T(p_B) \cap (T(q_B)\cup F(q_B)) \subset T(p_B),$$

$$F(\Phi_B) = F(p_B) \cap (T(q_B)\cup F(q_B)) \subset F(p_B).$$

Проте $T(\Phi_B) = T(p_B)$, $F(\Psi_B) = F(p_B)$, звідки $\Phi\ {}^P\!\not\models_T\ \Psi$ та $\Phi\ {}^P\!\not\models_F\ \Psi$, тому $\Phi\ {}^P\!\not\models_{T\vee F}\ \Psi$.

Отже, отримуємо наступну теорему.

Теорема 10. ${}^P\!\models_{T\vee F}$ нетранзитивне.

Для довільних формули φ та інтерпретації $\boldsymbol{J}$ далі позначаємо $T(\varphi_J)\cap F(\varphi_J)$ як $\varphi_{J\cap}$, а $T(\varphi_J)\cup F(\varphi_J)$ як $\varphi_{J\cup}$.

Приклад 3. Нехай $p, q\in Ps$, Φ – це формула $p \vee (q \& \neg q)$, Ψ – це формула $p \& (q \vee \neg q)$. Для довільної $\boldsymbol{A}\in\mathcal{R}$ маємо:

$$T(\Phi_A) = T(p_A)\cup q_{A\cap},\ F(\Phi_A) = F(p_A)\cap q_{A\cup},$$

$$T(\Psi_A) = T(p_A)\cap q_{A\cup},\ F(\Psi_A) = F(p_A)\cup q_{A\cap};$$

$$T(\Phi_A) \cap F(p_A) = (T(p_A)\cup q_{A\cap}) \cap F(p_A) =$$
$$= (T(p_A)\cap F(p_A)) \cup (F(p_A)\cap q_{A\cap}),$$

$$F(\Phi_A) \cup T(p_A) = (F(p_A)\cap q_{A\cup}) \cup T(p_A).$$

Проте $F(p_A)\cap q_{A\cap} \subseteq F(p_A)\cap q_{A\cup}$, $T(p_A)\cap F(p_A) \subseteq T(p_A)$, звідки $T(\Phi_A) \cap F(p_A) \subseteq$ $\subseteq F(\Phi_A) \cup T(p_A)$, тому $\Phi\ {}_A\!\models_C\ p$.

Тепер маємо $T(p_A) \cap F(\Psi_A) = T(p_A) \cap$ $\cap (F(p_A)\cup q_{A\cap}) = (T(p_A)\cap F(p_A))\cup(T(p_A)\cap q_{A\cap})$,

$$F(p_A) \cup T(\Psi_A) = F(p_A) \cup (T(p_A)\cap q_{A\cup}).$$

Водночас $T(p_A)\cap q_{A\cap} \subseteq T(p_A)\cap q_{A\cup}$, $T(p_A)\cap F(p_A) \subseteq F(p_A)$, звідки $T(p_A) \cap F(\Psi_A) \subseteq$ $\subseteq F(p_A) \cup T(\Psi_A)$, тому $p\ {}_A\!\models_C\ \Psi$.

Таким чином, $\Phi\ {}^R\!\models_C\ p$ та $p\ {}^R\!\models_C\ \Psi$.

Проте $p\ {}^R\!\models_{TF}\ \Phi$ та $\Psi\ {}^R\!\models_{TF}\ p$, тому $p\ {}^R\!\models_C\ \Phi$ та $\Psi\ {}^R\!\models_C\ p$.

Задамо інтерпретацію $\boldsymbol{B}\in\mathcal{P}$ таку:

$T(p_B) = F(p_B) \neq \varnothing$, $T(q_B) = F(q_B)$, $T(p_B)\cap T(q_B) = \varnothing$. Тоді:

$$T(\Phi_B) \cap F(\Psi_B) = (T(p_B)\cup q_{B\cap}) \cap (F(p_B)\cup$$
$$\cup q_{B\cap}) = T(p_B)\cup q_{B\cap} \neq \varnothing,$$

$$F(\Phi_B) \cup T(\Psi_B) = (F(p_B)\cap q_{B\cup}) \cup (T(p_B)\cap q_{B\cup})$$
$$= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing.$$

Отже, $\Phi\ _B|\neq_C \Psi$, тому $\Phi\ ^R|\neq_C \Psi$.

Таким чином, отримуємо.

Теорема 11. $^R|=_C$ нетранзитивне.

Отже, відношення $^P|=_{T\vee F}$ та $^R|=_C$ мають не зовсім прийнятні властивості. Вони не задовольняють постулату Тарського про транзитивність логічного наслідку.

Наведемо визначення тавтологічного наслідку для пари формул (див. [1, 2]).

Ψ є тавтологічним наслідком Φ (позн. $\Phi\ |=_t \Psi$), якщо $\Phi\to\Psi$ – тавтологія.

Відношення $|=_t$ рефлексивне і транзитивне.

Для пропозиційних формул умова $\Phi\ ^{TS}|=\Psi$ означає, що $\Phi\ |=_t \Psi$. Справді, $\Phi\ ^{TS}|=\Psi \Leftrightarrow \Phi\to\Psi$ тотожно істинна в $\mathcal{TS} \Leftrightarrow$ (наслідок 2) $\Phi\to\Psi$ є тавтологія $\Leftrightarrow \Phi\ |=_t \Psi$.

Теорема 12. 1) для пропозиційних формул маємо:

$$\Phi\ ^P|=_{IR} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ ^T|=_{DI} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ ^P|=_C \Psi \Leftrightarrow \Leftrightarrow \Phi\ ^T|=_C \Psi \Leftrightarrow \Phi\ ^{TS}|=\Psi \Leftrightarrow \Phi\ |=_t \Psi;$$

2) у випадку класичної семантики пропозиційної логіки усі описані вище відношення збігаються.

Зауважимо, що в монографії О.Д. Смирнової ([5] стор. 190) неточно сказано, що відношення типу [*f*] в релевантній семантиці (в наших термінах термінах відношення $^R|=_C$) формалізується класичною логікою, проте це не так: згідно прикладу 3 маємо $p\vee(q\&\neg q)\ ^R|\neq_C p\,\&\,(q\vee\neg q)$, хоча $p\vee(q\&\neg q)\to p\,\&\,(q\vee\neg q)$ – тавтологія. Ще одна неточність: там же сказано, що відношення типу [*a*], [*b*], [*c*] в релевантній семантиці (в наших термінах відношення $^R|=_T$, $^R|=_F$, $^R|=_{TF}$) не є еквівалентними, хоча (наслідок 5) $^R|=_T = {}^R|=_F = {}^R|=_{TF}$.

Відношення логічного наслідку $^P|=_{IR}$, $^P|=_T$, $^P|=_F$, $^P|=_{TF}$, $^R|=_{TF}$ індукують відповідні відношення логічної еквівалентності $^P{\sim}_{IR}$, $^P{\sim}_T$, $^P{\sim}_F$, $^P{\sim}_{TF}$, $^R{\sim}_{TF}$.

Визначаємо їх за такою схемою:

$$\Phi\ ^\alpha{\sim}_* \Psi,\ \text{якщо}\ \Phi\ ^\alpha|=_* \Psi\ \text{та}\ \Psi\ |=_* \Phi.$$

Подібним чином визначаємо відношення тавтологічної еквівалентності $\sim_t$:

$$\Phi \sim_t \Psi,\ \text{якщо}\ \Phi\ |=_t \Psi\ \text{та}\ \Psi\ |=_t \Phi.$$

Твердження 7. Відношення $^P{\sim}_{IR}$, $^P{\sim}_T$, $^P{\sim}_F$, $^P{\sim}_{TF}$, $^R{\sim}_{TF}$, $\sim_t$ рефлексивні, транзитивні та симетричні.

Можна визначити (див. [2]) відношення еквівалентності формул при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ за наступною схемою:

$$\Phi\ _J{\sim}_* \Psi,\ \text{якщо}\ \Phi\ _J|=_* \Psi\ \text{та}\ \Psi\ _J|=_* \Phi.$$

Твердження 8. $\Phi\ ^\alpha{\sim}_* \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _J{\sim}_* \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Для відношення $_J{\sim}_{TF}$ отримуємо:

$$\Phi\ _J{\sim}_{TF} \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)\ \text{та}\ F(\Phi_J) = F(\Psi_J).$$

Отже, $\Phi\ _J{\sim}_{TF} \Psi$ означає, що $\Phi_J = \Psi_J$.

Відношення $\sim_T$, $_J{\sim}_F$, $_J{\sim}_{TF}$, $_J{\sim}_{TF}$ транзитивні, проте $_J{\sim}_{IR}$ нетранзитивне:

Справді, нехай $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$, $p, q, s\in Ps$. Задамо p_A як T, q_A – як $\perp$, s_A – як F. Тоді $p\ _A{\sim}_{IR}\ q$ та $q\ _A{\sim}\ s$, проте неправильно $p\ _A{\sim}_{IR}\ s$.

Твердження 9. Логічна зв'язка $\leftrightarrow$ узгоджується з відношенням $^P{\sim}_{IR}$:

$$\Phi\ ^P{\sim}_{IR} \Psi \Leftrightarrow {}^P|=\Phi\leftrightarrow\Psi.$$

Твердження 10. 1) для пропозиційних формул умова $\Phi\ ^\alpha{\sim}_* \Psi$, де $^\alpha{\sim}_*$ – одне з визначених вище відношень логічної еквівалентності, означає, що тоді $\Phi \sim_t \Psi$;

2) для класичної семантики пропозиційної логіки усі описані вище відношення логічної еквівалентності збігаються.

Введемо відношення $^P{\sim}_{T\vee F}$ та $^R{\sim}_C$.

Відношення $^P{\sim}_{T\vee F}$ визначаємо так:

$$\Phi\ ^P{\sim}_{T\vee F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ ^P|=_{T\vee F} \Psi\ \text{та}\ \Psi\ ^P|=_{T\vee F} \Phi.$$

Задамо відношення $\Phi\ _J{\sim}_{T\vee F} \Psi$ так:

$$\Phi\ _J{\sim}_{T\vee F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _J|=_{T\vee F} \Psi\ \text{та}\ \Psi\ _J|=_{T\vee F} \Phi.$$

Тоді $\Phi\ ^P{\sim}_{T\vee F} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _J{\sim}_{T\vee F} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$.

Твердження 11. Відношення $_J{\sim}_{T\vee F}$ та $^P{\sim}_{T\vee F}$ нетранзитивні.

Для формул прикладу 2 для кожної $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$ маємо $\Phi\ _A{\sim}_{T\vee F}\ p$ та $p\ _A{\sim}_{T\vee F} \Psi$, тому маємо $\Phi\ _A{\sim}_{T\vee F}\ p$ та $p\ _A{\sim}_{T\vee F} \Psi$. Проте для інтерпретації $\boldsymbol{B}$ прикладу 2 маємо $\Phi\ _B|\neq_{T\vee F} \Psi$ та $\Phi\ _B|\neq_{T\vee F} \Psi$, тому неправильно $\Phi\ _B{\sim}_{T\vee F} \Psi$ та неправильно $\Phi\, {}^{P}\!\sim_{T\vee F} \Psi$.

Отже, ${}_{J}\!\sim_{T\vee F}$ та ${}^{P}\!\sim_{T\vee F}$ не є відношеннями еквівалентності.

Відношення ${}^{R}\!\sim_{C}$ визначимо так:

$$\Phi\, {}^{R}\!\sim_{C} \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}^{R}\!\models_{C} \Psi \text{ та } \Psi\, {}^{R}\!\models_{C} \Phi.$$

Задамо відношення $\Phi\, {}_{J}\!\sim_{C} \Psi$ так:

$$\Phi\, {}_{J}\!\sim_{C} \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}_{J}\!\models_{C} \Psi \text{ та } \Psi\, {}_{J}\!\models_{C} \Phi.$$

Тоді $\Phi\, {}^{R}\!\sim_{C} \Psi \Leftrightarrow \Phi\, {}_{J}\!\sim_{C} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \mathcal{R}$.

Твердження 12. Відношення ${}_{J}\!\sim_{C}$ та ${}^{R}\!\sim_{C}$ нетранзитивні.

Для формул прикладу 3 для кожної $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}$ маємо $\Phi\, {}_{A}\!\sim_{C} p$ та $p\, {}_{A}\!\sim_{C} \Psi$, тому маємо $\Phi\, {}_{A}\!\sim_{C} p$ та $p\, {}_{A}\!\sim_{C} \Psi$. Проте для інтерпретації $\boldsymbol{B}$ прикладу 3 маємо $\Phi\, {}_{B}\!\not\models_{C} \Psi$ та $\Phi\, {}_{B}\!\not\models_{C} \Psi$, тому неправильно $\Phi\, {}_{B}\!\sim_{C} \Psi$ та неправильно $\Phi\, {}^{R}\!\sim_{C} \Psi$.

Таким чином, ${}_{J}\!\sim_{C}$ та ${}^{R}\!\sim_{C}$ теж не є відношеннями еквівалентності.

4. Відношення логічного наслідку для множин формул

Нехай $\Sigma \subseteq Fr$, $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Скорочено позначимо $\bigcap\limits_{\Phi\in\Sigma} T(\Phi_J)$ як $T^{\wedge}(\Sigma_J)$, $\bigcap\limits_{\Phi\in\Sigma} F(\Phi_J)$ як $F^{\wedge}(\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\Phi\in\Sigma} T(\Phi_J)$ як $T^{\vee}(\Sigma_J)$, $\bigcup\limits_{\Phi\in\Sigma} F(\Phi_J)$ як $F^{\vee}(\Sigma_J)$.

Δ є IR-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{IR} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \cap F^{\wedge}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є DI-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{DI} \Delta$), якщо $F^{\vee}(\Gamma_J) \cup T^{\vee}(\Delta_J) = {}^{V}\!A$.

Δ є T-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{T} \Delta$), якщо $T^{\wedge}(\Gamma_J) \subseteq T^{\vee}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{F} \Delta$), якщо $F^{\wedge}(\Delta_J) \subseteq F^{\vee}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{T} \Delta$ та $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{F} \Delta$.

Відповідні відношення логічного наслідку в семантиці α визначаємо за схемою:

$$\Gamma\, {}^{\alpha}\!\models_{*} \Delta, \text{ якщо } \Gamma\, {}_{J}\!\models_{*} \Delta \text{ для кожної } \boldsymbol{J} \in \alpha.$$

Δ є тавтологічним наслідком Γ (позн. $\Gamma \models_{t} \Delta$), якщо для кожної істиннісної оцінки $\tau : Fp \to \{T, F\}$ із умови $\tau(\Phi) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$ маємо: $\tau(\Psi) = T$ для деякої $\Psi \in \Delta$.

Відношення наслідку та логічного наслідку для множин формул рефлексивні та нетранзитивні (див. [1, 2]).

Розглянуті в попередньому розділі відношення наслідку та логічного наслідку для формул є окремими випадками відповідних відношень для множин формул, їх позначення та властивості (окрім транзитивності) переносяться на випадок відповідних відношень для множин формул.

Відношення наслідку та логічного наслідку для логік квазіарних предикатів (окрім введених тут відношень типу $T\vee F$ та C) вивчались в [1–4]. Розглянемо основні властивості цих відношень.

Теорема 13. Нехай інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та $\boldsymbol{\vartheta}$ дуальні. Тоді:

1) $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{T} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{F} \Delta$ та $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{F} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{T} \Delta$;

2) $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{TF} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{TF} \Delta$;

3) $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{DI} \Delta$ та $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{DI} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{IR} \Delta$;

4) $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{T\vee F} \Delta\Psi \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{T\vee F} \Delta$;

5) $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{C} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\, {}_{\vartheta}\!\models_{C} \Delta$.

Серед розглянутих відношень логічного наслідку для множин формул різними можуть бути лише такі:

$${}^{P}\!\models_{IR},\ {}^{P}\!\models_{T},\ {}^{P}\!\models_{F},\ {}^{P}\!\models_{TF},\ {}^{P}\!\models_{T\vee F},\ {}^{R}\!\models_{C},\ {}^{R}\!\models_{TF},\ \models_{t}.$$

Розглянемо наслідки, коли одна з множин формул порожня.

$\varnothing\, {}_{J}\!\models_{*} \Delta$ означає $\mathrm{T}\, {}_{J}\!\models_{*} \Delta$,

$\Gamma\, {}_{J}\!\models_{*} \varnothing$ означає $\Gamma\, {}_{J}\!\models_{*} \mathrm{F}$.

Звідси маємо наступне.

$\varnothing \models_{t} \Phi$ означає, що Φ – тавтологія;

$\Phi \models_{t} \varnothing$ означає: Φ – суперечність;

$\varnothing\, {}_{J}\!\models_{IR} \Phi$ та $\varnothing\, {}_{J}\!\models_{F} \Phi$ означають $F(\Phi_J) = \varnothing$, тобто $\boldsymbol{J} \models \Phi$;

$\varnothing\, {}_{J}\!\models_{DI} \Phi$ та $\varnothing\, {}_{J}\!\models_{T} \Phi$ означають $T(\Phi_J) = {}^{V}\!A$, тобто $\boldsymbol{J} \equiv \Phi$;

$\varnothing\ _J|\!=_{T\vee F}\Phi$ означає: $T(\Phi_J) = {}^VA$ або $F(\Phi_J) = \varnothing$, тобто $\boldsymbol{J}|\!\equiv\Phi$ або $\boldsymbol{J}|\!=\Phi$;

$\varnothing\ _J|\!=_C\Phi$ означає $F(\Phi_J)\subseteq T(\Phi_J)$;

$\varnothing\ _J|\!=_{TF}\Phi$ означає $T(\Phi_J) = {}^VA$ та $F(\Phi_J) = \varnothing$, тобто $\Phi_J = \mathrm{T}$;

$\Phi\ _J|\!=_{IR}\varnothing$ та $\Phi\ _J|\!=_T\varnothing$ означають $T(\Phi_J) = \varnothing$;

$\Phi\ _J|\!=_{DI}\varnothing$ та $\Phi\ _J|\!=_F\varnothing$ означають $F(\Phi_J) = {}^VA$;

$\Phi\ _J|\!=_{T\vee F}\varnothing$ означає: $T(\Phi_J) = \varnothing$ або $F(\Phi_J) = {}^VA$;

$\Phi\ _J|\!=_C\varnothing$ означає $T(\Phi_J)\subseteq F(\Phi_J)$;

$\Phi\ _J|\!=_{TF}\varnothing$ означає: $T(\Phi_J) = \varnothing$ та $F(\Phi_J) = {}^VA$.

Звідси отримуємо:

$\varnothing\ ^P|\!=_{IR}\Phi$ та $\varnothing\ ^P|\!=_F\Phi$ означають: для всіх $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$ маємо $\varnothing\ _J|\!=_{IR}\Phi$, тобто $^P|\!=\Phi$;

$\varnothing\ ^P|\!=_C\Phi$ теж означає $^P|\!=\Phi$;

$\varnothing\ ^T|\!=_{DI}\Phi$ та $\varnothing\ ^T|\!=_T\Phi$ означають: для всіх $\boldsymbol{J}\in\mathcal{T}$ маємо $\varnothing\ _J|\!=_{DI}\Phi$, тобто $^T|\!\equiv\Phi$;

$\varnothing\ ^T|\!=_C\Phi$ теж означає $^T|\!\equiv\Phi$;

$\varnothing\ ^P|\!=_{T\vee F}\Phi$ означає: $T(\Phi_J) = {}^VA$ або $F(\Phi_J) = \varnothing$, для всіх $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$, звідки $^P|\!=\Phi$;

$\varnothing\ ^T|\!=_{T\vee F}\Phi$ означає: $T(\Phi_J) = {}^VA$ або $F(\Phi_J) = \varnothing$, для всіх $\boldsymbol{J}\in\mathcal{T}$, звідки $^T|\!\equiv\Phi$;

не існує $\Phi\in Fr$ таких, що $\varnothing\ ^R|\!=_C\Phi$ або $\varnothing\ ^P|\!=_{TF}\Phi$ або $\varnothing\ ^T|\!=_{TF}\Phi$ або $\varnothing\ ^R|\!=_{TF}\Phi$;

$\Phi\ ^P|\!=_{IR}\varnothing$, $\Phi\ ^P|\!=_F\varnothing$, $\Phi\ ^P|\!=_C\varnothing$ та $\varnothing\ ^P|\!=_{T\vee F}\Phi$ означають $^P|\!=\neg\Phi$;

$\Phi\ ^T|\!=_{DI}\varnothing$, $\Phi\ ^T|\!=_T\varnothing$, $\Phi\ ^T|\!=_C\varnothing$ та $\varnothing\ ^T|\!=_{T\vee F}\Phi$ означають $^T|\!\equiv\neg\Phi$;

не існує $\Phi\in Fr$ таких, що $\Phi\ ^R|\!=_C\varnothing$ або $\Phi\ ^P|\!=_{TF}\varnothing$ або $\Phi\ ^T|\!=_{TF}\varnothing$ або $\Phi\ ^R|\!=_{TF}\varnothing$.

Враховуючи наслідок 1, отримуємо.

Теорема 14. $\varnothing\ ^P|\!=_C\Phi \Leftrightarrow \varnothing\ ^P|\!=_{IR}\Phi \Leftrightarrow \varnothing\ ^P|\!=_F\Phi \Leftrightarrow \varnothing\ ^T|\!=_C\Phi \Leftrightarrow \varnothing\ ^T|\!=_{DI}\Phi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \varnothing\ ^T|\!=_T\Phi \Leftrightarrow {}^P|\!=\Phi \Leftrightarrow {}^T|\!\equiv\Phi$;

$\Phi\ ^P|\!=_C\varnothing \Leftrightarrow \Phi\ ^P|\!=_{IR}\varnothing \Leftrightarrow \Phi\ ^P|\!=_F\varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Phi\ ^T|\!=_C\varnothing \Leftrightarrow \Phi\ ^T|\!=_{DI}\varnothing \Leftrightarrow \Phi\ ^T|\!=_T\varnothing \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow {}^P|\!=\neg\Phi \Leftrightarrow {}^T|\!\equiv\neg\Phi$.

Властивості контрапозиції:

1) $\Phi\ ^P|\!=_{IR}\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_{IR}\neg\Phi$;

2) $\Phi\ ^P|\!=_{TF}\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_{TF}\neg\Phi$ та $\Phi\ ^R|\!=_{TF}\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^R|\!=_{TF}\neg\Phi$;

3) $\Phi\ ^P|\!=_{T\vee F}\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_{T\vee F}\neg\Phi$;

4) $\Phi\ ^R|\!=_C\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^R|\!=_C\neg\Phi$;

5) $\Phi\ ^P|\!=_T\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_F\neg\Phi$ та $\Phi\ ^P|\!=_F\Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_T\neg\Phi$.

Водночас неправильні такі твердження:

1) $\Phi\ ^P|\!=_T\Psi \Rightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_T\neg\Phi$;

2) $\Phi\ ^P|\!=_F\Psi \Rightarrow \neg\Psi\ ^P|\!=_F\neg\Phi$.

Справді, візьмемо $p, q, s\in Ps$ та інтерпретацію $\boldsymbol{J}$: $F(q_J)\not\subseteq T(p_J)\cup F(p_J)$,

$T(q_J)\not\subseteq T(s_J)\cup F(s_J)$. Тоді $\neg p\&p\ ^P|\!=_T q$ та

$\neg q\ _J|\!\neq_T\neg p\vee p$, $q\ ^P|\!=_F\neg s\vee s$ та $\neg s\&s\ _J|\!\neq_F\neg q$.

Розглянемо можливість перенесення формули з лівої частини логічного наслідку в праву і навпаки.

Теорема 15. Маємо:

1) $\Gamma\ ^P|\!=_{IR}\Delta,\Phi \Leftrightarrow \neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_{IR}\Delta$ та $\Gamma\ ^P|\!=_{IR}\Delta,\neg\Phi \Leftrightarrow \Phi,\Gamma\ ^P|\!=_{IR}\Delta$;

2) $\Gamma\ ^R|\!=_C\Delta,\Phi \Leftrightarrow \neg\Phi,\Gamma\ ^R|\!=_C\Delta$ та $\Gamma\ ^R|\!=_C\Delta,\neg\Phi \Leftrightarrow \Phi,\Gamma\ ^R|\!=_C\Delta$;

3) $\Gamma\ ^P|\!=_T\Delta,\Phi \Rightarrow \neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_T\Delta$ та $\Gamma\ ^P|\!=_T\Delta,\neg\Phi \Rightarrow \Phi,\Gamma\ ^P|\!=_T\Delta$;

4) $\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_F\Delta \Rightarrow \Gamma\ ^P|\!=_F\Delta,\neg\Phi$ та $\neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_F\Delta \Rightarrow \Gamma\ ^P|\!=_F\Delta,\Phi$.

Теорема 16. Можливо:

1) $\neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_T\Delta$ та $\Gamma\ ^P|\!\neq_T\Delta,\Phi$; $\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_T\Delta$ та $\Gamma\ ^P|\!\neq_T\Delta,\neg\Phi$;

2) $\Gamma\ ^P|\!=_F\Delta,\neg\Phi$ та $\Phi,\Gamma\ ^P|\!\neq_F\Delta$; $\Gamma\ ^P|\!=_F\Delta,\Phi$ та $\neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!\neq_F\Delta$;

3) $\neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_{TF}\Delta$ та $\Gamma\ ^P|\!\neq_{TF}\Delta,\Phi$; $\Gamma\ ^P|\!=_{TF}\Delta,\neg\Phi$ та $\Phi,\Gamma\ ^P|\!\neq_{TF}\Delta$;

4) $\neg\Phi,\Gamma\ ^R|\!=_{TF}\Delta$ та $\Gamma\ ^R|\!\neq_{TF}\Delta,\Phi$; $\Gamma\ ^R|\!=_{TF}\Delta,\neg\Phi$ та $\Phi,\Gamma\ ^R|\!\neq_{TF}\Delta$;

5) $\neg\Phi,\Gamma\ ^P|\!=_{T\vee F}\Delta$ та $\Gamma\ ^P|\!\neq_{T\vee F}\Delta,\Phi$; $\Gamma\ ^P|\!=_{T\vee F}\Delta,\neg\Phi$ та $\Phi,\Gamma\ ^P|\!\neq_{T\vee F}\Delta$.

Доводимо п. 1. Візьмемо $\boldsymbol{J}$ таку: $T(\Phi_J)=F(\Phi_J)=\varnothing$, $T(\Gamma_J)\neq\varnothing$. Маємо $\neg\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_T\neg\Phi$, однак $\Gamma\,{}_J|\!\!\neq_T\neg\Phi,\Phi$; маємо $\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_T\Phi$, але $\Gamma\,{}^P|\!\!\neq_T\Phi,\neg\Phi$.

Доводимо п. 2. Візьмемо $\boldsymbol{J}$ таку: $T(\Phi_J)=F(\Phi_J)=\varnothing$, $F(\Delta_J)\neq\varnothing$. Маємо $\Delta\vee\neg\Phi\,{}^P|\!\!=_F\Delta,\neg\Phi$, проте $\Phi,\Delta\vee\neg\Phi\,{}^P|\!\!\neq_F\Delta$; маємо $\Delta\vee\Phi\,{}^P|\!\!=_F\Delta,\Phi$, але $\neg\Phi,\Delta\vee\Phi\,{}^P|\!\!\neq_F\Delta$.

Доводимо п. 4. Завжди маємо $\neg\Phi,\Gamma\,{}^R|\!\!=_{TF}\neg\Phi$, однак $\Gamma\,{}^R|\!\!\neq_T\neg\Phi,\Phi$, якщо взяти $\boldsymbol{J}$ таку: $T(\Phi_J)=F(\Phi_J)=\varnothing$, $T(\Gamma_J)\neq\varnothing$.

Маємо $\Delta\vee\neg\Phi\,{}^R|\!\!=_{TF}\Delta,\neg\Phi$, проте $\Phi,\Delta\vee\neg\Phi\,{}^R|\!\!\neq_F\Delta$, якщо взяти $\boldsymbol{J}$ таку: $T(\Phi_J)=F(\Phi_J)=\varnothing$, $F(\Delta_J)\neq\varnothing$.

Аналогічно доводимо п. 3.

Доводимо п. 5. Нехай $p,q\in Ps$, Φ – це формула $p\vee(q\&\neg q)$, Ψ – це $p\,\&\,(q\vee\neg q)$.

Тоді маємо $\neg\Psi,\Phi\,{}^P|\!\!=_T\Psi$:
$T(\neg\Psi\,\&\,\Phi) = F(\Psi)\cap T(\Phi) =$
$= F(p\,\&\,(q\vee\neg q))\cap T(p\vee(q\&\neg q)) =$
$= F(p)\cap T(p)=\varnothing$.

Далі маємо $\Phi\,{}^P|\!\!=_F\Psi,\neg\Phi$: $F(\Psi\vee\neg\Phi) = F(\Psi)\cap T(\Phi) = \varnothing$.

Звідси маємо $\neg\Psi,\Phi\,{}^P|\!\!=_{T\vee F}\Psi$ та $\Phi\,{}^P|\!\!=_{T\vee F}\Psi,\neg\Phi$, але (приклад 3) $\Phi\,{}^P|\!\!\neq_{T\vee F}\Psi$.

Отже, для ${}^P|\!\!=_{IR}$ та ${}^R|\!\!=_C$ можна робити перенесення формули з лівої частини логічного наслідку в праву і навпаки; а для ${}^P|\!\!=_T$, ${}^P|\!\!=_F$, ${}^P|\!\!=_{TF}$, ${}^P|\!\!=_{T\vee F}$, ${}^R|\!\!=_{TF}$ – не можна.

Теорема 17. Маємо:

1) $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_T\Delta$, проте $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!\neq_F\Delta$;

2) $\Gamma\,{}^P|\!\!=_F\Delta,\neg\Psi,\Psi$, але $\Gamma\,{}^P|\!\!\neq_T\Delta,\neg\Psi,\Psi$;

3) $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_{TF}\Delta,\neg\Psi,\Psi$;

4) $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^R|\!\!\neq_{TF}\Delta,\neg\Psi,\Psi$.

Для п. 1 візьмемо Φ,Ψ та інтерпретацію $\boldsymbol{J}$: $T(\Phi_J)=F(\Phi_J)=\varnothing$ та $F(\Psi_J)\neq\varnothing$. Тоді $\neg\Phi,\Phi\,{}_J|\!\!\neq_F\Psi$, тому $\neg\Phi,\Phi\,{}^P|\!\!\neq_F\Psi$.

Для п. 2 візьмемо Φ,Ψ та інтерпретацію $\boldsymbol{J}$: $T(\Psi_J)=F(\Psi_J)=\varnothing$ та $T(\Phi_J)\neq\varnothing$. Тоді $\Phi\,{}_J|\!\!\neq_T\neg\Psi,\Psi$, тому $\Phi\,{}^P|\!\!\neq_T\neg\Psi,\Psi$.

Доведемо п. 3. Для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$ маємо $T(\Phi_J)\cap F(\Phi_J)=\varnothing$ та $F(\Psi_J)\cap T(\Psi_J)=\varnothing$, звідки $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_T\Delta,\neg\Psi,\Psi$ та $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_F\Delta,\neg\Psi,\Psi$, тому отримуємо $\neg\Phi,\Phi,\Gamma\,{}^P|\!\!=_{TF}\Delta,\neg\Psi,\Psi$.

Для п. 4 візьмемо Φ,Ψ та інтерпретацію $\boldsymbol{J}$ таку: $T(\Phi_J)=F(\Phi_J)={}^VA$ та $T(\Psi_J)=F(\Psi_J)=\varnothing$. Тоді $\Phi\&\neg\Phi\,{}_J|\!\!\neq_{TF}\Psi\vee\neg\Psi$, тому $\neg\Phi,\Phi\,{}^R|\!\!\neq_{TF}\neg\Psi,\Psi$.

Відношення ${}^R|\!\!=_C$ зводиться до ${}^R|\!\!=_{TF}$.

Для $\Sigma\subseteq Fr$ введемо позначення:

${}^\neg\Sigma = \{\neg\Phi\mid\Phi\in\Sigma\}$.

Теорема 18. Маємо

$$\Gamma\,{}^R|\!\!=_C\Delta\Leftrightarrow{}^\neg\Delta,\Gamma\,{}^R|\!\!=_{TF}\Delta,{}^\neg\Gamma.$$

Для $\boldsymbol{J}\in\mathcal{R}$ та множини ${}^\neg\Sigma$ маємо:

$$T^\wedge({}^\neg\Sigma_J)=\bigcap_{\Phi\in\Sigma}T(\neg\Phi_J)=\bigcap_{\Phi\in\Sigma}F(\Phi_J)=F^\wedge(\Sigma_J),$$

$$T^\vee({}^\neg\Sigma_J)=\bigcup_{\Phi\in\Sigma}T(\neg\Phi_J)=\bigcup_{\Phi\in\Sigma}F(\Phi_J)=F^\vee(\Sigma_J),$$

$$F^\wedge({}^\neg\Sigma_J)=\bigcap_{\Phi\in\Sigma}F(\neg\Phi_J)=\bigcap_{\Phi\in\Sigma}T(\Phi_J)=T^\wedge(\Sigma_J),$$

$$F^\vee({}^\neg\Sigma_J)=\bigcup_{\Phi\in\Sigma}F(\neg\Phi_J)=\bigcup_{\Phi\in\Sigma}T(\Phi_J)=T^\vee(\Sigma_J).$$

Для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{R}$ тоді маємо:

$$\Gamma\,{}_J|\!\!=_C\Delta\Leftrightarrow T^\wedge(\Gamma_J)\cap F^\wedge(\Delta_J)\subseteq F^\vee(\Gamma_J)\cup T^\vee(\Delta_J)$$
$$\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow T^\wedge(\Gamma_J)\cap T^\wedge({}^\neg\Delta_J)\subseteq T^\vee({}^\neg\Gamma_J)\cup T^\vee(\Delta_J)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F^\wedge({}^\neg\Gamma_J)\cap F^\wedge(\Delta_J)\subseteq F^\vee(\Gamma_J)\cup F^\vee({}^\neg\Delta_J)\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow{}^\neg\Delta,\Gamma\,{}_J|\!\!=_T\Delta,{}^\neg\Gamma\ \Leftrightarrow\ {}^\neg\Delta,\Gamma\,{}_J|\!\!=_F\Delta,{}^\neg\Gamma\ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow{}^\neg\Delta,\Gamma\,{}_J|\!\!=_{TF}\Delta,{}^\neg\Gamma.$$

Звідси отримуємо

$$\Gamma\,{}^R|\!\!=_C\Delta\Leftrightarrow{}^\neg\Delta,\Gamma\,{}^R|\!\!=_{TF}\Delta,{}^\neg\Gamma.$$

Зокрема, для $\Phi,\Psi\in Fr$ маємо:

$$\Phi\,{}^R|\!\!=_C\Psi\Leftrightarrow\neg\Psi,\Phi\,{}^R|\!\!=_{TF}\Psi,\neg\Phi.$$

Приклад 4. Маємо

$\Phi\&(P\vee\neg P)\vee(Q\&\neg Q)\,{}^R|\!\!=_C\Phi\&\neg S\vee S$ та

$\Phi\&(P\vee\neg P)\vee(Q\&\neg Q)\,{}^P|\!\!\neq_{T\vee F}\Phi\&\neg S\vee S$.

Формули $\Phi\&(P\vee\neg P)\vee(Q\&\neg Q)$ та $\Phi\&\neg S\vee S$ позначимо α та β.

Для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{R}$ маємо:

$T(\alpha_J) = (T(\Phi_J)\cap P_{J\cup})\cup Q_{J\cap}$;

$F(\alpha_J) = (F(\Phi_J) \cup P_{J\cap}) \cap Q_{J\cup} =$

$= (F(\Phi_J) \cap Q_{J\cup}) \cup (P_{J\cap} \cap Q_{J\cup})$;

$T(\beta_J) = (T(\Phi_J) \cap F(S_J)) \cup T(S_J)$;

$F(\beta_J) = (F(\Phi_J) \cup T(S_J)) \cap F(S_J)$.

Тоді $T(\alpha_J) \cap F(\beta_J) = ((T(\Phi_J) \cap P_{J\cup}) \cup Q_{J\cap}) \cap$
$\cap (F(\Phi_J) \cup T(S_J)) \cap F(S_J) =$
$= (T(\Phi_J) \cap P_{J\cup} \cap F(\Phi_J) \cap F(S_J)) \cup$
$\cup (T(\Phi_J) \cap P_{J\cup} \cap S_{J\cap}) \cup (Q_{J\cap} \cap F(\Phi_J) \cap F(S_J)) \cup$
$\cup (Q_{J\cap} \cap S_{J\cap}) \subseteq (T(\Phi_J) \cap F(S_J)) \cup T(S_J) \cup$
$\cup (F(\Phi_J) \cap Q_{J\cup}) \cup (P_{J\cap} \cap Q_{J\cup}) = T(\beta_J) \cup F(\alpha_J)$,
тобто $\alpha\,_J|\!\!=_C \beta$. Отже, $\alpha\,^R|\!\!=_C \beta$.

Візьмемо $\boldsymbol{A} \in \mathcal{P}$ таку: $P_{A\cup} \cap Q_{A\cup} = \varnothing$;
$(P_{A\cup} \cup Q_{A\cup}) \cap S_{A\cup} = \varnothing$; $T(\alpha_A) \neq \varnothing$;
$F(\beta_A) \neq \varnothing$ (при цьому $P_{A\cap} = Q_{A\cap} = \varnothing$).
Маємо $T(\alpha_A) = T(\Phi_A) \cap P_{A\cup} \subseteq P_{A\cup}$,
$F(\alpha_A) = F(\Phi_A) \cap Q_{A\cup} \subseteq Q_{A\cup}$;
$T(\beta_A) = (T(\Phi_A) \cap F(S_A)) \cup T(S_A) \subseteq S_{A\cup}$;
$F(\beta_A) = (F(\Phi_A) \cup T(S_A)) \cap F(S_A) \subseteq S_{A\cup}$.

Згідно $(P_{A\cup} \cup Q_{A\cup}) \cap S_{A\cup} = \varnothing$ тоді $T(\alpha_A) \nsubseteq T(\beta_A)$ та $F(\beta_A) \nsubseteq F(\alpha_A)$, звідки $\alpha\,_A|\!\!\neq_T \beta$ та $\alpha\,_A|\!\!\neq_F \beta$. Отже, $\alpha\,^P|\!\!\neq_{T\vee F} \beta$.

Приклад 5. Маємо

$\Phi \vee (P\&\neg P) \vee (Q\&\neg Q)\,^P|\!\!=_T \Phi$,

$\Phi \vee (P\&\neg P) \vee (Q\&\neg Q)\,^P|\!\!\neq_F \Phi$ та

$\Phi \vee (P\&\neg P) \vee (Q\&\neg Q)\,^R|\!\!\neq_C \Phi$.

$\Phi \vee (P\&\neg P) \vee (Q\&\neg Q)$ позначимо α.

Для кожної $\boldsymbol{J} \in \mathcal{P}$ маємо $T(\alpha_J) =$
$= T(\Phi_J) \cup P_{J\cap} \cup P_{J\cap} = T(\Phi_J)$, звідки $\alpha_J\,^P|\!\!=_T \Phi$.

Візьмемо $\boldsymbol{B} \in \mathcal{P}$ таку: $F(\Phi_B) \neq \varnothing$,
$P_{B\cup} = Q_{B\cup} = \varnothing$. Тоді маємо $F(\alpha_B) =$
$= F(\Phi_B) \cap P_{B\cup} \cap Q_{B\cup} = \varnothing$. Отже,
$F(\Phi_B) \nsubseteq F(\alpha_B)$, тому $\alpha\,_B|\!\!\neq_F \Phi$ та $\alpha\,^P|\!\!\neq_F \Phi$.

Візьмемо $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}$ таку:
$P_{A\cap} = P_{A\cup}$, $Q_{A\cap} = Q_{A\cup}$, $P_{A\cup} \cap Q_{A\cup} = \varnothing$;
$T(\Phi_A) \neq \varnothing$, $F(\Phi_A) \neq \varnothing$, $T(\Phi_A) \cap F(\Phi_A) = \varnothing$;
тоді $F(\alpha_A) = F(\Phi_A) \cap P_{A\cup} \cap Q_{A\cup} = \varnothing$, звідки отримуємо $F(\alpha_A) \cup T(\Phi_A) = T(\Phi_A)$.
Тепер $T(\alpha_A) \cap F(\Phi_A) \nsubseteq T(\Phi_A) = F(\alpha_A) \cup T(\Phi_A)$, звідки $\alpha\,_A|\!\!\neq_C \Phi$, тому $\alpha\,^R|\!\!\neq_C \Phi$.

Приклад 6. Маємо

$\Phi\,^P|\!\!=_F \Phi \,\&\, (P \vee \neg P) \,\&\, (Q \vee \neg Q)$,

$\Phi\,^P|\!\!\neq_T \Phi \,\&\, (P \vee \neg P) \,\&\, (Q \vee \neg Q)$ та

$\Phi\,^R|\!\!\neq_C \Phi \,\&\, (P \vee \neg P) \,\&\, (Q \vee \neg Q)$.

Показується аналогічно прикладу 5.

Приклад 7. Маємо

$\Phi\&\neg\Phi \vee P\&\neg P\,^P|\!\!=_{TF} (\Phi \vee \neg\Phi) \,\&\, (P \vee \neg P)$ та

$\Phi\&\neg\Phi \vee P\&\neg P\,^R|\!\!\neq_C (\Phi \vee \neg\Phi) \,\&\, (P \vee \neg P)$.

Формули $\Phi\&\neg\Phi \vee P\&\neg P$ та $(\Phi \vee \neg\Phi) \,\&\, (P \vee \neg P)$ позначимо α та β.

Для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$ маємо:

$T(\alpha_J) = \Phi_{J\cap} \cup P_{J\cap}$, $F(\alpha_J) = \Phi_{J\cup} \cap P_{J\cup}$,

$T(\beta_J) = \Phi_{J\cup} \cap P_{J\cup}$, $F(\beta_J) = \Phi_{J\cap} \cup P_{J\cap}$.

Звідси $T(\alpha_J) = F(\beta_J)$, $F(\alpha_J) = T(\beta_J)$.

Тепер для кожної $\boldsymbol{B} \in \mathcal{P}$ маємо $T(\alpha_B) = \varnothing$ та $F(\beta_B) = \varnothing$, тому $\alpha\,_B|\!\!=_T \beta$ та $\alpha\,_B|\!\!=_F \beta$. Звідси $\alpha\,^P|\!\!=_{TF} \beta$.

Візьмемо $\boldsymbol{A} \in \mathcal{R}$ таку:

$\Phi_{A\cap} \neq \varnothing$, $P_{A\cap} \neq \varnothing$, $\Phi_{A\cup} \cap P_{A\cup} = \varnothing$.

Тоді $T(\alpha_A) \cap F(\beta_A) = \Phi_{A\cap} \cup P_{A\cap} \neq \varnothing$,
$F(\alpha_A) \cup T(\beta_A) = \Phi_{A\cup} \cap P_{A\cup} = \varnothing$. Звідси $\alpha\,_A|\!\!\neq_C \beta$, тому $\alpha\,^R|\!\!\neq_C \beta$.

Зведемо результати щодо наявності відповідного наслідку для випадків, розглянутих в теоремі 15 та прикладах 2–7, в таблицю. В усіх наведених прикладах маємо $^P|\!\!=_{IR}$ та не маємо $^R|\!\!=_{TF}$.

Введемо такі скорочені позначення.

LC_1: $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \,|\!\!=\, \Delta$;

LC_2: $\Gamma \,|\!\!=\, \neg\Psi, \Psi, \Delta$;

LC_3: $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \,|\!\!=\, \neg\Psi, \Psi, \Delta$;

LC_4: $\Phi \vee (Q\&\neg Q) \,|\!\!=\, \Phi$;

LC_5: $\Phi \,|\!\!=\, \Phi \,\&\, (Q \vee \neg Q)$;

LC_6: $\Phi \vee (Q\&\neg Q) \,|\!\!=\, \Phi \,\&\, (Q \vee \neg Q)$;

LC_7: $\Phi \vee (P\&\neg P) \vee (Q\&\neg Q) \,|\!\!=\, \Phi$;

LC_8: $\Phi \,|\!\!=\, \Phi \,\&\, (P \vee \neg P) \,\&\, (Q \vee \neg Q)$;

LC_9: $\Phi\&\neg\Phi \vee P\&\neg P \,|\!\!=\, (\Phi \vee \neg\Phi) \,\&\, (P \vee \neg P)$;

LC_{10}: $\Phi\&(P \vee \neg P) \vee (Q\&\neg Q) \,|\!\!=\, \Phi\&\neg S \vee S$.

Таблиця. Наявність логічного наслідку

	${}^{P}\!\models_{T\vee F}$	${}^{P}\!\models_{T}$	${}^{P}\!\models_{F}$	${}^{P}\!\models_{TF}$	${}^{R}\!\models_{C}$
LC_1	+	+	–	–	+
LC_2	+	–	+	–	+
LC_3	+	+	+	+	+
LC_4	+	+	–	–	+
LC_5	+	–	+	–	+
LC_6	–	–	–	–	–
LC_7	+	+	–	–	–
LC_8	+	–	+	–	–
LC_9	+	+	+	+	–
LC_{10}	–	–	–	–	+

Отже, отримуємо наступну теорему.

Теорема 19. Маємо такі співвідношення між розглянутими відношеннями:

${}^{P}\!\models_{TF}\subset{}^{P}\!\models_{T}\subset{}^{P}\!\models_{T\vee F}$, ${}^{P}\!\models_{TF}\subset{}^{P}\!\models_{F}\subset{}^{P}\!\models_{T\vee F}$, ${}^{P}\!\models_{T\vee F}\subset{}^{P}\!\models_{IR}$;

${}^{R}\!\models_{TF}\subset{}^{P}\!\models_{TF}$, ${}^{R}\!\models_{TF}\subset{}^{R}\!\models_{C}\subset{}^{P}\!\models_{IR}$;

${}^{P}\!\models_{T}\not\subset{}^{P}\!\models_{F}$, ${}^{P}\!\models_{F}\not\subset{}^{P}\!\models_{T}$, ${}^{P}\!\models_{TF}\not\subset{}^{R}\!\models_{C}$, ${}^{R}\!\models_{C}\not\subset{}^{P}\!\models_{T\vee F}$;

$\models_{t}\subset{}^{P}\!\models_{IR}$; ${}^{P}\!\models_{T\vee F}\not\subset\models_{t}$, ${}^{R}\!\models_{C}\not\subset\models_{t}$.

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови секвенційних числень для відповідних класів логік квазіарних предикатів. Такі числення збудовано для відношень ${}^{P}\!\models_{IR}$, ${}^{P}\!\models_{T}$, ${}^{P}\!\models_{F}$, ${}^{P}\!\models_{TF}$, ${}^{R}\!\models_{TF}$.

Розглянемо особливості побудови секвенційних числень для ${}^{P}\!\models_{T\vee F}$ та ${}^{R}\!\models_{C}$.

Відмінності відношень логічного наслідку проявляються вже на пропозиційному рівні, тому розглянемо лише пропозиційні властивості декомпозиції формул.

Властивості, пов'язані з реномінаціями і кванторами, досліджено в [2–4].

Для відношень ${}^{P}\!\models_{IR}$, ${}^{P}\!\models_{T}$, ${}^{P}\!\models_{F}$, ${}^{P}\!\models_{TF}$ та ${}^{R}\!\models_{TF}$ маємо (див. [2–4]) такі властивості (тут $\models$ – одне з цих відношень):

$\neg\neg_{L}$) $\neg\neg\Phi,\Gamma\models\Delta\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\models\Delta$;

$\neg\neg_{R}$) $\Gamma\models\Delta,\neg\neg\Phi\Leftrightarrow\Gamma\models\Delta,\Phi$;

$\vee_{L}$) $\Phi\vee\Psi,\Gamma\models\Delta\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\models\Delta$ та $\Psi,\Gamma\models\Delta$;

$\vee_{R}$) $\Gamma\models\Delta,\Phi\vee\Psi\Leftrightarrow\Gamma\models\Delta,\Phi,\Psi$;

$\neg\vee_{L}$) $\neg(\Phi\vee\Psi),\Gamma\models\Delta\Leftrightarrow\neg\Phi,\neg\Psi,\Gamma\models\Delta$;

$\neg\vee_{R}$) $\Gamma\models\Delta,\neg(\Phi\vee\Psi)\Leftrightarrow\Gamma\models\Delta,\neg\Phi$ та $\Gamma\models\Delta,\neg\Psi$.

Згідно теореми 15, для ${}^{P}\!\models_{IR}$ та ${}^{R}\!\models_{C}$ додатково справджуються:

$\neg_{L}$) $\neg\Phi,\Gamma\,{}^{P}\!\models_{IR}\Delta\Leftrightarrow\Gamma\,{}^{P}\!\models_{IR}\Delta,\Phi$;

$\neg_{R}$) $\Gamma\,{}^{P}\!\models_{IR}\Delta,\neg\Phi\Leftrightarrow\Phi,\Gamma\,{}^{P}\!\models_{IR}\Delta$.

Згідно теореми 16, для ${}^{P}\!\models_{T}$, ${}^{P}\!\models_{F}$, ${}^{P}\!\models_{TF}$ та ${}^{R}\!\models_{TF}$ ці властивості неправильні.

Розглянемо властивості, які гарантують наявність логічного наслідку.

Для кожного з наслідків маємо:

C) $\Phi,\Gamma\models\Delta,\Phi$.

Додатково гарантують наявність відповідного логічного наслідку такі властивості (їх виділення зайве для відношень ${}^{P}\!\models_{IR}$ та ${}^{R}\!\models_{C}$ в силу властивостей $\neg_{L}$ та $\neg_{R}$):

CL) $\Phi,\neg\Phi,\Gamma\,{}^{P}\!\models_{T}\Delta$;

CR) $\Gamma\,{}^{P}\!\models_{F}\Delta,\Phi,\neg\Phi$;

CLR) $\Phi,\neg\Phi,\Gamma\,{}^{P}\!\models_{TF}\Delta,\Psi,\neg\Psi$;

$CL\vee R$) $\Phi,\neg\Phi,\Gamma\,{}^{P}\!\models_{T\vee F}\Delta$ або $\Gamma\,{}^{P}\!\models_{T\vee F}\Delta,\Phi,\neg\Phi$.

З'ясуємо, чи правильні властивості декомпозиції формул для ${}^{P}\!\models_{T\vee F}$ та ${}^{R}\!\models_{C}$.

Для всіх наслідків властивості $\neg\neg_{L}$, $\neg\neg_{R}$, $\vee_{R}$, $\neg\vee_{L}$ випливають із визначень.

Теорема 20. Для ${}^{P}\!\models_{T\vee F}$ неправильними є властивості $\vee_{L}$ та $\neg\vee_{R}$.

Для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$ маємо:

$\Phi\vee\Psi,\Gamma\,{}_{J}\!\models_{T\vee F}\Delta\Leftrightarrow$

$(T(\Phi_J)\cup T(\Psi_J))\cap T(\Gamma_J)\subseteq T(\Delta_J)$ або

$F(\Delta_J)\subseteq(F(\Phi_J)\cap F(\Psi_J))\cup F(\Gamma_J)\Leftrightarrow$

$(T(\Phi_J)\cap T(\Gamma_J))\cup(T(\Psi_J)\cap T(\Gamma_J))\subseteq T(\Delta_J)$ або

$F(\Delta_J)\subseteq(F(\Phi_J)\cup F(\Gamma_J))\cap(F(\Psi_J)\cup F(\Gamma_J))\Leftrightarrow$

$(T(\Phi_J)\cap T(\Gamma_J)\subseteq T(\Delta_J)$ та $T(\Psi_J)\cap T(\Gamma_J)\subseteq T(\Delta_J))$ або $(F(\Delta_J)\subseteq(F(\Phi_J)\cup F(\Gamma_J))$ та

$F(\Delta_J)\subseteq F(\Psi_J)\cup F(\Gamma_J))\Leftrightarrow(\Phi,\Gamma\,{}_{J}\!\models_{T}\Delta$ та $\Psi,\Gamma\,{}_{J}\!\models_{T}\Delta)$ або $(\Phi,\Gamma\models_{F}\Delta$ та $\Psi,\Gamma\models_{F}\Delta)\Rightarrow$

$(\Phi,\Gamma\,{}_{J}\!\models_{T\vee F}\Delta$ та $\Psi,\Gamma\,{}_{J}\!\models_{T\vee F}\Delta)$ або

$(\Phi, \Gamma \models_{T\vee F} \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models_{T\vee F} \Delta) \Leftrightarrow \Phi, \Gamma\ _J\!\models_{T\vee F} \Delta$ та $\Psi, \Gamma\ _J\!\models_{T\vee F} \Delta$.

Отже, $\Phi\vee\Psi, \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \Phi, \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta$ та $\Psi, \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta$.

Подібним чином показуємо
$\Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Rightarrow \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta, \neg\Psi$.

Покажемо: з умови $\Phi, \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta$ та $\Psi, \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta$ не випливає $\Phi\vee\Psi, \Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta$.

Формули $S\,\&\,(P\vee\neg P)$, $S\,\&\,(Q\vee\neg Q)$, $S\,\&\,(Q\vee\neg Q)\vee(P\&\neg P)$ позначимо α, β, γ.

Покажемо: $\alpha\ ^P\!\models_F \beta$ та $\gamma\ ^P\!\models_T \beta$, тому $\alpha\ ^P\!\models_{T\vee F} \beta$ та $\gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \beta$, проте $\alpha\vee\gamma\ ^P\!\not\models_{T\vee F} \beta$.

Для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{P}$ маємо:

$T(\alpha_J) = T(S_J) \cap P_{J\cup}$, $F(\alpha_J) = F(S_J)$;

$T(\beta_J) = T(S_J) \cap Q_{J\cup}$, $F(\beta_J) = F(S_J)$;

$T(\gamma_J) = T(S_J) \cap Q_{J\cup}$, $F(\gamma_J) = F(S_J) \cap Q_{J\cup}$;

$T(\alpha\vee\gamma_J) = T(\alpha_J)\cup T(\gamma_J) = T(S_J) \cap (P_{J\cup} \cup Q_{J\cup})$;

$F(\alpha\vee\gamma_J) = F(\alpha_J)\cap F(\gamma_J) = F(S_J) \cap Q_{J\cup}$.

Звідси $F(\alpha_J) = F(\beta_J)$ та $T(\gamma_J) = T(\beta_J)$, що дає $\alpha\ ^P\!\models_F \beta$ та $\gamma\ ^P\!\models_T \beta$.

Візьмемо $\boldsymbol{A}\in\mathcal{P}$ таку: $P_{A\cup} \cap Q_{A\cup} = \varnothing$, $T(S_A) \neq \varnothing$, $F(S_A) \neq \varnothing$, $P_{A\cup} \neq \varnothing$, $Q_{A\cup} \neq \varnothing$, $T(S_A)\cap Q_{A\cup} \neq \varnothing$, $F(S_A)\cap P_{A\cup} \neq \varnothing$.

Тоді $T(\alpha\vee\gamma_A) = T(S_A)\cap(P_{A\cup} \cup Q_{A\cup}) \supset$ $\supset T(S_A) \cap Q_{A\cup} = T(\beta_A)$, тому $T(\gamma_A) \nsubseteq T(\beta_A)$; $F(\beta_A) = F(S_A) \supset F(S_A) \cap Q_{J\cup} = T(\alpha\vee\gamma_J)$, отже $F(\beta_A) \nsubseteq F(\gamma_A)$. Звідси $\alpha\vee\gamma\ _A\!\not\models_T \beta$, $\alpha\vee\gamma\ _A\!\not\models_F \beta$, що дає $\alpha\vee\gamma\ _A\!\not\models_{T\vee F} \beta$, тому й $\alpha\vee\gamma\ ^P\!\not\models_{T\vee F} \beta$.

Для інтерпретації $\boldsymbol{A}$ також маємо $\alpha\ _A\!\not\models_T \beta$ та $\gamma\ _A\!\not\models_F \beta$, звідки $\alpha\ ^P\!\not\models_T \beta$ та $\gamma\ ^P\!\not\models_F \beta$.

Подібним чином показуємо:

$\neg\beta\ ^P\!\models_F \neg\alpha$ та $\neg\beta\ ^P\!\models_T \neg\gamma$, водночас $\neg\beta\ _A\!\not\models_{T\vee F} \neg(\alpha\vee\gamma)$, тому $\neg\beta\ ^P\!\not\models_{T\vee F} \neg(\alpha\vee\gamma)$.

Отже, із умови $\Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta, \Psi$ не випливає $\Gamma\ ^P\!\models_{T\vee F} \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi)$.

Твердження 13. Для $^R\!\models_C$ неправильними є властивості $\vee_L$ та $\neg\vee_R$.

Маємо $P\vee(Q\&\neg Q)\vee(S\&\neg S)\ ^R\!\not\models_C P$ за прикладом 5. Проте $P\vee(Q\&\neg Q)\ ^R\!\models_C P$.

Справді, для кожної $\boldsymbol{J}\in\mathcal{R}$ маємо:

$T(P\vee(Q\&\neg Q)_J)\cap F(P_J) =$

$= (T(P_J)\cup(F(Q_J)\cap T(Q_J)))\cap F(P_J) =$

$= (T(P_J)\cap F(P_J))\cup(F(Q_J)\cap T(Q_J)\cap F(P_J)) \subseteq$

$\subseteq T(P_J)\cup((F(Q_J)\cup T(Q_J))\cap F(P_J))$.

Аналогічно $P\vee(S\&\neg S)\ ^R\!\models_C P$.

Таким чином, на додаток до того, що $^P\!\models_{T\vee F}$ та $^R\!\models_C$ нетранзитивні, для них стають неправильними деякі властивості декомпозиції формул, що не дає змоги безпосередньо будувати для них секвенційні числення. Проте для відношення $^R\!\models_C$ таку неприємність можливо обійти зведенням $^R\!\models_C$ до $^R\!\models_{TF}$. Справді, за теоремою 18 маємо: $\Gamma\ ^R\!\models_C \Delta \Leftrightarrow {}^{\neg}\Delta, \Gamma\ ^R\!\models_{TF} \Delta, {}^{\neg}\Gamma$. Це означає, що немає необхідності будувати секвенційне числення для формалізації $^R\!\models_C$, адже $\Gamma\ ^R\!\models_C \Delta \Leftrightarrow$ секвенція $_{\vdash}{}^{\neg}\Delta, {}_{\vdash}\Gamma, {}_{-|}\Delta, {}_{-|}{}^{\neg}\Gamma$ вивідна в численні для $^R\!\models_{TF}$.

Висновки

В роботі досліджено відношення логічного наслідку в логіках тотальних однозначних, часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Поряд із розглянутими раніше відношеннями типів T, F, TF, IR і DI, для логік квазіарних предикатів тут запропоновано відношення типів $T\vee F$ та C. Описано властивості відношень логічного наслідку для формул та множин формул. Розглянуто окремі випадки відношень, коли одна із множин формул порожня. Наведено приклади, які засвідчують відмінності одних відношень від інших. Показано, що відношення $^P\!\models_{T\vee F}$, та $^R\!\models_C$ нетранзитивні, для $^R\!\models_C$ та $^P\!\models_{T\vee F}$ неправильні деякі властивості декомпозиції формул, проте $^R\!\models_C$ моделюється за допомогою $^R\!\models_{TF}$. Встановлено співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.

2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С.* Першопорядкові композиційно-номінативні логіки із узагальненими реномінаціями // Проблеми програмування. – 2014. – № 2–3 – С. 17–28.
4. *Nikitchenko M., Shkilniak S.* Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates // Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. – Chisinau, Moldova. – P. 180–197.
5. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М.: РОССПЕН, 1996. – 304 с.

References

1. *Nikitchenko M. Shkilniak S.* (2008). Mathematical logic and theory of algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in Ukrainian).
2. *Nikitchenko M. and Shkilniak S.* (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in Ukrainian).
3. *Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S.* (2014). First-order composition-nominative logics with generalized renominations // In Problems in Progamming. N 2–3, P. 17–28 (in Ukrainian).
4. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates // In Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. – Chisinau, Moldova, P. 180–197.
5. *Smirnova E.* (1996). Logic and Philosophy. Moscow: ROSSPEN (in Russian).

Одержано 12.11.2015

Про автора:

Шкільняк Оксана Степаніна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – 76, у тому числі у фахових виданнях – 28.
Кількість наукових публікацій в іноземних виданнях – 8.
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 2590511 (роб.),
(067) 8879978.
E-mail: me.oksana@gmail.com