УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк

АЛГЕБРИ ЗАГАЛЬНИХ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРЕДИКАТІВ

Запропоновано та досліджено логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів – *GND*-предикатів. Такі предикати є узагальненням часткових неоднозначних предикатів реляційного типу. Основна увага приділена побудові композиційних алгебр *GND*-предикатів. Виділено різновиди *GND*-предикатів, показано їх зв'язок із *7*-значними тотальними детермінованими предикатами. Виділено 7-елементну алгебру істиннісних значень цих предикатів, описано усі її підалгебри. Такі підалгебри індукують відповідні алгебри *GND*-предикатів. Описано мови чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів та їх інтерпретації. Введено та досліджено відношення логічного *G*-наслідку.

Ключові слова: логіка, алгебра, недетермінований предикат, логічний наслідок.

Вступ

Апарат математичної логіки з великим успіхом використовується при розв’язанні широкого кола задач інформатики й програмування. Для цього зазвичай використовується класична логіка предикатів та будовані на її основі спеціальні логіки (модальні, темпоральні, алгоритмічні, програмні тощо). Водночас класична логіка має низку принципових обмежень, що ускладнює її застосування. Така логіка базується на традиційних математичних структурах однозначних тотальних скінченно-арних відображень, а для інформатики й програмування характерним є використання часткових недетермінованих відображень над неповними даними. Тому особливого значення набуває проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів, базованих на цих відображеннях. Такими є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) квазіарних предикатів. Широкий спектр різноманітних КНЛ описано та досліджено в [1–6]. В даній роботі ми пропонуємо нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів: КНЛ загальних недетермінованих предикатів. Дослідження композиційних предикатних алгебр таких логік є метою даної роботи.

В роботах [2–6] часткові недетерміновані (неоднозначні) предикати ми трактували як відповідності (відношення) між множиною даних ${}^{V}A$ та множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Їх названо *V-A-квазіарними предикатами реляційного типу*, або *R*-предикатами. Тут ${}^{V}A$ – множина всіх *V-A*-іменних множин (*V-A*-ІМ). Нагадаємо, що *V-A*-ІМ – це однозначна функція вигляду $d: V \to A$, де V – множина предметних імен (змінних), A – множина предметних (базових) значень.

Кожний класичний предикат при застосуванні до певного даного приймає одне з двох значень: T чи F. Кожний *R*-предикат $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ на даному $d \in {}^{V}A$ може приймати лише значення T, лише значення F, обидва значення T та F, а також може бути невизначеним. Отже, для *R*-предиката маємо 4 можливості для прийняття значення при застосуванні до певного даного. Нехай $P[d]$ – множина значень, які *R*-предикат $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ може прийняти на $d \in {}^{V}A$. Тоді $P[d]$ – це одне із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$. Таким чином, кожний *R*-предикат P однозначно задається за допомогою 2-х множин: область істинності $T(P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P[d]\}$, область хибності $F(P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P[d]\}$.

В загальному випадку поняття недетермінованого предиката можна ввести наступним чином. Недетермінований предикат $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ при застосуванні до даного $d \in {}^{V}A$ може приймати значення T, приймати значення F, а також може не приймати жодного значення (бути невизначеним). Для кожного $d \in {}^{V}A$ має бути принаймні одна з цих ситуацій, що загалом дає 7 можливостей для прийняття значення при застосуванні до певного даного. Нехай $P[d]$ – множина значень, які недетермінований предикат P може прийняти на $d\in{}^{V}A$, тоді $P[d]$ може бути одним із $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$, $\{T, \varnothing\}$, $\{F, \varnothing\}$, $\{T, F, \varnothing\}$.

Загальні недетерміновані квазіарні предикати назвемо *GND-предикатами*.

Поняття загального недетермінованого предиката можна пояснити наступним чином. Уявімо собі складний предикат-механізм, утворений із базових предикатів-механізмів за допомогою певних засобів (композицій). Такий складний предикат може містити багато екземплярів одного і того ж базового предиката. На деяких даних через нечіткість та невизначеність інформації базовий предикат може функціонувати недетермінованим чином: на одному і тому ж даному одні екземпляри можуть приймати значення T, інші екземпляри – значення F, а деякі його екземпляри можуть не приймати жодного значення. Зрозуміло, що композиції таких недетермінованих предикатів як засоби побудови складніших предикатів із простіших мають враховувати ці особливості.

Загальні недетерміновані квазіарні предикати запропоновано в [7]. Огляд недетермінованих пропозиційних логік та логік недетермінованих n-арних предикатів наведено в [8].

Поняття, які в цій статті не визначаються, будемо тлумачити в сенсі [2, 5].

1. Недетерміновані квазіарні предикати та їх композиції

Кожний V-A-квазіарний GND-предикат P можна однозначно описати за допомогою 3-х множин: області істинності $T(P)$, області хибності $F(P)$ та області невизначеності $\perp(P)$. Вони задаються так:

– $T(P) = \{d \mid P$ може приймати на d значення $T\}$,

– $F(P) = \{d \mid P$ може приймати на d значення $F\}$,

– $\perp(P) = \{d \mid P$ може бути невизначеним на $d\}$.

Кожне $d\in{}^{V}A$ має бути принаймні в одній з цих множин, звідки загальна умова

$$F(P) \cup T(P) \cup \perp(P) = {}^{V}A \qquad \text{(G)}$$

Клас V-A-квазіарних GND-предикатів позначимо $PrG_{V\text{–}A}$.

Визначення неістотного предметного імені для GND-предикатів таке ж, як для R-предикатів (див. [2, 5]).

Ім'я $x\in V$ неістотне для предиката P, якщо для довільних $d_1, d_2 \in{}^{V}A$ маємо:

$$d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x} \Rightarrow P(d_1) = P(d_2).$$

Опишемо тепер композиції квазіарних GND-предикатів.

Традиційні пропозиційні композиції (логічні зв'язки) $\neg$, $\vee$, & та $\to$ задамо через області істинності, хибності та невизначеності відповідних предикатів:

$T(\neg P) = F(P)$,

$F(\neg P) = T(P)$,

$\perp(\neg P) = \perp(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P) \cup T(Q)$,

$F(P\vee Q) = F(P) \cap F(Q)$,

$\perp(P\vee Q) = (\perp(P) \cap \perp(Q)) \cup$
$\cup (\perp(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap \perp(Q))$;

$T(P\&Q) = T(P) \cap T(Q)$,

$F(P\&Q) = F(P) \cup F(Q)$,

$\perp(P\&Q) = (\perp(P) \cap \perp(Q)) \cup$
$\cup (\perp(P) \cap T(Q)) \cup (T(P) \cap \perp(Q))$;

$T(P\to Q) = F(P) \cup T(Q)$,

$F(P\to Q) = T(P) \cap F(Q)$,

$\perp(P\to Q) = (\perp(P) \cap \perp(Q)) \cup$
$\cup (\perp(P) \cap F(Q)) \cup (T(P) \cap \perp(Q))$.

При визначенні $\perp(P\vee Q)$ беремо до уваги таке: $P\vee Q$ невизначений на d $\Leftrightarrow$ P та Q невизначені на d *або* P невизначений на d та Q хибний на d *або* Q невизначений на d та P хибний на d.

Подібним чином обґрунтовуємо визначення $\perp(P\&Q)$ та $\perp(P\to Q)$.

$\neg$ та $\vee$ – це *базові* композиції GND-предикатів на пропозиційному рівні.

Композиції $\to$ та & є *похідними*, вони задаються через $\vee$ та $\neg$:

$P\to Q = \neg P \vee Q$;

$P\&Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$.

Розглянемо характерні властивості GND-предикатів.

Твердження 1. Із визначень отримуємо такі співвідношення:

– $T(P\vee Q)\cup\perp(P\vee Q) =$
$= T(P)\cup\perp(P)\cup T(Q)\cup\perp(Q)$;

– $F(P\vee Q)\cup\perp(P\vee Q) =$
$= (F(P)\cup\perp(P))\cap(F(Q)\cup\perp(Q))$;

– $T(P\&Q)\cup\perp(P\&Q) =$
$= (T(P)\cup\perp(P))\cap(T(Q)\cup\perp(Q))$;

– $F(P\&Q)\cup\perp(P\&Q) =$
$= F(P)\cup\perp(P)\cup F(Q)\cup\perp(Q)$.

Збіжність областей істинності та хибності предикатів *не означає* збіжності областей невизначеності.

Приклад 1. Маємо

$T(P\&Q\vee P) = T((P\vee Q)\,\&\,P) = T(P)$,
$F(P\&Q\vee P) = F((P\vee Q)\,\&\,P) = F(P)$;

водночас $\perp(P\&Q\vee P) = \perp((P\vee Q)\,\&\,P) =$
$= \perp(P)\cup(F(P)\cap T(P)\cap\perp(Q))$.

Це можна трактувати так, що при ускладненні опису предиката зростає невизначеність його функціонування (наростає ентропія опису). При переході від простого опису P до складнішого із залученням Q до опису P, до області невизначеності $\perp(P)$ додається компонента $F(P)\cap T(P)\cap\perp(Q)$, яка може бути $\neq\varnothing$.

Таким чином, в класі R-предикатів P, $(P\vee Q)\,\&\,P$, $P\&Q\vee P$ збігаються, водночас в класі GND-предикатів $(P\vee Q)\,\&\,P$ та $P\&Q\vee P$ збігаються, проте вони не збігаються із P.

Приклад 2. Можна показати:

$\perp((P\&R)\vee(Q\&R)) = \perp((P\vee Q)\&R)\,\cup$
$\cup\,((\perp(P)\cup\perp(Q))\cap F(R)\cap T(R))$.

Твердження 2. Для GND-предикатів маємо такі закони традиційної логіки.

1) Комутативність $\vee$ та $\&$:

$P\vee Q = Q\vee P$; $P\&Q = Q\&P$.

2) Асоціативність $\vee$ та $\&$:

$(P\vee Q)\vee R = P\vee(Q\vee R)$;

$(P\&Q)\&R = P\&(Q\&R)$.

3) Зняття подвійного заперечення:

$\neg\neg P = P$.

4) Ідемпотентність $\vee$ та $\&$:

$P = P\vee P$; $P = P\&P$.

5) Закони де Моргана:

$\neg(P\vee Q) = \neg P\,\&\,\neg Q$;

$\neg(P\&Q) = \neg P\vee\neg Q$.

Водночас, як засвідчують приклади 1 та 2, для GND-предикатів не виконуються такі важливі закони традиційної логіки, як закони поглинання та закони дистрибутивності для $\vee$ та $\&$.

Композицію *реномінації* $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ для GND-предикатів можна задати традиційно:

$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)[d] = P[\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)]$ для всіх $d\in{}^{V}\!A$.

Таку композицію можна визначити через області істинності, хибності та невизначеності відповідного предиката $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$:

$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d\,|\,\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in T(P)\}$;

$F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d\,|\,\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in F(P)\}$;

$\perp(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d\,|\,\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in\perp(P)\}$.

Опишемо для GND-предикатів композиції *квантифікації* $\exists x$ та $\forall x$.

Задамо предикат $\exists xP$ через його області істинності, хибності, невизначеності.

$T(\exists xP) = \{d\,|\,d\,\nabla\,x\mapsto a\in T(P)$ для деякого $a\in A\}$;

$F(\exists xP) = \{d\in{}^{V}\!A\,|\,d\,\nabla\,x\mapsto a\in F(P)$ для всіх $a\in A\}$;

$\perp(\exists xP) = \{d\,|\,d\nabla x\mapsto a\in\perp(P)\cup F(P)$ для всіх $a\in A$ та $d\nabla x\mapsto b\in\perp(P)$ для деякого $b\in A\}$.

Композиція $\forall x$ є похідною, її задаємо традиційним чином: $\forall xP = \neg\exists x\neg P$.

Твердження 3. $d\in\perp(\exists xP)\cup T(\exists xP)$ $\Leftrightarrow d\,\nabla\,x\mapsto b\in T(P)\cup\perp(P)$ для деякого $b\in A$.

$d\in\perp(\exists xP)\cup F(\exists xP)\Leftrightarrow$
$d\,\nabla\,x\mapsto a\in F(P)\cup\perp(P)$ для всіх $a\in A$.

Основні властивості композицій реномінації та квантифікації GND-предикатів такі ж, як для R-предикатів (див. [2–6]).

Наведемо властивості, пов'язані з реномінацією.

R) $\mathrm{R}(P)=P$ – тотожна реномінація.

RI) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∃R) $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xP)=\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)$.

RU) $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, якщо z неістотне для P.

Ren) $\exists yP=\exists z\mathrm{R}_{z}^{y}(P)$, якщо z неістотне для P.

R¬) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P)=\neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∨) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\vee Q)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\vee\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$.

RR) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$ – згортка реномінацій (див. [2, 5]).

R∃s) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP)=\exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P),\ \ y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

R∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP)=\exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{z}^{y}(P)$, якщо z неістотне для P та $z\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

Для опису властивостей елімінації кванторів використовують [5] спеціальні предикати-індикатори Ez наявності в даних компоненти з відповідним $z\in V$. Такі предикати Ez тотальні та однозначні, на рівні *GND*-предикатів задаємо їх так:

$T(Ez)=\{d\mid d(z)\downarrow\}$,
$F(Ez)=\{d\mid d(z)\uparrow\}$,
$\perp(Ez)=\varnothing$.

Твердження 4.

$\perp(\vartheta\vee Ez)=\perp(\vartheta)\cap F(Ez)=\perp(\vartheta)\cap\{d\mid d(z)\uparrow\}$;
$\perp(\vartheta\& Ez)=\perp(\vartheta)\cap T(Ez)=\perp(\vartheta)\cap\{d\mid d(z)\downarrow\}$;
$\perp(\vartheta\& Ez)\cup F(\vartheta\& Ez)=$
$=\perp(\vartheta)\cup F(\vartheta)\cup\{d\mid d(z)\uparrow\}$.

Властивості елімінації кванторів для *GND*-предикатів опишемо в наступних роботах.

Композиції $\neg,\vee,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x$ – це *базові композиції* чистих першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів (ЧКНЛ). Позначимо $CQ=\{\neg,\vee,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x\}$.

Алгебру $AQG_{V\text{–}A}=(PrG_{V\text{–}A},CQ)$ назвемо *чистою першопорядковою композиційною алгеброю GND-предикатів.*

Опишемо різновиди *GND*-предикатів. Відносна незалежність області невизначеності від областей істинності та хибності (лише умова $F(P)\cup T(P)\cup\perp(P)={}^{V}\!A$) дає змогу виділити низку різноманітних класів *GND*-предикатів.

V-A-квазіарний *GND*-предикат P:

– *R-предикат*, якщо $\perp(P)=\overline{T(P)\cup F(P)}$;
– *однозначний*, якщо $T(P)\cap F(P)=\varnothing$;
– *однозначний R-предикат*, якщо
 $T(P)\cap F(P)=\varnothing$ та $\perp(P)=\overline{T(P)\cup F(P)}$;
– *тотальний*, якщо $T(P)\cup F(P)={}^{V}\!A$;
– *тотальний R-предикат*, якщо $\perp(P)=\varnothing$;
– *виконуваний*, якщо $T(P)\neq\varnothing$;
– *неспростовний*, якщо $F(P)=\varnothing$;
– *неспростовний R-предикат*, якщо
 $F(P)=\varnothing$ та $\perp(P)=\overline{T(P)}$;
– *тотально істинний*, якщо $T(P)={}^{V}\!A$,
– *тотально істинний R-предикат*, якщо
 $T(P)={}^{V}\!A$ та $\perp(P)=\varnothing$;
– *тотожно істинний* (позн. T), якщо
 $F(P)=\perp(P)=\varnothing$ (тоді $T(P)={}^{V}\!A$);
– *тотально хибний*, якщо $F(P)={}^{V}\!A$;
– *тотально хибний R-предикат*, якщо
 $F(P)={}^{V}\!A$ та $\perp(P)=\varnothing$;
– *тотально невизначений*, якщо $\perp(P)={}^{V}\!A$;
– *тотожно хибний* (позн F), якщо
 $T(P)=\perp(P)=\varnothing$ (тоді $F(P)={}^{V}\!A$);
– *тотально істинно-невизначений* (позн. $\mathrm{T}_{\uparrow}$), якщо $T(P)=\perp(P)={}^{V}\!A$ та $F(P)=\varnothing$;
– *тотально хибно-невизначений* (позн. $\mathrm{F}_{\uparrow}$), якщо $F(P)=\perp(P)={}^{V}\!A$ та $T(P)=\varnothing$;
– *тотожно невизначений* (позн. $\perp$), якщо
 $T(P)=F(P)=\varnothing$ (тоді $\perp(P)={}^{V}\!A$);
– *тотально амбівалентний*, якщо
 $T(P)=F(P)={}^{V}\!A$;
– *тотально амбівалентний R-предикат* (позн. Υ), якщо $T(P)=F(P)={}^{V}\!A$ та $\perp(P)=\varnothing$;
– *тотально недетермінований* (позн. $\Upsilon_{\uparrow}$), якщо $T(P)=F(P)=\perp(P)={}^{V}\!A$.

В класі *GND*-предикатів можна виділити 7 константних: T, F, $\perp$, $\mathrm{T}_{\uparrow}$, $\mathrm{F}_{\uparrow}$, Υ, $\Upsilon_{\uparrow}$.

Однозначні *GND*-предикати, тотальні *GND*-предикати, тотальні однозначні *GND*-предикати, однозначні *R*-предикати, тотальні *R*-предикати, тотальні однозначні *R*-предикати назвемо відповідно *SG*-предикатами, *TG*-предикатами, *TSG*-предикатами, *P*-предикатами, *T*-предикатами, *TS*-предикатами. Класи *V*-*A*-квазіарних *SG*-предикатів, *TG*-предикатів, *TSG*-предикатів, *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів будемо позначати $PrSG_{V\text{–}A}$, $PrTG_{V\text{–}A}$, $PrTSG_{V\text{–}A}$, $PrP_{V\text{–}A}$, $PrT_{V\text{–}A}$, $PrTS_{V\text{–}A}$.

Можину $F(P) \cap T(P)$ назвемо *областю амбівалентності* *GND*-предиката *P*.

Беручи до уваги області невизначеності та амбівалентності, можна також виділити специфічні класи *GND*-предикатів.

V-*A*-квазіарний *GND*-предикат *P*:

– *AU*-предикат, якщо $F(P) \cap T(P) \subseteq \perp(P)$;

– *UA*-предикат, якщо $\perp(P) \subseteq F(P) \cap T(P)$;

– $U_{=}A$-предикат, якщо $\perp(P) = F(P) \cap T(P)$;

– *AnU*-предикат, якщо $T(P) \cap F(P) \subseteq \overline{\perp(P)}$;

– *ImG*-предикат, якщо $\overline{\perp(P)} \subseteq T(P) \cap F(P)$.

ImG-предикати – це *GND*-предикати з *неточними* (imprecise) істиннісними значеннями. Це означає, що не існує даних на яких *ImG*-предикат приймає значення лише *T* або лише *F*. Для відповідного *TD*7-предиката маємо відсутність *T* та *F* у множині істиннісних значень. Безпосередньо *ImG*-умова формулюється так:

$$T(P) \setminus F(P) \cup T(P) \setminus F(P) \subseteq \perp(P) \quad (Im)$$

Водночас за умови (G) умова (*Im*) спрощується до наведеної вище.

Твердження 5. За умови (G) маємо

$$(Im) \Leftrightarrow \overline{\perp(P)} \subseteq T(P) \cap F(P).$$

Маємо $T(P) \setminus F(P) \cup T(P) \setminus F(P) \subseteq \perp(P)$ $\Leftrightarrow \overline{T(P) \setminus F(P)} \cap \overline{F(P) \setminus T(P)} \supseteq \overline{\perp(P)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\overline{T(P)} \cup F(P)) \cap (\overline{F(P)} \cup T(P)) \supseteq \overline{\perp(P)}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}) \cup (F(P) \cap T(P)) \supseteq \overline{\perp(P)}.$$

Звідси $\overline{\perp(P)} \subseteq T(P) \cap F(P) \Rightarrow (Im)$.

Тепер $(Im) \Rightarrow \overline{\perp(P)} \subseteq T(P) \cap F(P)$. Нехай супротивне: (*Im*) і для деякого $d \in {}^{V}A$ маємо $d \in \overline{\perp(P)}$ та $d \notin F(P) \cap T(P)$; згідно (*Im*) тоді необхідно $d \in \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}$. Отже, $d \in \overline{\perp(P)} \cap \overline{T(P)} \cap \overline{F(P)}$, звідки маємо $d \notin F(P) \cup T(P) \cup \perp(P)$, що суперечить(G).

Кожний тотально невизначений та кожний тотально амбівалентний предикат є *ImG*-предикатом.

Для *R*-предикатів *ImG*-умова дає вироджений клас із умовою $T(P) = F(P)$.

Умова $T(P) \cap F(P) \subseteq \overline{\perp(P)}$ рівносильна умові $T(P) \cap F(P) \cap \perp(P) = \varnothing$, яка гарантована для *R*-предикатів, тому кожний *R*-предикат є *AnU*-предикатом. Кожний *SG*-предикат є *AnU*-предикатом, проте є *SG*-предикати, які не є *R*-предикатами.

Неоднозначні *AU*-предикати не є *R*-предикатами. *SG*-предикати гарантовано є *AU*-предикатами.

Тотальні *R*-предикати є *UA*-предикатами, водночас кожний *UA*-предикат та кожний $U_{=}A$-предикат з умовою $\perp(P) \neq \varnothing$ не є *R*-предикатом.

AU-предикати та $U_{=}A$-предикати із умовою $\perp(P) = \varnothing$ є *TS*-предикатами.

2. Алгебри *TD*7-предикатів

Множиною значень, які *GND*-предикат приймає на конкретному даному, може бути одна з $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$, $\{T, \varnothing\}$, $\{F, \varnothing\}$, $\{T, F, \varnothing\}$. Скорочено позначимо ці значення ↑, *T*, *F*, *TF*, *T*↑, *F*↑, *TF*↑.

Таким чином, *GND*-предикати можна моделювати як *7-значні тотальні детерміновані предикати*. Назвемо їх *TD*7-предикатами. Клас *V*-*A*-квазіарних *TD*7-предикатів позначимо $PrTD7_{V\text{–}A}$. Множиною істиннісних значень *TD*7-предикатів є $TV_7 = \{$↑, *T*, *F*, *TF*, *T*↑, *F*↑, *TF*↑$\}$.

На пропозиційному рівні значення складного предиката цілком визначається значеннями його компонент, тому пропозиційні композиції *TD*7-предикатів можна задавати традиційним чином – за допомогою таблиць істинності.

Композиції заперечення $\neg_*$ та диз'юнкції $\vee_*$ задаємо так (табл. 1, 2):

Таблиця 1. Композиція $\neg_*$

P	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
$\neg_*$P	*F*	*T*	*TF*	↑	*F*↑	*T*↑	*TF*↑

Таблиця 2. Композиція $\vee_*$

$\vee_*$	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
TF	*T*	*TF*	*TF*	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑
↑	*T*	↑	*T*↑	↑	*T*↑	↑	*T*↑
T↑	*T*	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑
F↑	*T*	*F*↑	*TF*↑	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
TF↑	*T*	*TF*↑	*TF*↑	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑

Композиції кон'юнкції $\&_*$ та імплікації $\to_*$ через таблиці істинності можна подати так (табл. 3, 4):

Таблиця 3. Композиція $\&_*$

$\&_*$	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
T	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
TF	*TF*	*F*	*TF*	*F*↑	*TF*↑	*F*↑	*TF*↑
↑	↑	*F*	*F*↑	↑	↑	*F*↑	*F*↑
T↑	*T*↑	*F*	*TF*↑	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F↑	*F*↑	*F*	*F*↑	*F*↑	*F*↑	*F*↑	*F*↑
TF↑	*TF*↑	*F*	*TF*↑	*F*↑	*TF*↑	*F*↑	*TF*↑

Таблиця 4. Композиція $\to_*$

$P \to_* Q$	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
T	*T*	*F*	*TF*	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
TF	*T*	*TF*	*TF*	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑
↑	*T*	↑	*T*↑	↑	*T*↑	↑	*T*↑
T↑	*T*	*F*↑	*TF*↑	↑	*T*↑	*F*↑	*TF*↑
F↑	*T*	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑
TF↑	*T*	*TF*↑	*TF*↑	*T*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑

Композиції $\neg_*$ та $\vee_*$ – це *базові* пропозиційні композиції *TD*7-предикатів.

Алгебру $(PrTD7_{V\text{–}A}, \{\neg_*, \vee_*\})$ назвемо *пропозиційною композиційною алгеброю TD*7*-предикатів*

Композиції $\to_*$ та $\&_*$ є *похідними*, вони виражаються через $\neg_*$ та $\vee_*$:

$$P \to_* Q = \neg P \vee_* Q;$$

$$P \&_* Q = \neg_*(\neg_* P \vee_* \neg_* Q).$$

Зрозуміло, що множина істиннісних значень TV_7 замкнена щодо базових композицій $\neg_*$, $\vee_*$ та щодо похідних $\&_*$, $\to_*$.

Алгебру $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$ назвемо *пропозиційною алгеброю істиннісних значень TD*7*-предикатів*.

Для множини TV_7 природним чином задамо впорядкування щодо $\vee_*$ та $\&_*$.

Впорядкування щодо $\vee_*$ задамо так:

$$\alpha \to \beta, \text{ якщо } \alpha \vee_* \beta = \beta.$$

Діаграма Хассе для TV_7 щодо $\vee_*$:

$F{\uparrow} \to {\uparrow} \to T{\uparrow} \to T$
↗ ↘ ↗
$F \to TF \to TF{\uparrow}$

Впорядкування щодо $\&_*$ задамо так:

$$\alpha \to \beta, \text{ якщо } \alpha \&_* \beta = \alpha.$$

Діаграма Хассе для TV_7 щодо $\&_*$:

${\uparrow} \to T{\uparrow} \to T$
↗ ↗ ↗
$F \to F{\uparrow} \to TF{\uparrow} \to TF$

Таким чином TV_7 *не утворює* решітки істиннісних значень.

Причиною цього є специфічна поведінка TF та $TF{\uparrow}$ щодо $\vee_*$ і $\&_*$:

$$TF \vee_* TF{\uparrow} = TF \&_* TF{\uparrow} = TF{\uparrow}.$$

Це означає, що $\vee_*$ та $\&_*$ на множині істиннісних значень $\{TF, TF{\uparrow}\}$ невідмінні.

Згідно інволютивності TF і $TF{\uparrow}$ тоді

$$\neg_*(TF \vee_* TF{\uparrow}) = \neg_*(TF \&_* TF{\uparrow}) =$$

$$= TF \vee_* TF{\uparrow} = TF \&_* TF{\uparrow} = TF{\uparrow}.$$

Алгебра ATV_7 індукує композиційні алгебри *GND*-предикатів на різних рівнях.

Далі обмежимось розглядом алгебр *пропозиційного* рівня. Таким чином, будемо розглядати алгебру GND-предикатів $APG_{V\text{–}A} = (PrG_{V\text{–}A}, \{\neg, \vee\})$ та її підалгебри.

Зв'язок алгебри істиннісних значень ATV_7 та композиційної предикатної алгебри $APG_{V\text{–}A}$ встановлюється так.

Наявність певного істиннісного значення υ в TV_7 означає, що існують предикат $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі, що $\upsilon\in P[d]$.

Звідси отримуємо:

$\uparrow\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in\perp(P)$, $d\notin T(P)$, $d\notin F(P)$;

$T\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in T(P)$, $d\notin\perp(P)$, $d\notin F(P)$;

$F\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in F(P)$, $d\notin\perp(P)$, $d\notin T(P)$;

$TF\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in T(P)$, $d\in F(P)$, $d\notin\perp(P)$;

$T\!\uparrow\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in T(P)$, $d\in\perp(P)$, $d\notin F(P)$;

$F\!\uparrow\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in F(P)$, $d\in\perp(P)$, $d\notin T(P)$;

$TF\!\uparrow\in TV_7$ $\Leftrightarrow$ існують $P\in PrG_{V\text{–}A}$ та $d\in{}^VA$ такі: $d\in T(P)$, $d\in F(P)$, $d\in\perp(P)$.

3. Підалгебри $APG_{V\text{–}A}$, індуковані підалгебрами ATV_7

Спочатку описуємо підалгебри алгебри ATV_7. Для цього виділяємо підмножини TV_7, замкнені щодо $\{\neg_*, \vee_*\}$.

Кожна підалгебра алгебри ATV_7 індукує відповідну підалгебру алгебри $TD7$-предикатів $ATD7_{V\text{–}A} = (PrTD7_{V\text{–}A}, \{\neg_*, \vee_*\})$. Кожна така підалгебра алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$ індукує відповідну підалгебру алгебри GND-предикатів $APG_{V\text{–}A}$.

6-значні предикати. Видалення в TV_7 одного з T, F, $T\!\uparrow$, $F\!\uparrow$ без видалення відповідного дуального F, T, $F\!\uparrow$, $T\!\uparrow$ веде до незамкненості щодо $\neg_*$, тому видаляти можна лише парами T, F чи $T\!\uparrow, F\!\uparrow$. Тому для утворення 6-елементних підалгебр TV_7 можна видаляти лише один із $\uparrow$, TF, $TF\!\uparrow$.

Підмножина $\{\uparrow, T, F, TF, T\!\uparrow, F\!\uparrow\}$ *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF\vee_* F\!\uparrow = TF\!\uparrow$.

Таким чином, маємо дві 6-елементні підмножини TV_7, замкнені щодо $\vee_*$:

$$TV_{6\_1} = \{\uparrow, T, F, T\!\uparrow, F\!\uparrow, TF\!\uparrow\};$$

$$TV_{6\_2} = \{T, F, TF, T\!\uparrow, F\!\uparrow, TF\!\uparrow\}.$$

Множина TV_{6_1} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{6_1}.

Діаграма Хассе для TV_{6_1} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$\begin{tikzcd} & F\uparrow \arrow[r] \arrow[dr] & \uparrow \arrow[r] & T\uparrow \arrow[r] & T \\ F \arrow[ur] & & TF\uparrow \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

ATV_{6_1} індукує підалгебру $A^1TD6_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. Далі, $A^1TD6_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{6\_1}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Для $AP^{6\_1}G_{V\text{–}A}$ маємо загальну умову

$$F(P)\cup T(P)\cup\perp(P) = {}^VA \qquad \text{(G)}$$

Відсутність TF у множині TV_{6_1} задає обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P)\cap T(P)\subseteq\perp(P).$$

Таким чином, $AP^{6\_1}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра AU-предикатів. Тому $AP^{6\_1}G_{V\text{–}A}$ далі будемо називати $APAU_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{6_2} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{6_2}.

Діаграма Хассе для TV_{6_2} щодо $\vee_*$:

$$\begin{tikzcd} & F\uparrow \arrow[dr] & & T\uparrow \arrow[r] & T \\ F \arrow[ur] \arrow[r] & TF \arrow[r] & TF\uparrow \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Діаграма Хассе для TV_{6_2} щодо $\&_*$:

$$\begin{tikzcd} & & & T\uparrow \arrow[r] & T \\ F \arrow[r] & F\uparrow \arrow[r] & TF\uparrow \arrow[r] \arrow[ur] & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ATV_{6_2} індукує підалгебру $A^2TD6_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. Далі, $A^2TD6_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{6\_2}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність $\uparrow$ у множині TV_{6_2} задає таке обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P)\cup T(P) = {}^VA.$$

Це гарантує виконання умови (G).

Таким чином, $AP^{6\_2}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра TG-предикатів. Тому $AP^{6\_2}G_{V\text{–}A}$ далі будемо називати $APTG_{V\text{–}A}$.

5-значні предикати. Замкненість щодо $\neg_*$ вимагає для носія алгебри істиннісних значень одночасної наявності чи відсутності пари T, F та пари $T\!\uparrow, F\!\uparrow$. Тому для утворення 5-елементних підалгебр можна в TV_7 видаляти: два з елементів ↑, TF, TF↑; або пару T, F; або пару T↑, F↑. Отже, маємо 5 варіантів 5-елементних підалгебр.

Підмножина {T, F, T↑, F↑, TF} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Підмножина {↑, T, F, TF, TF↑} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$

Залишаються три 5-елементні підмножини TV_7, які замкнені щодо $\vee_*$:

$TV_{5\_1} = \{\uparrow, T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$;

$TV_{5\_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$;

$TV_{5\_3} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Множина TV_{5_1} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{5_1}.

Діаграма Хассе для множини TV_{5_1} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F \to F\uparrow \to \uparrow \to T\uparrow \to T$$

ATV_{5_1} індукує підалгебру $A^1TD5_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. Далі, $A^1TD5_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{5\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність TF та TF↑ у TV_{5_1} задає таке обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P) \cap T(P) = \varnothing.$$

Таким чином, $AP^{5\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра SG-предикатів. Тому $AP^{5\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ далі будемо називати $APSG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{5_2} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{5_2}.

Діаграма Хассе для множини TV_{5_2} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F \to F\uparrow \to TF\uparrow \to T\uparrow \to T$$

ATV_{5_2} індукує підалгебру $A^2TD5_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. Далі, $A^2TD5_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{5\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність TF та ↑ у TV_{5_2} задає такі обмеження на алгебру $AP^{5\text{–}2}G_{V\text{–}A}$:

$$F(P) \cap T(P) \subseteq \perp(P);$$

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA.$$

Умова $F(P) \cup T(P) = {}^VA$ гарантує виконання загальної умови (G).

Отже, $AP^{5\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотальних AU-предикатів. Тому $AP^{5\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ далі будемо називати $APTAU_{V\text{–}A}$.

Те, що алгебри $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ ізоморфні, будемо позначати $\boldsymbol{A} \sim_{iz} \boldsymbol{B}$.

Твердження 6. $ATV_{5\_1} \sim_{iz} ATV_{5\_2}$.

Наслідок 1. $APSG_{V\text{–}A} \sim_{iz} APTA\_U_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{5_3} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{5_3}.

Діаграма Хассе для TV_{5_3} щодо $\vee_*$:

$$\begin{array}{ccccc} F\uparrow & \to & \uparrow & \to & T\uparrow \\ & \searrow & & \nearrow & \\ TF & \to & TF\uparrow & & \end{array}$$

Діаграма Хассе для TV_{5_3} щодо $\&_*$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \uparrow & \to & T\uparrow \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ F\uparrow & \to & TF\uparrow & \to & TF \end{array}$$

ATV_{5_3} індукує підалгебру $A^3TD5_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. Далі, $A^3TD5_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{5\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність T та F у TV_{5_3} задає таке обмеження на клас GND-предикатів:

$$\overline{\perp(P)} \subseteq T(P) \cap F(P).$$

Отже, $AP^{5\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра ImG-предикатів; далі її називаємо $APImG_{V\text{–}A}$.

4-значні предикати. Необхідність замкненості щодо $\neg_*$ вимагає для носія алгебри істиннісних значень одночасної наявності чи відсутності пар T, F та $T\uparrow, F\uparrow$. Невключення обох цих пар для 4-елементних носіїв неможливе. Тому для утворення 4-елементних підалгебр можна в TV_7 видаляти: трійку ↑, TF, TF↑; або пару T, F з одним із ↑, TF, TF↑; або пару T↑, F↑ з одним із ↑, TF, TF↑. Тому до розгляду на замкненість щодо $\vee_*$ маємо 7 варіантів.

Підмножина {↑, T, F, TF} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$

Підмножина {↑, T, F, TF↑} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$

Підмножина {↑, T↑, F↑, TF} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$

Залишаються чотири 4-елементні підмножини TV_7, вони замкнені щодо $\vee_*$:

$TV_{4\_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$;

$TV_{4\_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$;

$TV_{4\_3} = \{TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$;

$TV_{4\_4} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$.

Множина TV_{4_1} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{4_1}.

Діаграма Хассе для множини TV_{4_1} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F \rightarrow F\uparrow \rightarrow \rightarrow T\uparrow \rightarrow T$$

ATV_{4_1} індукує підалгебру $A^1TD4_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^1TD4_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{4\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність $\uparrow$, TF, $TF\uparrow$ у TV_{4_1} задає обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA;$$

$$F(P) \cap T(P) = \varnothing.$$

Таким чином, $AP^{4\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра TSG-предикатів. Алгебру $AP^{4\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ далі називаємо $APTSG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{4_2} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{4_2}.

Діаграма Хассе для TV_{4_2} щодо $\vee_*$:

$$F \rightarrow TF \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T$$

Діаграма Хассе для TV_{4_2} щодо $\&_*$:

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow TF \rightarrow T$$

ATV_{4_2} індукує підалгебру $A^2TD4_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^2TD4_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{4\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність $\uparrow$, $T\uparrow$ та $F\uparrow$ і наявність $TF\uparrow$ у множині TV_{4_2} задає такі обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA;$$

$$\perp(P) \subseteq F(P) \cap T(P).$$

Отже, $AP^{4\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотальних UA-предикатів, або TUA-предикатів. Алгебру $AP^{4\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ назвемо $APTUA_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{4_3} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{4_3}.

Діаграма Хассе для TV_{4_3} щодо $\vee_*$:

$$\begin{array}{ccccc} F\uparrow & \rightarrow & TF\uparrow & \rightarrow & T\uparrow \\ & \nearrow & & & \\ TF & & & & \end{array}$$

Діаграма Хассе для TV_{4_3} щодо $\&_*$:

$$\begin{array}{ccccc} F\uparrow & \rightarrow & TF\uparrow & \rightarrow & T\uparrow \\ & & & \searrow & \\ & & & & TF \end{array}$$

ATV_{4_3} індукує підалгебру $A^3TD4_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^3TD4_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{4\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність $\uparrow$, T, F у множині TV_{4_3} задає обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA.$$

$$\overline{\perp(P)} \subseteq T(P) \cap F(P).$$

$AP^{4\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотальних ImG-предикатів, або $TImG$-предикатів. Алгебру $AP^{4\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ назвемо $APTImG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{4_4} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{4_4}. Діаграма Хассе для TV_{4_4} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$\begin{array}{ccccc} F\uparrow & \rightarrow & \uparrow & \rightarrow & T\uparrow \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & TF\uparrow & & \end{array}$$

ATV_{4_4} індукує підалгебру $A^4TD4_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^4TD4_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{4\text{–}4}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{4_4} задає дуже просте обмеження на клас GND-предикатів:

$$\perp(P) = {}^VA.$$

Отже, $AP^{4\text{–}4}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотально невизначених GND-предикатів, які можна трактувати як предикати з *тільки неточними* (only imprecise) істиннісними значеннями. Назвемо їх OIG-предикатами. Алгебру $AP^{4\text{–}4}G_{V\text{–}A}$ називаємо $APOIG_{V\text{–}A}$.

Зауваження. Множина $\{\uparrow, T, F, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Тому вона не утворює підалгебри алгебри ATV_7. Водночас $\{\uparrow, T, F, TF\}$ замкнена щодо композиції $\vee_B$ 4-значної логіки Белнапа [2]. Це дає змогу виділити в алгебрі GND-предикатів $APG_{V\text{–}A}$ підалгебру $APOIG_{V\text{–}A}$, ізоморфну алгебрі R-предикатів $APR_{V\text{–}A}$ (клас R-предикатів виділяється в класі GND-предикатів умовою $\perp(P) = \overline{T(P) \cup F(P)}$).

Твердження 7. Алгебра ATV_{4_4} ізоморфна алгебрі Белнапа.

Твердження 8. ATV_{4_4} ізоморфна алгебрі істиннісних значень R-предикатів.

Наслідок 2. $APOIG_{V\text{–}A} \sim_{iz} APR_{V\text{–}A}$.

3-значні предикати. Необхідність замкненості щодо $\neg_*$ вимагає для носія алгебри істиннісних значень одночасної наявності чи відсутності пар T, F та $T\uparrow, F\uparrow$.

Тому для утворення 3-елементних підалгебр можна: до пари T, F додавати одне з $\uparrow$, TF, $TF\uparrow$; до пари $T\uparrow$, $F\uparrow$ додавати одне з $\uparrow$, TF, $TF\uparrow$; взяти трійку $\uparrow$, TF, $TF\uparrow$. Отже, до розгляду маємо 7 варіантів.

Підмножина $\{TF, T\uparrow, F\uparrow\}$ *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Підмножина $\{TF, \uparrow, TF\uparrow\}$ *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$.

Залишаються п'ять 3-елементних підмножин TV_7, вони замкнені щодо $\vee_*$:

$$TV_{3\_1} = \{T, F, \uparrow\};$$

$$TV_{3\_2} = \{T, F, TF\};$$

$$TV_{3\_3} = \{T, F, TF\uparrow\};$$

$$TV_{3\_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\};$$

$$TV_{3\_5} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow\}.$$

Множина TV_{3_1} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{3_1}. Для TV_{3_1} діаграма Хассе щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F \to \uparrow \to T$$

ATV_{3_1} індукує підалгебру $A^1TD3_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^1TD3_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{3\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність $T\uparrow$, $F\uparrow$, TF, $TF\uparrow$ в TV_{3_1} задає такі обмеження на GND-предикати:

$$F(P) \cap T(P) = \varnothing.$$

$$\perp(P) = \overline{T(P) \cup F(P)}.$$

$AP^{3\text{–}1}G_{V\text{–}A}$ – це пропозиційна алгебра часткових однозначних R-предикатів, тобто P-предикатів. Позначимо її $APP_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_2} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{3_2}. Для TV_{3_2} діаграма Хассе щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F \to TF \to T$$

ATV_{3_2} індукує підалгебру $A^2TD3_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^2TD3_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{3\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Відсутність $\uparrow$, $T\uparrow$, $F\uparrow$, $TF\uparrow$ у TV_{3_1} задає обмеження на клас GND-предикатів:

$$\perp(P) = \varnothing;$$

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA.$$

Зауважимо, що в силу (G) з умови $\perp(P) = \varnothing$ випливає $F(P) \cup T(P) = {}^VA$. Отже, виконується умова $\perp(P) = \overline{T(P) \cup F(P)}$.

Тому $AP^{3\text{–}2}G_{V\text{–}A}$ – це пропозиційна алгебра тотальних R-предикатів, тобто T-предикатів. Цю алгебру позначимо $APT_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_3} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{3_3}. Для TV_{3_3} діаграма Хассе щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F \to TF\uparrow \to T$$

ATV_{3_3} індукує підалгебру $A^3TD3_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^3TD3_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{3\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_3} задає такі обмеження на клас GND-предикатів:

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA.$$

$$F(P) \cap T(P) = \perp(P).$$

Таким чином, $AP^{3\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотальних $U_{=}A$-предикатів. Назвемо їх $TU_{=}A$-предикатами. Алгебру $AP^{3\text{–}3}G_{V\text{–}A}$ будемо називати $APTU_{=}A_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_4} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{3_4}. Діаграма Хассе для TV_{3_4} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F\uparrow \to TF\uparrow \to T\uparrow$$

ATV_{3_4} індукує підалгебру $A^4TD3_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^4TD3_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{3\text{–}4}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_4} задає такі обмеження на клас GND-предикатів:

$$\perp(P) = {}^VA;$$

$$F(P) \cup T(P) = {}^VA.$$

Отже, $AP^{3\text{–}4}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотальних OIG-предикатів. Назвемо їх $TOIG$-предикатами. Алгебру $AP^{3\text{–}4}G_{V\text{–}A}$ будемо називати $APTOIG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_5} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{3_5}. Діаграма Хассе для TV_{3_5} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$$F\uparrow \to \uparrow \to T\uparrow$$

ATV_{3_5} індукує підалгебру $A^5TD3_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^5TD3_{V\text{–}A}$ індукує відповідну $AP^{3\text{–}5}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{3_5} задає такі обмеження на клас GND-предикатів:

$$\perp(P) = {}^VA;$$

$$F(P) \cap T(P) = \varnothing.$$

Отже, $AP^{3\_5}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра однозначних *OIG*-предикатів. Назвемо їх назвемо *SOIG*-предикатами. Алгебру $AP^{3\_5}G_{V\text{–}A}$ називатимемо $APSOIG_{V\text{–}A}$.

Ми отримали п'ять 3-елементних підалгебр алгебри TV_7 , всі ці підалгебри попарно ізоморфні:

Твердження 9. $ATV_{3\_1} \sim_{iz} ATV_{3\_2} \sim_{iz} \sim_{iz} ATV_{3\_3} \sim_{iz} ATV_{3\_4} \sim_{iz} ATV_{3\_5}$.

Ці алгебри ізоморфні алгебрі сильної 3-значної логіки Кліні та алгебрам істиннісних значень логіки *P*-предикатів та логіки *T*-предикатів. Тому маємо 5 попарно ізоморфних підалгебр алгебри $APG_{V\text{–}A}$:

Наслідок 3. $APP_{V\text{–}A} \sim_{iz} APT_{V\text{–}A} \sim_{iz} \sim_{iz} APTU{=}A_{V\text{–}A} \sim_{iz} APTOIG_{V\text{–}A} \sim_{iz} APSOIG_{V\text{–}A}$.

2-значні предикати. Для утворення 2-елементних підалгебр алгебри TV_7 можна: взяти пару *T*, *F*; взяти пару *T*↑, *F*↑; вибрати пару з трійки ↑, *TF*, *TF*↑. До розгляду на замкненість щодо $\vee_*$ маємо 5 варіантів.

Підмножина {*TF*, ↑} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$.

Підмножина {*TF*↑, ↑} *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$.

Залишаються три 2-елементні підмножини TV_7, вони замкнені щодо $\vee_*$:

$TV_{2\_1} = \{T, F\}$;

$TV_{2\_2} = \{T\uparrow, F\uparrow\}$;

$TV_{2\_3} = \{TF, TF\uparrow\}$.

Множина TV_{2_1} ґенерує класичну булеву алгебру істиннісних значень ATV_{2_1}. Діаграма Хассе для TV_{2_1} щодо $\vee_*$ та $\&_*$:

$F \rightarrow T$

ATV_{2_1} індукує підалгебру $A^1TD2_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^1TD2_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{2\_1}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{2_1} задає таке обмеження на клас *GND*-предикатів:

$F(P) \cap T(P) = \varnothing$;

$\perp(P) = \varnothing$.

Умова $\perp(P) = \varnothing$ дає $F(P) \cup T(P) = {}^VA$. Отже, $AP^{2\_1}G_{V\text{–}A}$ – це пропозиційна алгебра *TS*-предикатів. Цю підалгебру будемо позначати $APTS_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{2_2} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{2_2}. Діаграма Хассе для TV_{2_2} щодо $\vee_*$ та $\&_*$ така:

$F\uparrow \rightarrow T\uparrow$

ATV_{2_2} індукує підалгебру $A^2TD2_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^2TD2_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{2\_2}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{2_2} задає наступні обмеження на клас *GND*-предикатів:

$F(P) \cap T(P) = \varnothing$;

$F(P) \cup T(P) = \perp(P) = {}^VA$.

Отже, $AP^{2\_2}G_{V\text{–}A}$ – це алгебра тотальних однозначних *OIG*-предикатів. Назвемо їх *TSOIG*-предикатами. Алгебру $AP^{2\_2}G_{V\text{–}A}$ будемо називати $APTSOIG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{2_3} ґенерує пропозиційну алгебру істиннісних значень ATV_{2_3}.

Діаграма Хассе для TV_{2_3} щодо $\vee_*$:

$TF \rightarrow TF\uparrow$

Діаграма Хассе для TV_{2_3} щодо $\&_*$:

$TF\uparrow \rightarrow TF$

Невідмінність $\vee_*$ та $\&_*$ на {*TF*, *TF*↑} та інволютивність *TF* і *TF*↑ робить алгебру ATV_{2_3} дуже специфічною, а базовану на ній логіку виродженою, в цілому тривіальною.

ATV_{2_3} індукує підалгебру $A^3TD2_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$. $A^3TD2_{V\text{–}A}$ індукує підалгебру $AP^{2\_3}G_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$.

Множина TV_{2_3} задає єдине обмеження на клас *GND*-предикатів:

$F(P) = T(P) = {}^VA$.

GND-предикати з такою умовою – це тотально амбівалентні предикати, вони відрізняються лише областями невизначеності. Назвемо їх *TAmG*-предикатами. Клас *TAmG*-предикатів вироджений. Алгебру $AP^{2\_3}G_{V\text{–}A}$ назвемо $APTAmG_{V\text{–}A}$.

Твердження 10. $ATV_{4\_2} \sim_{iz} ATV_{4\_3}$.

Наслідок 4. $APTS_{V\text{–}A} \sim_{iz} APTSOIG_{V\text{–}A}$.

1-значні предикати. Тут маємо три 1-елементних підалгебри ATV_{1_1}, ATV_{1_2} та ATV_{1_3} , вони відповідно задаються 1-елементними множинами з інволюційними елементами: $\{\uparrow\}$, $\{TF\}$, $\{TF\uparrow\}$. Зрозуміло, що ці підалгебри попарно ізоморфні.

ATV_{1_1}, ATV_{1_2}, ATV_{1_3} індукують 1-елементні підалгебри $A^1TD1^S{}_{V\text{–}A}$, $A^2TD1^S{}_{V\text{–}A}$, $A^3TD1^S{}_{V\text{–}A}$ алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$, які далі індукують сингулярні 1-елементні підалгебри $AP^{1\text{–}1}G^S{}_{V\text{–}A}$, $AP^{1\text{–}2}G^S{}_{V\text{–}A}$, $AP^{1\text{–}3}G^S{}_{V\text{–}A}$ алгебри $APG_{V\text{–}A}$. Ці підалгебри позначимо $\perp_{V\text{–}A}$, $\Upsilon_{V\text{–}A}$, $\Upsilon\uparrow_{V\text{–}A}$, вони попарно ізоморфні.

Відношення між підалгебрами. Те, що алгебра ***A*** є підалгеброю алгебри ***B***, будемо позначати $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$.

Для підалгебр алгебри ATV_7 маємо:

$ATV_{6\_1} \prec ATV_7$, $ATV_{6\_2} \prec ATV_7$;

$ATV_{5\_1} \prec ATV_{6\_1}$, $ATV_{5\_2} \prec ATV_{6\_1}$, $ATV_{5\_2} \prec ATV_{6\_2}$, $ATV_{5\_3} \prec ATV_7$;

$ATV_{4\_1} \prec ATV_{5\_1}$, $ATV_{4\_1} \prec ATV_{5\_2}$, $ATV_{4\_2} \prec ATV_{6\_2}$, $ATV_{4\_3} \prec ATV_{6\_2}$, $ATV_{4\_3} \prec ATV_{5\_3}$, $ATV_{4\_4} \prec ATV_{5\_3}$, $ATV_{4\_4} \prec ATV_{6\_1}$;

$ATV_{3\_1} \prec ATV_{5\_1}$, $ATV_{3\_2} \prec ATV_{4\_2}$, $ATV_{3\_3} \prec ATV_{4\_2}$, $ATV_{3\_3} \prec ATV_{5\_2}$, $ATV_{3\_4} \prec ATV_{5\_2}$, $ATV_{3\_4} \prec ATV_{4\_3}$, $ATV_{3\_4} \prec ATV_{4\_4}$, $ATV_{3\_5} \prec ATV_{4\_4}$, $ATV_{3\_5} \prec ATV_{5\_1}$;

$ATV_{2\_1} \prec ATV_{3\_1}$, $ATV_{2\_1} \prec ATV_{3\_2}$, $ATV_{2\_1} \prec ATV_{3\_3}$, $ATV_{2\_1} \prec ATV_{4\_1}$, $ATV_{2\_2} \prec ATV_{3\_4}$, $ATV_{2\_2} \prec ATV_{3\_5}$, $ATV_{2\_2} \prec ATV_{4\_1}$, $ATV_{2\_3} \prec ATV_{4\_2}$, $ATV_{2\_3} \prec ATV_{4\_3}$;

$ATV_{1\_1} \prec ATV_{3\_1}$, $ATV_{1\_1} \prec ATV_{3\_5}$, $ATV_{1\_2} \prec ATV_{2\_3}$, $ATV_{1\_2} \prec ATV_{3\_2}$, $ATV_{1\_3} \prec ATV_{2\_3}$, $ATV_{1\_3} \prec ATV_{3\_3}$, $ATV_{1\_3} \prec ATV_{3\_4}$.

Такі ж відношення маємо для відповідних підалгебр алгебри $APG_{V\text{–}A}$ та підалгебр алгебри $APG_{V\text{–}A}$, індукованих заначеними вище підалгебрами алгебри ATV_7.

Подібним чином підалгебри алгебри ATV_7 індукують відповідні підалгебри першопорядкової алгебри $AQG_{V\text{–}A}$.

4. Мови чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів

Семантичними моделями чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів є чисті першопорядкові композиційні системи *GND*-предикатів $(A, PrG_{V\text{–}A}, CQ)$. Кожна така композиційна система задає алгебру даних $(A, PrG_{V\text{–}A})$ та композиційну алгебру $(PrG_{V\text{–}A}, CQ)$. Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови, це добре відома [2, 5] мова ЧКНЛ.

Алфавіт мови: множина V предметних імен (змінних), в якій виділена множина $U \subseteq V$ тотально неістотних імен; множина $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ символів базових композицій; множина Ps предикатних символів (ПС) – сигнатура мови. Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, U, Cs, Ps)$.

Для запису формул використовуємо (див. [1]) префіксну форму запису.

Індуктивне визначення множини Fr формул:

– $Ps \subseteq Fr$; формули $p \in Ps$ – атомарні;

– $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Для зручності вживаємо скорочення формул, користуючись символами похідних композицій та інфіксною формою запису для бінарних композицій (див. [1]).

Інтерпретуємо мову на композиційних системах $CS = (A, PrG_{V\text{–}A}, CQ)$ *GND*-предикатів. Символи композицій позначають відповідні композиції, імена $x \in V$ – елементи множини базових даних A. Символи Ps позначають базові предикати в множині $PrG_{V\text{–}A}$, для опису цього позначення задамо тотальне однозначне відображення $I : Ps \to PrG_{V\text{–}A}$. Відображення інтерпретації формул $I : Fr \to PrG_{V\text{–}A}$ задамо як розширення відображення

$I: Ps \to PrG_{V\text{-}A}$ згідно побудови формул із простіших за допомогою символів Cs:

$$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi)),\ I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi)),$$

$$I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi));\ \ I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi)).$$

Трійки $J = (CS, \Sigma, I)$ називають інтерпретаціями мови (сигнатури Σ). Скорочено позначаємо їх (A, Σ, I) чи (A, I).

Предикат $J(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації J – позначимо Φ_J.

Виділення підалгебр квазіарних предикатів виділяє відповідні класи інтерпретацій – семантики. Можна говорити про загальний клас GND-інтерпретацій та про низку його підкласів, індукованих описаними вище підалгебрами.

Відношення логічного наслідку. Спочатку введемо відношення G-наслідку ${}_J|\!\!=_G$ для двох формул при фіксованій інтерпретації J: $\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$ та $F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$

та $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\Psi_J) \cup T(\Psi_J)$

та $\perp(\Psi_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$.

Неформально те, що Ψ є наслідком Φ означає: при переході від Φ_J до Ψ_J істинність може лише збільшитися, а хибність лише зменшитися, невизначеність переходить у невизначеність або істинність, у невизначеність переходить невизначеність або хибність.

Відношення логічного G-наслідку визначаємо так: $\Phi \mid\!\!=_G \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi$ для кожної інтерпретації J.

Теорема 1. Відношення ${}_J|\!\!=_G$ та ${}_J|\!\!=_G$ є рефлексивними й транзитивними.

Рефлексивність відношень ${}_J|\!\!=_G$ та $|\!\!=_G$ очевидна. Покажемо їх транзитивність. Покажемо: $\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!\!=_G \vartheta \Rightarrow \Phi\ {}_J|\!\!=_G \vartheta$.

Для областей істинності та хибності умови транзитивності очевидні. Перевіримо ці умови для областей невизначеності.

Маємо $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\Psi_J) \cup T(\Psi_J)$ та $\perp(\Psi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$, звідки отримуємо $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J) \cup T(\Psi_J)$, проте $T(\Psi_J) \subseteq T(\vartheta_J)$, тому $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$.

Маємо $\perp(\Psi_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$ та $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Psi_J) \cup F(\Psi_J)$, звідки отримуємо $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J) \cup F(\Psi_J)$, проте $F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$, тому $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$.

Тепер: $\Phi \mid\!\!=_G \Psi$ та $\Psi \mid\!\!=_G \vartheta \Rightarrow \Phi \mid\!\!=_G \vartheta$.

Маємо: $\Phi \mid\!\!=_G \Psi$ та $\Psi \mid\!\!=_G \vartheta \ \Rightarrow$ для всіх J маємо $\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi$ та для всіх J маємо $\Psi\ {}_J|\!\!=\vartheta_G \ \Rightarrow$ для всіх J маємо $\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!\!=\vartheta_G \Rightarrow \Phi\ {}_J|\!\!=_G \vartheta$ для всіх $J \Rightarrow \Phi \mid\!\!=_G \vartheta$.

Для ${}_J|\!\!=_G$ та $|\!\!=_G$ справджується закон контрапозиції.

Твердження 11. Маємо

$\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi\ {}_J|\!\!=_G \neg\Phi$ та

$\Phi \mid\!\!=_G \Psi \Leftrightarrow \neg\Psi \mid\!\!=_G \neg\Phi$.

Відношення G-наслідку та логічного G-наслідку наслідку індукують відношення G-еквівалентності та логічної еквівалентності.

Відношення G-еквівалентності при інтерпретації J визначаємо так:

$\Phi\ {}_J{\sim}_G \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|\!\!=_G \Psi$ та $\Psi\ {}_J|\!\!=_G \Phi$.

Відношення логічної G-еквівалентності визначаємо так:

$\Phi \sim_G \Psi$, якщо $\Phi \mid\!\!=_G \Psi$ та $\Psi \mid\!\!=_G \Phi$.

Твердження 12. $\Phi \sim_G \Psi \ \Leftrightarrow\ \Phi\ {}_J{\sim}_G \Psi$ для кожної інтерпретації J.

Твердження 13. $\Phi \sim_G \Phi \& \Psi \vee \Phi$ та $\Phi \sim_G (\Phi \vee \Psi) \& \Phi$.

Покажемо $\Phi \mid\!\!=_G \Phi \& \Psi \vee \Phi$. Для кожної інтерпретації J маємо:

$\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J) \cup T(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J) =$
$= \perp(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap \perp(\Psi_J)) \cup T(\Phi_J)$;

$\perp(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J) = \perp(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap$
$\cap \perp(\Psi_J)) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$.

Покажемо $\Phi \& \Psi \vee \Phi \mid\!\!=_G \Phi$. Для кожної інтерпретації J маємо:

$\perp(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J) = \perp(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap$
$\cap \perp(\Psi_J)) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$;

$\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J) \cup F(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J) =$
$= \perp(\Phi_J) \cup (F(\Phi_J) \cap T(\Phi_J) \cap \perp(\Psi_J)) \cup F(\Phi_J)$.

Таким чином, $\Phi \sim_G \Phi \& \Psi \vee \Phi$. Подібним чином показуємо: $\Phi \sim_G (\Phi \vee \Psi) \& \Phi$.

Твердження 14. Для *GND*-предикатів умова $\Phi \sim_G \vartheta$ ще не означає повну збіжність предикатів Φ_J та ϑ_J

Нехай $\Phi\, {}_J{\sim_G}\, \vartheta$. Тоді $T(\Phi_J) = T(\vartheta_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\vartheta_J)$, позначимо $T(\Phi_J)$ та $T(\vartheta_J)$ як A, $F(\Phi_J)$ та $F(\vartheta_J)$ як B. Із $\Phi\, {}_J{\models_G}\, \vartheta$ маємо: $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$, $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$. Із $\vartheta\, {}_J{\models_G}\, \Phi$ маємо: $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$, $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup F(\vartheta_J)$. Звідси отримуємо $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup \mathrm{T}$, $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup \mathrm{F}$, $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup \mathrm{T}$, $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup \mathrm{F}$. Тому: $\perp(\Phi_J) \cap (A \setminus B) = \perp(\vartheta_J) \cap (A \setminus B)$ та $\perp(\Phi_J) \cap (B \setminus A) = \perp(\vartheta_J) \cap (B \setminus A)$.

Таким чином, якщо $\Phi\, {}_J{\sim_G}\, \vartheta$, то $\perp(\Phi_J)$ та $\perp(\vartheta_J)$ можуть відрізнятися лише в перетині їх областей істинності та хибності. Як приклад такої відмінності див. $\perp(\Phi_J)$ та $\perp(\Phi_J \& \Psi_J \vee \Phi_J)$.

Теорема 3. Відношення ${}_J{\models_G}$ та $\models_G$ монотонні: $\Phi\, {}_J{\models_G}\, \vartheta \Rightarrow \Phi \& \mathrm{A}\, {}_J{\models_G}\, \vartheta \vee \mathrm{B}$ та $\Phi \models_G \vartheta \Rightarrow \Phi \& \mathrm{A} \models_G \vartheta \vee \mathrm{B}$

Маємо: $T(\Phi_J) \subseteq T(\vartheta_J) \Rightarrow T(\Phi \& \mathrm{A}_J) = T(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J) \subseteq T(\vartheta_J) \cup T(\mathrm{B}_J) = T(\vartheta \vee \mathrm{B}_J)$;

$F(\vartheta_J) \subseteq F(\Phi_J) \Rightarrow F(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) = F(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J) \subseteq F(\Phi_J) \cup F(\mathrm{A}_J) = F(\Phi \& \mathrm{A}_J)$.

Перевіримо умови для областей невизначеності. Маємо $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$ та $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$. Звідси маємо $\perp(\Phi \& \mathrm{A}_J) = (T(\Phi_J) \cap \perp(\mathrm{A}_J)) \cup (\perp(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J)) \cup (\perp(\Phi_J) \cap \perp(\mathrm{A}_J))$, $\perp(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) \cup T(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) = T(\vartheta_J) \cup \perp(\vartheta_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \cup \perp(\mathrm{B}_J)$, $\perp(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) = (F(\vartheta_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\vartheta_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J))$, $\perp(\Phi \& \mathrm{A}_J) \cup F(\Phi \& \mathrm{A}_J) = F(\Phi_J) \cup \perp(\Phi_J) \cup F(\mathrm{A}_J) \cup \perp(\mathrm{A}_J)$.

Покажемо $\perp(\Phi \& \mathrm{A}_J) \subseteq \perp(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) \cup T(\vartheta \vee \mathrm{B}_J)$. Маємо $(T(\Phi_J) \cap \perp(\mathrm{A}_J)) \subseteq T(\Phi_J) \subseteq T(\vartheta_J)$, $(\perp(\Phi_J) \cap T(\mathrm{A}_J)) \cup (\perp(\Phi_J) \cap \perp(\mathrm{A}_J)) \subseteq \perp(\Phi_J)$, $\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J)$, звідки $\perp(\Phi \& \mathrm{A}_J) = (T(\Phi_J) \cap \perp(\mathrm{A}_J)) \cup (\perp(\Phi_J) \cap (\mathrm{A}_J)) \cup (\perp(\Phi_J) \cap \perp(\mathrm{A}_J)) \subseteq T(\vartheta_J) \cup \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J) \subseteq \perp(\vartheta_J) \cup T(\vartheta_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \cup \perp(\mathrm{B}_J) = \perp(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) \cup T(\vartheta \vee \mathrm{B}_J)$.

Покажемо $\perp(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) \subseteq \perp(\Phi \& \mathrm{A}_J) \cup F(\Phi \& \mathrm{A}_J)$. Маємо $F(\vartheta_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J)) \subseteq F(\vartheta_J) \subseteq F(\Phi_J)$, $(\perp(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\vartheta_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J)) \subseteq \perp(\vartheta_J)$, $\perp(\vartheta_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J)$, звідки $\perp(\vartheta \vee \mathrm{B}_J) = (F(\vartheta_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\vartheta_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\vartheta_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J)) \subseteq F(\Phi_J) \cup \perp(\Phi_J) \cup F(\Phi_J) \subseteq F(\Phi_J) \cup \perp(\Phi_J) \cup F(\mathrm{A}_J) \cup \perp(\mathrm{A}_J) = \perp(\Phi \& \mathrm{A}_J) \cup F(\Phi \& \mathrm{A}_J)$.

Звідси отримуємо монотонність відношення $\models_G$.

Зауважимо, що для формул $\mathrm{A} \& \neg \mathrm{A}$ та $\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B}$ завжди виконується умова *G*-наслідку для областей невизначеності.

Твердження 15. Маємо $\perp(\mathrm{A} \& \neg \mathrm{A}_J) \subseteq \perp(\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B}_J) \cup T(\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B}_J)$; $\perp(\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B}_J) \subseteq \perp(\mathrm{A} \& \neg \mathrm{A}_J) \cup F(\mathrm{A} \& \neg \mathrm{A}_J)$.

Справді, $\perp(\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B}_J) \cup T(\mathrm{B} \vee \neg \mathrm{B}_J) = \perp(\mathrm{B}_J) \cup T(\mathrm{B}_J) \cup F(\mathrm{B}_J) = {}^V\!A$ згідно (G); $\perp(\mathrm{A} \& \neg \mathrm{A}_J) \cup F(\mathrm{A} \& \neg \mathrm{A}_J = \perp(\mathrm{A}_J) \cup F(\mathrm{A}_J) \cup T(\mathrm{B}_J)\ ) = {}^V\!A$ згідно (G).

Декомпозиції формул. Для відношень ${}_J{\models_G}$ та $\models_G$ виконуються властивості декомпозиції формул.

Теорема 4. $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\, {}_J{\models_G}\, \Phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{A}\, {}_J{\models_G}\, \Phi$ та $\mathrm{B}\, {}_J{\models_G}\, \Phi$.

Для областей істинності та хибності доведення традиційне. Наведемо доведення для областей невизначеності.

Покажемо:

$\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\, {}_J{\models_G}\, \Phi \Rightarrow \mathrm{A}\, {}_J{\models_G}\, \Phi$ та $\mathrm{B}\, {}_J{\models_G}\, \Phi$.

Згідно $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\, {}_J{\models_G}\, \Phi$ маємо:

$\perp(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}_J) \subseteq \perp(\Phi_J) \cup T(\Phi_J)$

$\perp(\Phi_J) \subseteq \perp(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}_J) \cup F(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}_J)$.

Маємо $\perp(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}_J) = (F(\mathrm{A}_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\mathrm{A}_J) \cap F(\mathrm{B}_J)) \cup (\perp(\mathrm{A}_J) \cap \perp(\mathrm{B}_J))$, звідки

$(F(A_J)\cap\perp(B_J))\cup(\perp(A_J)\cap F(B_J))\cup$
$\cup(\perp(A_J)\cap\perp(B_J))\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Проте $T(A_J)\cap\perp(B_J)\subseteq T(A_J)\subseteq$
$\subseteq T(A_J)\cup T(B_J)\subseteq T(\Phi_J)$, тому отримуємо
$(F(A_J)\cap\perp(B_J))\cup(\perp(A_J)\cap F(B_J))\cup$
$\cup(\perp(A_J)\cap\perp(B_J))\cup(T(A_J)\cap\perp(B_J))\subseteq$
$\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow((F(A_J)\cup\perp(A_J)\cup T(A_J))\cap\perp(B_J))\cup$
$\cup(\perp(A_J)\cap F(B_J))\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\perp(B_J)\cup(\perp(A_J)\cap F(B_J))\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Звідси $\perp(B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Аналогічно маємо $T(B_J)\cap\perp(A_J)\subseteq$
$\subseteq T(B_J)\subseteq T(A_J)\cup T(B_J)\subseteq T(\Phi_J)$, тому
$(F(A_J)\cap\perp(B_J))\cup(\perp(A_J)\cap F(B_J))\cup$
$\cup(\perp(A_J)\cap\perp(B_J))\cup(T(B_J)\cap\perp(A_J))\subseteq$
$\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow((F(B_J)\cup\perp(B_J)\cup T(B_J))\cap\perp(A_J))\cup$
$(F(A_J)\cap\perp(B_J))\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\perp(A_J)\cup(F(A_J)\cap\perp(B_J))\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$,
звідки $\perp(A_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Маємо $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(A\vee B_J)\cup F(A\vee B_J)$ $=(F(A_J)\cup\perp(A_J))\cap(F(B_J)\cup\perp(B_J))$. Звідси $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(A_J)\cup F(A_J)$, $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(B_J)\cup F(B_J)$. Отже, $A\vee B\,{}_J|\!=_G\Phi\Rightarrow A\,{}_J|\!=_G\Phi$ та $B\,{}_J|\!=_G\Phi$.

Тепер покажемо:

$A\,{}_J|\!=_G\Phi$ та $B\,{}_J|\!=_G\Phi\Rightarrow A\vee B\,{}_J|\!=_G\Phi$.

Згідно $A\,{}_J|\!=_G\Phi$ та $B\,{}_J|\!=_G\Phi$ маємо: $\perp(A_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$, $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(A_J)\cup F(A_J)$, $\perp(B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$, $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(B_J)\cup(B_J)$.

Покажемо $\perp(A\vee B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$ та $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(A\vee B_J)\cup F(A\vee B_J)$.

Маємо $\perp(B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)\Rightarrow$
$\Rightarrow F(A_J)\cap\perp(B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$ та
$\perp(A_J)\cap\perp(B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$;
$\perp(A_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)\Rightarrow$
$\Rightarrow\perp(A_J)\cap F(B_J)\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Звідси $\perp(A\vee B_J)=(F(A_J)\cap\perp(B_J))\cup$
$\cup(\perp(A_J)\cap F(B_J))\cup(\perp(A_J)\cap\perp(B_J))\subseteq$
$\subseteq\perp(\Phi_J)\cup T(\Phi_J)$.

Із умови $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(A_J)\cup F(A_J)$ та $\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(B_J)\cup F(B_J)$ отримуємо $\perp(\Phi_J)\subseteq$
$\subseteq(\perp(A_J)\cup F(A_J))\cap(\perp(B_J)\cup F(B_J))$.

Водночас $\perp(A\vee B_J)\cup F(A\vee B_J)=$
$=(\perp(A_J)\cup F(A_J))\cap(\perp(B_J)\cup F(B_J))$, тому
$\perp(\Phi_J)\subseteq\perp(A\vee B_J)\cup F(A\vee B_J)$.

Подібним чином доводиться

Теорема 5. $\Gamma\,{}_J|\!=_G\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\Gamma\,{}_J|\!=_G\neg P$ та $\Gamma\,{}_J|\!=_G\neg Q$.

Звідси отримуємо

Наслідок 5. Маємо
$A\vee B\,|\!=_G\Phi\Leftrightarrow A\,|\!=_G\Phi$ та $B\,|\!=_G\Phi$;
$\Gamma\,|\!=_G\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\Gamma\,|\!=_G\neg P$ та $\Gamma\,|\!=_G\neg Q$.

Теорема еквівалентності є основою еквівалентних перетворень формул. Для її доведення використовується

Теорема 6. 1) $\Phi\sim_G\vartheta\Rightarrow\neg\Phi\sim_G\neg\vartheta$;

2) $\Phi\sim_G\vartheta$ та $\Psi\sim_G\Xi\Rightarrow\vee\Phi\Psi\sim_G\vee\vartheta\Xi$;

3) $\Phi\sim_G\vartheta\Rightarrow R^{\bar v}_{\bar x}\Phi\sim_G R^{\bar v}_{\bar x}\vartheta$;

4) $\Phi\sim_G\vartheta\Rightarrow\exists x\Phi\sim_G\exists x\vartheta$.

Доведемо для прикладу п. 4. Нехай J – довільна інтерпретація. Із умови $\Phi\sim_G\vartheta$ маємо: $T(\Phi_J)=T(\vartheta_J)$, $F(\Phi_J)=F(\vartheta_J)$;
$\perp(\Phi_J)\subseteq T(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$, $\perp(\Phi_J)\subseteq F(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$,
$\perp(\vartheta_J)\subseteq T(\Phi_J)\cup\perp(\Phi_J)$, $\perp(\vartheta_J)\subseteq F(\Phi_J)\cup\perp(\Phi_J)$.

Треба показати:
$\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq T(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$,
$\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq F(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$,
$\perp(\exists x\vartheta_J)\subseteq T(\exists x\Phi_J)\cup\perp(\exists x\Phi_J)$,
$\perp(\exists x\vartheta_J)\subseteq F(\exists x\Phi_J)\cup\perp(\exists x\Phi_J)$.

Покажемо перше співвідношення, інші доводяться подібним чином.

Маємо $d\in\perp(\exists x\Phi_J)\Leftrightarrow$ для всіх $a\in A$ маємо $d\nabla x\mapsto a\in\perp(\Phi_J)\cup F(\Phi_J)$ та для деякого $b\in A$ маємо $d\nabla x\mapsto b\in\perp(\Phi_J)\Rightarrow$ $\Rightarrow d\nabla x\mapsto b\in\perp(\Phi_J)$ для деякого $b\in A$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ згідно $\perp(\Phi_J)\subseteq T(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J)$ тоді маємо $d\nabla x\mapsto b\in T(\vartheta_J)\cup\perp(\vartheta_J))$ для деякого $b\in A$ $\Leftrightarrow$ $d\in T(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$. Таким чином, $\perp(\exists x\Phi_J)\subseteq T(\exists x\vartheta_J)\cup\perp(\exists x\vartheta_J)$.

Теорема 7 (еквівалентності). Нехай Φ' отримана з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1,..., \Phi_n$ на $\Psi_1,..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_G \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_G \Psi_n$, то $\Phi \sim_G \Phi'$.

Доводимо індукцією за побудовою формули із використанням теореми 6.

Властивості декомпозиції формул індукують відповідні властивості відношення логічного наслідку для множин формул, що дає змогу будувати для логік *GND*-предикатів числення секвенційного типу. Властивості такого відношення, зокрема, властивості елімінації кванторів, будуть описані в наступних роботах.

Висновок

В роботі запропоновано та досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів, які названо *GND*-предикатами. Вони є узагальненням відомих часткових неоднозначних предикатів реляційного типу. Основна увага в роботі приділена побудові композиційних алгебр *GND*-предикатів. Описано композиції *GND*-предикатів, наведено їх характерні властивості. Виділено низку різновидів *GND*-предикатів.

GND-предикати можна моделювати як 7-значні тотальні детерміновані предикати – *TD*7-предикати. Виділено 7-елементну алгебру істиннісних значень *TD*7-предикатів, описано усі її підалгебри. Кожна така підалгебра індукує відповідну алгебру *TD*7-предикатів, яка в свою чергу індукує алгебру *GND*-предикатів. Це дало змогу виділити низку важливих композиційних алгебр загальних недетермінованих предикатів.

Описано мови чистих першопорядкових логік *GND*-предикатів та їх інтерпретації. Введено відношення логічного *G*-наслідку та логічної *G*-еквівалентності. Відношення логічного *G*-наслідку є монотонним, рефлексивним і транзитивним, для нього виконуються закон контрапозиції та властивості декомпозиції формул. На цій основі в наступних роботах для логік *GND*-предикатів планується побудова числень секвенційного типу.

Література

1. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. К.: ВПЦ Київський університет, 2008. 528 с.
2. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
3. Nikitchenko M., Shkilniak S. Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
4. Шкільняк С.С., Волковицький Д.Б. Реномінативні логіки квазіарних предикатів. Компьютерная математика. 2016. Вып. 1. С. 46–57.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. Проблеми програмування. 2016. № 2–3. С. 73–86.
6. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. Algebra and Discrete Mathematics. 2017. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
7. Nikitchenko M.S., Shkilniak O.S. and Shkilniak S.S. Logics of partial non-deterministic predicates. PDMU-2017: international conference: abstracts. Vilnius, Lithuania. P. 94–95.
8. Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed., vol. 16, (2011), Springer Netherlands. P. 227–304.

References

1. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2008). *Mathematical logic and theory of algorithms*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
2. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
3. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. In *Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015*. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
4. Shkilniak S. and Volkovytskyi D. (2016). Renominative logics of quasiary predicates. In *Computer mathematics*. **1**, P. 46–57 (in ukr).
5. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In *Problems in Progamming*. N 2–3. P. 73–86 (in ukr).

6. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
7. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2017). Logics of partial non-deterministic predicates. In *International conference PDMU-2017: abstracts*. Vilnius, Lithuania. P. 94–95.
8. Avron A. and Zamansky A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. In *Handbook of Philosophical Logic*, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed., vol. 16, Springer Netherlands. P. 227–304.

Одержано 01.12.2017

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 250,
у тому числі у фахових виданнях –
понад 110.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – понад 50.
Scopus Author ID: 6602842336.
H-індекс (Google Scholar): 10 (8 з 2012).
http://orcid.org/0000-0002-4078-1062.

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 90, у тому числі
у фахових виданнях – 33.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 10.
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри Теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 230,
у тому числі у фахових виданнях –
понад 100.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 17.
H-індекс (Google Scholar): 6 (6 з 2012).
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

***Місце роботи авторів*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19.
E-mail: me.oksana@gmail.com