УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, О.В. Шишацька

СЕМАНТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ П'ЯТИЗНАЧНИХ ЛОГІК

Запропоновано та досліджено програмно-орієнтовані п'ятизначні логіки двох рівнів: пропозиційну п'ятизначну логіку та логіку п'ятизначних квазіарних предикатів. Такі логіки природним чином виникають при розгляді систем, у тому числі програмних систем, які обробляють різні типи невизначеностей та помилок. Побудовано алгебри п'ятизначних функцій та предикатів. Описано семантичні властивості таких алгебр та відповідних п'ятизначних логік.

Ключові слова: програмна система, п'ятизначна функція, п'ятизначний предикат, алгебра, логіка.

Вступ

Важливим класом задач інформатики, штучного інтелекту, лінгвістики є побудова нових логік, орієнтованих на потреби моделювання та специфікації систем різного типу. Існують різні підходи до розробки таких логік [1–3], в основі яких лежать ті чи інші властивості систем, зокрема, програмних систем. Побудова нових класів моделей програм, у тому числі композиційно-номінативних моделей [4–5], відкриває можливість визначення нових логік різних типів: від пропозиційних логік та логік предикатів до модальних та темпоральних логік. Побудову таких логік на підставі композиційно-номінативного підходу започатковано в [6–9]. Ці логіки є бівалентними (двозначними), тобто як множини істиннісних значень виступає множина $Bool=\{T, F\}$, де T означає істину, а F – хибу. Разом з тим складність програмних систем вимагає для адекватної їх формалізації введення багатозначних логік. Найбільш дослідженими є тризначні логіки, певна увага приділена чотирьохзначним логікам, але п'ятизначні логіки досліджені слабко [10].

Мета роботи – це визначення та дослідження п'ятизначних логік двох рівнів: пропозиційної п'ятизначної логіки та логіки п'ятизначних квазіарних предикатів.

Статтю побудовано на розділи.

В першому розділі наводиться онтологічне обґрунтування п'ятизначної логіки та розглядаються приклади. В другому розділі будується пропозиційна п'ятизначна логіка на основі алгебри істиннісних значень; вивчаються семантичні властивості цієї алгебри. В третьому розділі будується п'ятизначна логіка квазіарних предикатів, вивчаються її семантичні властивості, вводяться відношення еквівалентності формул та логічного наслідку, формулюється принцип дуальності та досліджуються різні нормальні форми.

1. Онтологічне обґрунтування п'ятизначної логіки

Центральна методологічна проблема багатозначної логіки є питання про сутність висловлювань, які не є ні істинними ні хибними. Необхідність введення в класичну логіку хоча б ще одного істиннісного значення, відмінного від T та F, мотивовано різноманітними онтологічними аргументами:

1) недостатністю класичних істиннісних значень для побудови логічних конструкцій, що моделюють людські міркування;

2) відсутністю інформації для оцінки висловлювання як істинного чи хибного;

3) існуванням висловлювання, які можуть не мати чіткого смислу, що, в свою чергу, веде до приписування їм істинності чи хиби залежно від контексту;

4) існуванням принципової багатозначності (нечіткості, розмитості), органічно пов'язаної з певними множинами і властивостями цих множин.

Окрім цього, існує багато інших мотивацій, що приводять до ідеї побудови багатозначних логік.

Питання інтерпретації істиннісних значень завжди було складною проблемою при дослідженні багатозначних логік. Актуальним воно постає на даний момент, коли багатозначні логіки набувають особливої ролі в комп'ютерних науках, штучному інтелекті, теорії програмуванні, лінгвістиці тощо.

Швидкий розвиток багатозначних логік підтверджується наявністю великої кількості досліджень та публікацій [10]. Поряд із виникненням все більшої кількості формальних систем багатозначних логік, гостро постає проблема інтуїтивної інтерпретації отриманих за їх допомогою результатів та адекватних методів їх дослідження. Зокрема, як відзначено в [11], без змістовної інтерпретації істиннісних значень будь-яке n-значне числення залишається абстрактною структурою. Як це не дивно, подібні проблеми виникають вже для класичних істиннісних значень «істина» та «хиба» («істина» та «хиба» вперше в явному виді зустрічаються у Ч. Пірса в 1885 році). Філософський аналіз феномену введення в логіку двох абстрактних об'єктів «істина» і «хиба» дається в [12].

Дуже швидко універсум двох істиннісних значень – «істина» та «хиба» – виявився недостатнім, оскільки окрім наявного стану справ, часто доводиться розглядати потенційно можливий стан справ, який може бути чи не бути. Так з'являється тризначна логіка Лукасевича. Поява додаткових істиннісних значень «випадково», «можливо», «невизначено», «парадоксально» «невідомо» тощо говорить про змістовну інтерпретацію і прив'язується до безпосереднього застосування тієї чи іншої з тризначних логік (Лукасевича, Бочвара, Кліні, Асеньо-Пріста і т. д.). Основне – це те, що прийнята інтерпретація третього значення дозволяє відповідним чином визначити логічні зв'язки.

Поява чотиризначних логік виявилась дуже зручним засобом визначення й інтерпретації модальних операторів, а також обґрунтуванням самих чотиризначних логік. Множиною істиннісних значень логіки Катона є множина чисел {1, 2, 3, 4}, цими числами позначаються відповідно «логічна істина», «випадкова істина» «випадкова хиба», «логічна хиба» [13].

В чотиризначній логіці Н. Решера інтерпретація істиннісних значень наступна:

1 – «необхідно істинно»/«істино»;

2 – «випадково істинно»/«імовірно істинно»;

3 – «випадково хибно»/«імовірно хибно»;

4 – «необхідно хибно»/«хибно».

А. Прайор при обґрунтуванні чотиризначних логік використовує ідею семантики можливих логік. Елементи множини {1, 2, 3, 4} відповідно інтерпретуються двочленними послідовностями з T («істина») та F («хиба»):

$$1-<T\ ,\ T>, 2-<T\ ,\ F>,$$

$$3-<F\ ,\ T>, 4-<F\ ,\ F>.$$

Важливою виявилася чотиризначна логіка Белнапа, істиннісні значення якої можна по-різному впорядковувати, отримуючи як результат або логічну решітку або епістемічну решітку.

Зазвичай, при кількості логічних значень більше чотирьох, говорять про n-значну логіку. Зрозуміло, що кількість логічних систем, що можуть бути побудовані, при збільшенні кількості логічних значень, зростає з неймовірною швидкістю. Наприклад, при двох істиннісних значеннях є $2^4=16$ бінарних зв'язок; трьох – $3^9=19686$, чотирьох – $4^{16}=4294967296$, п'яти – $5^{25}=298023223876953125$ (приблизно $3*10^{17}$) і т. д.

Особливо цікавими та важливими логічними системами, є ті, що виникають природним чином у процесі розв'язання прикладних задач (при наявності двох істиннісних значеннях, такою є класична логіка). Шлях «інтуїтивна інтерпретація – змістовна інтерпретація – побудова логіки – дослідження логіки», на відміну від «побудова логіки – дослідження логіки – змістовна інтерпретація – інтуїтивна інтерпретація» дозволить природним чином застосовувати апарат багатозначної математичної логіки, який є одним з основних засобів моделювання предметних областей.

Розглянемо приклади п'ятизначних функцій та предикатів, які фактично індукують відповідні п'ятизначні логіки.

Приклад 1. Вчення про першоелементи.

Вчення про першоелементи (початок, стихії) є спільним для всіх древніх культур. Наприклад, за Аристотелем Космос складається з Землі, Води, Повітря, Вогню та Ефіру. В філософії Китаю [14–15] ядром множини філософських категорій, починаючи з якого є сенс встановлювати більш складні структурні (логічні та семантичні) зв'язки між поняттями, вважаються п'ять фундаментальних понять. Це – дао («шлях»), тянь («небо»), жень («людина» чи «принцип»), ци («пневма»). Китайські філософи бачать в них також категоріальне ядро всієї китайської культури, яке кількісно відповідає основним класифікаційним схемам: п'ять елементів (у-син) і п'ять країн світу (у-фан: чотири сторони світу + центр). Зазначимо, що система «у-син» є підсистемою «інь-янь», яка, як стверджують філософи, веде до двійкової системи числення. Зауважимо також, що в традиційній музично-теоретичній системі Китаю важливе місце займає пентатоніка, тобто набір з п'яти нот. Цей набір побудовано за принципом п'яти стихій/елементів.

П'ятизначні функції (та відповідні логіки) використовуються і в повсякденному житті.

Приклад 2. Логіка роботи касира при здійсненні валютно-обмінних операції з готівковою іноземною валютою.

Касир банку при здійсненні валютно-обмінних операції з готівковою іноземною валютою діє згідно Постанови Правління Національного банку N502 від 12.12.2002 [16].

Постановою затверджена «Інструкція про порядок організації та здійснення валютно-обмінних операцій на території України». Зокрема, пункт 4.15 фактично описує алгоритм роботи касира, побудований на п'яти станах/значеннях купюр іноземної валюти: «вилучено з обігу», «незначна зношеність», «значні пошкодження», «сумнівна купюра», «нормальна купюра». В залежності від стану купюри касир виконує дію: «приймає купюру для обміну», «приймає купюру на інкасо» або «вилучає купюру для перевірки» (рис. 1).

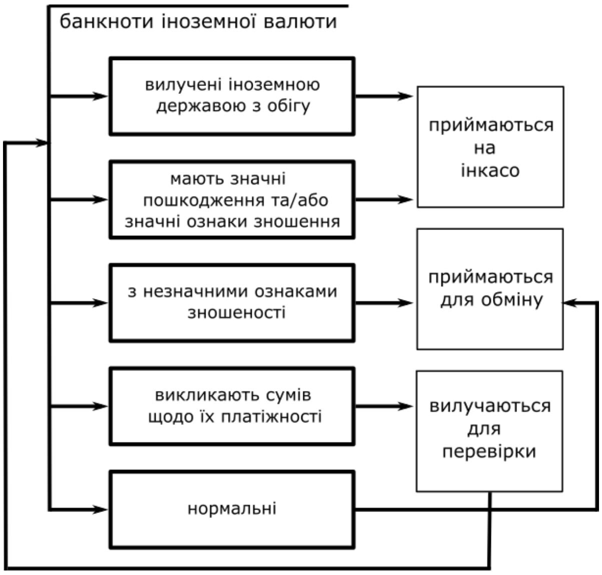

Рис. 1. Логіка роботи касира при здійсненні валютно-обмінних операції з готівковою іноземною валютою

Приклад 3. П'ятизначна логіка в логічному моделюванні (схемотехніці).

В технічних пристроях можливі дві інтерпретації логічних нуля і одиниці. Імпульсна логіка: 0 – струму/напруги немає, 1 – струм/напруга є. Потенційна логіка: як інформацію використовують рівень напруги. 0 – низький рівень напруги, 1 – високий рівень. Перехід з одного стану в інший вважається миттєвим. Однак в реальній роботі пристрою у певні моменти часу визначити напругу неможливо. Тоді, разом з логічним 0 (низька напруга) і логічною 1 (висока напруга), вводять u, що позначає перехід з одного стану в інший або невизначений стан (тризначна логіка).

У п'ятизначних моделях четверте значення ($\uparrow$) позначає перехід з 0 в 1 (зростання напруги), а п'яте значення ($\downarrow$) – перехід з 1 в 0 (спадання напруги). Тобто використовується наступна множина значень:

– 0 (низький рівень напруга);

– 1 (високий рівень напруги);

– u (невизначений стан);

– $\uparrow$ (перехід із стану 0 в стан 1);

– $\downarrow$ (перехід із стану 1 в стан 0.

Для вказаних значень визначаються операції «$\neg$» заперечення (НЕ), диз'юнкції «$\vee$» (АБО) та кон'юнкції «$\wedge$» (І) та інші операції [17]. Наприклад, операція заперечення задається табл. 1, а операція диз'юнкції – табл. 2.

Таблиця 1. Таблиця істинності для заперечення

	0	**1**	***u***	$\uparrow$	$\downarrow$
$\neg$	1	0	u	$\downarrow$	$\uparrow$

Таблиця 2. Таблиця істинності для диз'юнкції

$\vee$	**0**	**1**	***u***	$\uparrow$	$\downarrow$
0	0	1	u	$\uparrow$	$\downarrow$
1	1	1	1	1	1
u	u	1	u	u	u
$\uparrow$	$\uparrow$	1	u	$\uparrow$	u
$\downarrow$	$\downarrow$	1	u	u	$\downarrow$

Для операцій потенційної логіки вивчаються такі їх властивості, як асоціативність, комутативність, ідемпотентність тощо.

В системотехніці багатозначні моделі дозволяють:

1) виявити слабкі місця в схемі, де можливі ризики збою і наявність критичних станів при синхронному моделюванні;

2) підвищити інформативність в асинхронному моделюванні – при використанні п'ятизначної моделі чітко фіксуються фронти сигналу, що має велике значення.

П'ятизначні функції також природно виникають при моделюванні програмних систем. Існують різні підходи до введення додаткових логічних значень, наприклад, в [1] запропоновано розглядати такі ситуації:

– незавершуваність, тобто програма не завершується;

– помилковість, тобто деякі значення аргументу певної операції є незаконними (ділення на нуль; операція *pop*, застосована до порожнього стеку тощо) та призводять до помилки;

– неоднозначність, тобто коли результат операції не визначається однозначно.

Ми розглянемо трохи іншу систему з п'яти істиннісних значень, які природно виникають у процесі обчислення програм.

Приклад 4. П'ятизначна логіка при моделюванні програмних систем.

Розглянемо ситуації, що виникають при обчисленні простого виразу $x/y < z$.

Операції / та < стандартно визначені на множині дійсних чисел.

Множиною результатів є істиннісні (логічні) значення.

Розглянемо усі можливі набори значень x, y, z та результати виразу на цих наборах.

1. Всі змінні визначені, $y \neq 0$, $x/y < z$. Тоді вираз приймає значення T («*істина*»).

2. Всі змінні визначені, $y \neq 0$, $x/y \geq z$. Тоді вираз приймає значення («*хиба*»).

3. Всі змінні визначені, $y = 0$. Оскільки операція ділення на нуль не визначена, то і результат виразу невизначений. Будемо цей результат позначати спеціальним істиннісним значенням $\{e\}$, яке трактуватимемо як «*помилка, виняткова ситуація*» (*error, exeption*).

4. Хоча б одна змінна невизначена, а якщо змінна y визначена, то $y \neq 0$. Результатом вважатимемо спеціальне значення $\{u\}$. Трактуватимемо його як «*неви-*

значеність значення змінної, недостатньо інформації» (*undefined value*).

5. Хоча б одна змінна x або y невизначена, а $y=0$. Результатом вважатимемо спеціальне значення $\{eu\}$, яке трактуватимемо як «*та/або виняткова ситуація і недостатньо інформації*».

Наведений приклад природним чином задає *п'ятизначну множину істинніс-них значень* $EU=\{T,F,e,u,eu\}$. Ми обрали позначення EU, тому що саме e та u визначають таку множину.

Це дає належну передумову побудови і дослідження п'ятизначних логік, які будемо називати п'ятизначними EU-логіками.

Спочатку визначимо EU-*логіку пропозиційного рівня* $L^{P,EU}$.

2. Пропозиційна п'ятизначна *EU*-логіка

2.1. Визначення пропозиційних зв'язок логіки $L^{P,EU}$

Введення додаткових істиннісних (логічних) значень вимагає означення логічних зв'язок згідно з онтологічними тлумаченнями цих значень.

Базовими логічними зв'язками вважатимемо *диз'юнкцію* $\vee$ та *заперечення* $\neg$.

Спочатку визначимо більш просту зв'язку – *заперечення*:

– беремо класичне визначення для значень істинності T і F, тобто

$$\neg T=F \quad \text{і} \quad \neg F=T;$$

– для значення e, яке означає «помилку», заперечення не може усунути помилку, тому $\neg e=e$;

– для значення u, яке означає «невизначеність змінної», заперечення не може надати змінній визначеності, тому $\neg u=u$;

– з аналогічних міркувань $\neg eu=eu$.

Таким чином, отримуємо таблицю істинності для заперечення (табл. 3).

Таблиця 3. Таблиця істинності для заперечення

	T	***F***	***e***	***u***	***eu***
$\neg$	*F*	*T*	*e*	*u*	*eu*

Диз'юнкцію для п'ятизначної логіки $L^{P,EU}$ визначаємо таким чином:

– у випадку, коли аргументи приймають значення із множини $\{T,F\}$ значення диз'юнкції визначаються класично;

– в усіх інших випадках, коли хоча один аргумент приймає значення з множини $\{e, u, eu\}$, керуємось пріоритетністю T перед іншими значеннями, далі пріоритетність має eu, а значення e та u незалежні і мають пріоритет над F.

Наведені міркування означають, що на множині EU задається частковий порядок (рис. 2, а), відносно якого диз'юнкція є операцією супремуму, тобто множина EU є верхньою напівграткою.

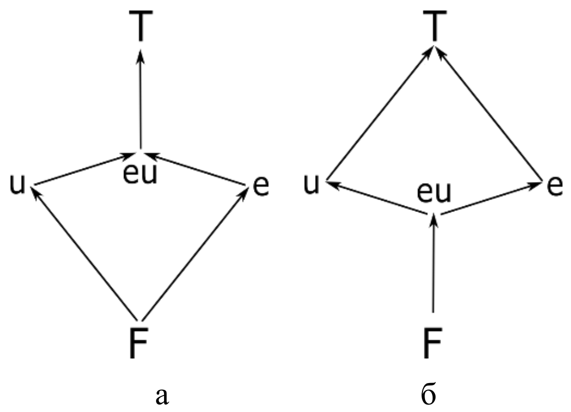

Рис. 2. Часткові порядки на множині $\{T, F, e, u, eu\}$
а –щодо диз'юнкції; б – щодо кон'юнкції

Це дозволяє задати таблицю істинності для диз'юнкції (табл. 4).

Ще раз зазначимо, що для п'ятизначних логік існує багато варіантів визначення диз'юнкції – 5^{25}, але ми спирались на онтологічні тлумачення введених істиннісних значень, які фактично задають лише одну логіку цих значень.

Таблиця 4. Таблиця істинності для диз'юнкції

$\vee$	***T***	***F***	***u***	***e***	***eu***
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*u*	*e*	*eu*
u	*T*	*u*	*u*	*eu*	*eu*
e	*T*	*e*	*eu*	*e*	*eu*
eu	*T*	*eu*	*eu*	*eu*	*eu*

За допомогою базових зв'язок традиційним чином означимо кон'юнкцію за формулою $p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$ (табл. 5).

Таблиця 5. Таблиця істинності для кон'юнкції

$\wedge$	***T***	***F***	***u***	***e***	***eu***
T	*T*	*F*	*u*	*e*	*eu*
F	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
u	*u*	*F*	*u*	*eu*	*eu*
e	*e*	*F*	*eu*	*e*	*eu*
eu	*eu*	*F*	*eu*	*eu*	*eu*

Зазначимо, що введена операція кон'юнкції імплікує інший частковий порядок на множині EU (рис. 2, б), відносно якого кон'юнкція буде операцією інфімума, тобто у цьому випадку EU буде нижньою напівграткою.

Перейдемо до вивчення семантичних властивостей введених логічних зв'язок.

2.2 Алгебра істиннісних значень та її властивості

Для диз'юнкції та кон'юнкції виконуються наступні властивості.

1. *Ідемпотентність*:

$$p \vee p = p;$$

$$p \wedge p = p.$$

2. *Асоціативність*:

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r);$$

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r).$$

3. *Комутативність*:

$$p \vee q = q \vee p;$$

$$p \wedge q = q \wedge p.$$

Виконання цих властивостей випливає з таблиць істинності відповідних зв'язок. Це означає наступне.

Твердження 1. Множина з бінарними операціями $\vee$ та $\wedge$ є *квазіграткою* [18].

Але EU не є граткою, бо аксіоми поглинання

$$p \vee (p \wedge q) = p \text{ та } p \wedge (p \vee q) = p$$

не виконуються. Дійсно, при значеннях p та q, рівними відповідно *e* та *u*, маємо, що $p \vee (p \wedge q)$ та $p \wedge (p \vee q)$ отримують значення *eu*, яке не рівне значенню змінної p.

Властивості дистрибутивності

$$(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r),$$

$$(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

також не виконуються. Це легко можна перевірити, обчислюючи значення першої властивості на значеннях пропозиційних змінних p, q, *r*, рівними відповідно *e*, T, *u*. Для другої властивості беремо відповідно значення *e*, F, *u*.

Розглянемо властивості зв'язки заперечення та її взаємодію з іншими зв'язками.

По-перше, заперечення є *інволюцією*, тобто $\neg\neg p = p$. По-друге, виконуються *закони де Моргана*:

$$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q);$$

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q).$$

Сформульовані властивості дозволять ввести наступне визначення: довільна множина *B* з операціями $\vee$, $\wedge$ та $\neg$, для яких виконуються властивості ідемпотентності, асоціативності, комутативності, інволютивності та закони де Моргана, називається *квазіграткою де Моргана*.

Отримуємо наступне твердження.

Твердження 2. Множина EU з раніше введеними бінарними операціями $\vee$

та $\wedge$ і унарною операцією заперечення $\neg$ є квазіграткою де Моргана.

Таким чином, *семантичною основою пропозиційної логіки* $L^{P,EU}$ *є алгебра*

$$AP = < EU;\ \vee, \wedge, \neg >.$$

Зазначимо, що операції (зв'язки) цієї алгебри є *C-розширюючими*, тобто при звуженні на істиннісні значення T та F, отримуємо класичні операції [10].

2.3 Мова пропозиційної *EU*-логіки

Наступним питанням, яке слід розглянути для розбудови логіки $L^{P,EU}$, є питання про мову цієї логіки. В даній статті як таку мову оберемо *мову класичної пропозиційної логіки*, яка задається множиною формул, побудованих з пропозиційних змінних (пропозиційних символів) з множини Ps за допомогою зв'язок $\vee$, $\wedge$ та $\neg$. Зазначимо, що для п'ятизначних логік тлумачення формул відрізняється від класичного, так, формула $\Phi \leftrightarrow \Psi$ з похідною зв'язкою $\leftrightarrow$ зовсім не говорить про традиційну еквівалентність формул Φ та Ψ.

2.4 Відношення еквівалентності формул та логічного наслідку. Принцип дуальності

Ввівши мову, можна перейти до визначення еквівалентності формул та логічної істинності (тавтологічності) і логічного наслідку.

Інтерпретацією (оцінкою, розподілом) пропозиційних змінних є тотальна функція *I*: $Ps \to EU$. Значення формули Φ в інтерпретації *I* позначається Φ_I.

Еквівалентність вводиться звичайним чином: формули Φ та Ψ *еквівалентні*, якщо для будь-якої інтерпретації пропозиційних змінних I значення Φ та Ψ співпадають (тобто $\Phi_I = \Psi_I$).

Рівності, які задають властивості алгебри *AP*, породжують еквівалентні формули, наприклад ідемпотентність визначає, що для довільної формули Φ, маємо

$$\Phi \vee \Phi \sim \Phi.$$

Сформулюємо тепер принцип дуальності для еквівалентних формул.

Для заданої формули Φ її *дуальною* є формула, яка отримується з Φ заміною $\wedge$ на $\vee$, та навпаки, $\vee$ на $\wedge$. Отриману формулу позначаємо Φ^*.

Запис $\Phi(P_1,\dots,P_n)$ означає, що Φ залежить від пропозиційних змінних $P_1,\dots,P_n$.

Твердження 3. Формули $\neg\Phi^*(P_1,\dots,P_n)$ та $\Phi(\neg P_1,\dots,\neg P_n)$ еквівалентні, тобто $\neg\Phi^*(P_1,\dots,P_n) \sim \Phi(\neg P_1,\dots,\neg P_n)$.

Доведення проводиться індукцією за структурою $\Phi(P_1,\dots,P_n)$. Дійсно, твердження є очевидним, якщо $\Phi(P_1,\dots,P_n)$ – пропозиційна змінна. Якщо

$$\Phi(P_1,\dots,P_n) = \Phi_1(P_1,\dots,P_n) \vee \vee\, \Phi_2(P_1,\dots,P_n),$$

то за індуктивним припущенням

$$\neg\Phi_1{}^*(P_1,\dots,P_n) \sim \Phi_1(\neg P_1,\dots,\neg P_n) \text{ та}$$

$$\neg\Phi_2{}^*(P_1,\dots,P_n) \sim \Phi_2(\neg P_1,\dots,\neg P_n).$$

Оскільки

$$\Phi^*(P_1,\dots,P_n) = \Phi_1{}^*(P_1,\dots,P_n) \wedge \wedge\, \Phi_2{}^*(P_1,\dots,P_n),$$

то отримуємо, що

$$\neg\Phi^*(P_1,\dots,P_n) = \neg\Phi_1{}^*(P_1,\dots,P_n) \vee \vee \neg\Phi_2{}^*(P_1,\dots,P_n).$$

Звідси випливає, що

$$\neg\Phi^*(P_1,\dots,P_n) \sim \Phi(\neg P_1,\dots,\neg P_n).$$

Аналогічним чином твердження доводиться, коли

$$\Phi(P_1,\dots,P_n) = \Phi_1(P_1,\dots,P_n) \wedge \wedge\, \Phi_2(P_1,\dots,P_n).$$

На основі твердження 3 доводиться наступний *принцип дуальності*.

Твердження 4. Для довільних формул Φ та Ψ маємо:

$\Phi \sim \Psi$ тоді і тільки тоді, коли $\Psi^* \sim \Phi^*$.

В логіці $L^{P,EU}$ питання про поняття тавтології та логічного наслідку є більш складним. Класичне визначення тавтології полягає у тому, що формула Φ – тавтологія, якщо для будь-якої інтерпретації пропозиційних змінних, формула набуває значення T (позначаємо $|= \Phi$). Формула Ψ – логічний наслідок формули Φ (позначаємо $\Phi \models \Psi$), якщо $\Phi \to \Psi$ – тавтологія.

Має місце наступне твердження.

Твердження 5. Логіка $L^{P,EU}$ не є тавтологічною, тобто множина тавтологій порожня; класичне відношення логічного наслідку також – порожнє.

Дійсно, візьмемо довільні формули Φ і Ψ та задамо значення усіх пропозиційних змінних рівними e (або u чи eu). Тоді значення формул Φ, Ψ та $\Phi \to \Psi$ буде e (або u чи eu), тобто воно не дорівнює T.

Це означає, що жоден закон класичної пропозиційної логіки не виконується в EU-логіці.

Звідси випливає, що EU-логіки, щоб бути застосовними, мають використовувати інші відношення логічного наслідку.

Серед різних відношень логічного наслідку виокремимо *відношення логічного наслідку за істиною* $\models_T$, *за хибою* $\models_F$ та *за істиною-хибою* $\models_{TF}$ [7], які мають практичне застосування у програмних логіках [19]. А саме,

– $\Phi \models_T \Psi$, якщо для будь-якої інтерпретації I, з того, що $\Phi_I = T$, випливає, що $\Psi_I = T$;

– $\Phi \models_F \Psi$, якщо для будь-якої інтерпретації I, з того, що $\Psi_I = F$, випливає, що $\Phi_I = F$;

– $\Phi \models_{TF} \Psi$ означає, що виконуються $\Phi \models_T \Psi$ та $\Phi \models_F \Psi$.

Приклад 5. Розглянемо, чи є формула $\Phi \vee \Psi$ логічним наслідком формули Φ? В класичній логіці $\Phi \models \Phi \vee \Psi$, тому що формула $\Phi \to \Phi \vee \Psi$ – тавтологія. В EU-логіці, як уже зазначалось, $\Phi \to \Phi \vee \Psi$ не є тавтологією, тому $\Phi \vee \Psi$ не буде логічним наслідком Φ. Проте маємо, що

$\Phi \models_T \Phi \vee \Psi$, $\Phi \models_F \Phi \vee \Psi$, $\Phi \models_{TF} \Phi \vee \Psi$.

Таким чином, введені відношення логічного наслідку – нетривіальні, та можуть застосовуватись в EU-логіках, зокрема, доведемо, що принцип дуальності виконується в логіці $L^{P,EU}$ для логічного наслідку $\models_{TF}$, який є слабкішим ніж принцип дуальності для еквівалентних формул.

Твердження 6. Для довільних формул Φ та Ψ маємо:

$\Phi \models_{TF} \Psi$ тоді і тільки тоді, коли $\Psi^* \models_{TF} \Phi^*$.

Нехай Φ та Ψ залежать від пропозиційних змінних $P_1, \ldots, P_n$, тоді

$$\Phi(P_1, \ldots, P_n) \models_{TF} \Psi(P_1, \ldots, P_n).$$

Спочатку доведемо, що

$\Phi(P_1, \ldots, P_n) \models_{TF} \Psi(P_1, \ldots, P_n)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Phi(\neg P_1, \ldots, \neg P_n) \models_{TF} \Psi(\neg P_1, \ldots, \neg P_n).$$

Дійсно, припускаємо супротивне, тобто що є така інтерпретація I пропозиційних змінних, що $\Phi(\neg P_1, \ldots, \neg P_n)_I = T$, але $\Psi(\neg P_1, \ldots, \neg P_n)_I \neq T$. Розглянемо дуальну інтерпретацію $\bar{I}$ (інтерпретація дуальна, коли в ній наявні значення пропозиційних змінних замінюються на їх заперечення). Тоді $\Phi(P_1, \ldots, P_n)$ в $\bar{I}$ дорівнює T, але $\Psi(P_1, \ldots, P_n)$ не дорівнює T, що суперечить припущенню. Маючи

$$\Phi(\neg P_1, \ldots, \neg P_n) \models_{TF} \Psi(\neg P_1, \ldots, \neg P_n),$$

отримуємо (за твердженням 6), що

$\neg\Phi^*(P_1,\ldots,P_n) \models_{TF} \neg\Psi^*(P_1,\ldots,P_n)$, а це означає, що $\Psi^*(P_1,\ldots,P_n) \models_{TF} \Phi^*(P_1,\ldots,P_n)$, тобто $\Psi^* \models_{TF} \Phi^*$.

Аналогічним чином розглядаються інші випадки в доведенні.

3. *EU*-логіка п'ятизначних квазіарних предикатів

Рівень пропозиційної логіки – експресивно бідний, бо не дозволяє адекватно моделювати складні системи з нетривіальними частинами. Така можливість виникає на рівні логіки предикатів, в якій з'являються предметні змінні. Якщо арність предикатів не фіксована, то отримуємо логіку квазіарних предикатів [6–7]. Перейдемо до формальних визначень *EU-логіки п'ятизначних квазіарних предикатів* $L^{Q,EU}$ (використовуємо визначення та позначення [7]).

3.1. Алгебра п'ятизначних квазіарних предикатів та її властивості

Нехай *V* позначає множину *предметних змінних* (*імен*), *A* – множину *предметних значень* (*атомів*). Множина ${}^VA$ – це множина наборів іменованих значень (оцінок, розподілів предметних змінних). Елементи з ${}^VA$ називатимемо *номінативними множинами*, або просто *даними*. Такі елементи (дані) подаємо у вигляді $d = [v_1 \mapsto a_1,\ldots, v_n \mapsto a_n]$. Зауважимо, що множину ${}^VA$ можна тлумачити як множину часткових функцій з *V* в *A*.

Основними операціями на ${}^VA$ є *параметрична операція перейменування* $r^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}$ та *операція накладання* ∇. Інтуїтивний смисл операції перейменування наступний: для d з ${}^VA$ значенням $r^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(d)$ є нове дане, в якому верхні змінні $v_1,\ldots,v_n$ отримують відповідно значення нижніх змінних $x_1,\ldots,x_n$. Якщо якесь значення відсутнє, то компонента з таким іменем не включається в результат. Щодо накладання, то тут розглядаємо його обмежений параметричний варіант*: накладання за однією змінною*. Інтуїтивний смисл цієї операції накладання $d\nabla x \mapsto a$ наступний: з d будується нове дане, в якому значення змінної *x* буде рівним *a*.

Множину *всюди визначених п'ятизначних предикатів* позначимо

$$PrEU(V, A) = {}^VA \to EU.$$

Перейдемо до визначення логічних операцій (композицій) першого порядку на множині предикатів $Pr\,EU(V, A)$. Ці визначення отримуємо на підставі визначень зв'язок на EU. Будемо використовувати для композицій предикатів ті ж символи зв'язок, що і на пропозиційному рівні, але у разі потреби зв'язки на EU позначаємо символами $\vee_{EU}$ та $\neg_{EU}$.

Спочатку визначаємо композиції диз'юнкції $\vee$, заперечення $\neg$ та реномінації $R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}$ наступними формулами (тут і далі $p, q \in Pr\,EU\,(V, A)$, $d \in {}^VA$):

$$(p\vee q)(d) = p(d) \vee_{EU} q(d);$$

$$(\neg p)(d) = \neg_{EU}\ (p(d));$$

$$R^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(p) = p(r^{v_1,\ldots,v_n}_{x_1,\ldots,x_n}(d)).$$

Для композиції перейменування будемо також використовувати позначення $R^{\bar v}_{\bar x}$.

Для визначення квантора існування попередньо введемо множину даних d^x, яка використовується для обчислення значення композицій квантифікації за змінною x, та повний образ $p[d^x]$ предиката p на множині d^x наступними формулами:

– $d^x = \{\, d\nabla x \mapsto a \mid a \in A \,\}$;

– $p[d^x] = \{\, p(d') \mid d' \in d^x \,\}$.

Тоді *композиція існування* $\exists x$ задається формулою

$$(\exists x\,(p))(d) = \vee_{EU}\ p[d^x],$$

де $\vee_{EU}\ p[d^x]$ – диз'юнкція всіх елементів з $p[d^x]$.

Похідні *композиції – кон'юнкцію* предикатів та *універсальну квантифікацію* визначаємо у традиційний спосіб:

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q);$$

$$\forall x\, p = \neg\exists x(\neg p).$$

Таким чином, *семантичною основою логіки* $L^{Q,EU}$ *є алгебра п'ятизначних квазіарних предикатів*

$APrEU(V,A)$=<$PrEU(V,A)$;$\vee,\wedge,\neg$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$,$\exists x,\forall x$>.

Основні властивості пропозиційних композицій цієї алгебри наступні:

– композиції $\vee$ та $\wedge$ ідемпотентні, асоціативні, комутативні;

– композиція $\neg$ є інволюцією;

– виконуються закони де Моргана.

Звідси отримуємо

Твердження 7. Множина $PrEU(V,A)$ з раніше введеними бінарними композиціями $\vee$ та $\wedge$ і унарною композицією заперечення $\neg$ є квазіграткою де Моргана.

Перейдемо до вивчення властивостей композиції реномінації:

R$\vee$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p \vee q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(q)$.

R$\neg$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg p) = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$.

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(p)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (p)$.

R) $R(p) = p$.

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(p) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$.

R$\exists$R) $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\, p) = R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\, p)$.

Тут RR) задає згортку реномінацій [6].

Доведемо, наприклад, властивість R$\vee$. За визначеннями композицій реномінації та диз'юнкції, отримуємо, що

$$(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p \vee q))(d) = (p \vee q)(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) =$$

$$= p(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) \vee_{EU} q(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)) =$$

$$= (R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p))(d)) \vee_{EU} (R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(q))(d)) =$$

$$= (R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(q))(d).$$

Оскільки рівність значень лівої та правої частин R$\vee$ доведено для довільного d, то це означає, що

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p \vee q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(q).$$

Для класу квазіарних предикатів багато традиційних властивостей композицій квантифікації не виконуються. Щоб зробити такі властивості виконуваними, потрібно введення поняття неістотної змінної, а саме змінна x неістотна для предиката p, якщо для довільного даного d значення $p(d)$ збігається із значенням $p(d')$, де d' відрізняється від лише d лише значенням предметної змінної x або його відсутністю. У цьому випадку додатково отримуємо такі властивості:

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(p) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$, якщо z неістотна для p.

Ren) $\exists y\ p = \exists z R_z^y(p)$, якщо z неістотна для p.

Доведемо, наприклад, властивість Ren. Спочатку обчислюємо ліву частину на довільному даному d:

$$(\exists y\ p)(d) = \vee_{EU}\, p[d^y].$$

Далі обчислюємо праву частину:

$$\begin{aligned}
&\exists z R_z^y(p)(d) = \vee_{EU}(R_z^y(p))[d^z] = \\
&= \vee_{EU}(R_z^y(p))[\{d \nabla z \mapsto a \mid a \in A\}] = \\
&= \vee_{EU}\, p\,[\{r_z^y((d \nabla z \mapsto a)\, \nabla y \mapsto a) \mid a \in A\}] = \\
&= \vee_{EU}\, p\,[\{((d \nabla z \mapsto a)\, \nabla y \mapsto a) \mid a \in A\}] = \\
&= \vee_{EU}\, p\,[\{((d \nabla y \mapsto a)\, \nabla z \mapsto a) \mid a \in A\}] = \\
&= \vee_{EU}\, p\,[\{d \nabla y \mapsto a \mid a \in A\}] = \vee_{EU}\, p[d^y].
\end{aligned}$$

Оскільки ліва та права частини збігаються для довільного d, то рівність має місце.

Зазначимо, що при наявності неістотних змінних можна виносити квантори на початок формули:

1) $\neg\forall x\, p = \exists x\neg\, p$, $\neg\exists x\, p = \forall x\neg\, p$;

2) $\exists x\, p \vee q = \exists x(p \vee q)$, $\forall x\, p \vee q = \forall x(p \vee q)$,

якщо x неістотна для q;

3) $p \vee \exists x\, q = \exists x(p \vee q)$, $p \vee \forall x\, q = \forall x(p \vee q)$,

якщо x неістотна для p.

Доведемо тільки третю властивість, демонструючи збігання значень лівої та правої частини рівностей на довільному даному d. Для першої рівності отримуємо, що

$$(p \vee \exists x\, q)(d)(d) = p(d) \vee_{EU} (\exists x\, q)(d) =$$

$$= p(d) \vee_{EU} (\vee_{EU}\; q[d^x]) =$$

$$= (\vee_{EU}\; p[d^x]) \vee_{EU} (\vee_{EU}\, q[d^x]) =$$

$$= \vee_{EU} (p \vee q)\; [d^x] = \exists x(p \vee q)(d).$$

Тут заміна $p(d)$ на $\vee_{EU}\; p[d^x]$ коректна, тому що x неістотна для p.

Аналогічно доводиться друга рівність.

Наведені властивості використовуються для побудови пренексної форми формули.

Таким чином, було досліджені властивості алгебр виду $APrEU(V, A)$, які слугують семантичною основою логіки $L^{Q,EU}$.

3.2. Мова п'ятизначних квазіарних предикатів та її властивості

Перейдемо до визначення мови логіки $L^{Q,EU}$. Кортеж Σ=(Ps ,V ,U), де Ps – множина предикатних імен, V – множина предметних змінних (імен), U – множина неістотних змінних, називається *сигнатурою*.

Множина *формул* (*мова логіки* $L^{Q,EU}$) сигнатури Σ визначається індуктивно: атомарні формули мають вигляд P ($P \in Ps$); якщо Φ та Ψ – формули, то $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\neg\Phi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$, $\exists x\Phi$, $\forall x\Phi$ – складені формули.

Для $L^{Q,EU}$ поняття інтерпретації ускладнюється. А саме, *інтерпретація* I – це кортеж $I = (APrEU(V, A),\ I^{Ps},\ d)$, де $I^{Ps} : Ps \to PrEU(V, A)$ – відображення *інтерпретації предикатних символів*, $d \in {}^{V}A$ – *інтерпретація предметних змінних*.

Формули інтерпретуються в алгебрах виду $APrEU(V \cup U, A)$ традиційним чином, треба тільки брати до уваги, що предметні змінні з U мають бути *неістотними* [9].

При таких позначеннях визначення еквівалентних формул та логічного наслідку залишаються такими же, як і для пропозиційного рівня.

3.3. Принцип дуальності та нормальні форми

Для заданої формули Φ логіки $L^{Q,EU}$ її *дуальною* є формула, яка отримується з Φ заміною $\wedge$ на $\vee$, $\vee$ на $\wedge$, $\exists x$ на $\forall x$, $\forall x$ на $\exists x$. Отриману формулу позначаємо Φ^*.

Твердження 8. Для довільної формули Φ логіки $L^{Q,EU}$ з предикатними змінними $\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n$ маємо,

$$\neg\Phi^*(\mathrm{P}_1,\ldots,\mathrm{P}_n) \sim \Phi(\neg\mathrm{P}_1,\ldots,\neg\mathrm{P}_n).$$

Доведення проводиться індукцією за структурою Φ.

На основі твердження 8 доводять наступні *принципи дуальності*.

Твердження 9. Для довільних формул Φ та Ψ логіки $L^{Q,EU}$ маємо:

– $\Phi \sim \Psi$ тоді і тільки тоді, коли $\Psi^* \sim \Phi^*$;

– $\Phi \models_{TF} \Psi$ тоді і тільки тоді, коли

$$\Psi^* \models_{TF} \Phi^*.$$

Спираючись на доведені раніше еквівалентні перетворення, отримуємо наступне твердження.

Твердження 10. За довільною формулою Φ логіки $L^{Q,EU}$ можна конструктивно побудувати її *пренексну форму*.

Різні нормальні форми для формул логіки квазіарних предикатів введено в [6, 20].

Формула Ф логіки $L^{Q,EU}$ називається *реномінативно-атомарною*, якщо всі реномінації у Ф застосовуються лише до атомарних формул, тобто до предикатних змінних.

Твердження 11. За довільною формулою Ф логіки $L^{Q,EU}$ можна конструктивно побудувати її реномінативно-атомарну форму.

Формула Ф логіки $L^{Q,EU}$ називається *квазікласичною*, якщо вона є реномінативно-атомарною, та всі її реномінації мають однаковий список верхніх змінних.

Твердження 12. За довільною формулою Ф логіки $L^{Q,EU}$ можна конструктивно побудувати її квазікласичну форму.

Мета введених форм полягає у тому, що вони дозволяють спростити перевірку виконуваності та спростовності формул логіки $L^{Q,EU}$, звівши спочатку проблему виконуваності та спростовності до логіки *n*-арних п'ятизначних предикатів, а далі – до класичної (бівалентної) логіки предикатів. Доведення спирається на методи, розроблені в [6, 20].

Наведені твердження дозволяють будувати програмні системи для роботи з логікою квазіарних п'ятизначних предикатів.

Наостанок зазначимо, що описані нами п'ятизначні логіки відрізняються від п'ятизначних логік, введених в [17, 21]. Цей факт перевіряється при аналізі таблиць істинності пропозиційних зв'язок.

Висновки

В роботі запропоновано та досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – пропозиційні п'ятизначні логіки та логіки п'ятизначних квазіарних предикатів. Особливістю цих логік є використання спеціальних істиннісних значень, які вказують на помилки чи невизначеності в різних системах, зокрема, програмних системах.

В статті наведено онтологічне обґрунтування п'ятизначних логік та розглянуто їх приклади. Для пропозиційного рівня побудовано алгебру істиннісних значень та вивчено її семантичні властивості. Для предикатного рівня побудовано п'ятизначну логіку квазіарних предикатів, вивчено її семантичні властивості, введено відношення еквівалентності формул та відношення логічного наслідку, доведено принцип дуальності та розглянуто різні нормальні форми.

Подальші дослідження орієнтовані на побудову алгоритмів перевірки виконуваності/спростовності формул та формулювання різних типів числень для введених логік.

Література

1. Hähnle R. Many-Valued Logic, Partiality, and Abstraction in Formal Specification Languages. Logic Journal of the IGPL. 2006. N 13 (4). P. 415–433.
2. Jones C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. AVoCS'05. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, Elsevier. 2006. Vol. 145. P. 3–25. [online]. Available from: http://dx.doi.org/10.1016/j.entcs.2005.10.002
3. Gries D., Schneider F.B. Avoiding the undefined by underspecification. Springer Berlin Heidelberg. 1995. P. 366–373. [online]. Available from: https://doi.org/10.1007/BFb0015254
4. Nikitchenko N. A composition-nominative approach to program semantics. Technical report IT-TR: 1998-020. Technical University of Denmark. 1998. 103 p.
5. Nikitchenko M. Composition-nominative aspects of address programming. *Cybernetics and Systems Analysis*, 45:864. 2009. [online]. Available from: https://doi.org/10.1007/s10559-009-9159-4
6. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Математична логіка та теорія алгоритмів. К.: ВПЦ Київський університет, 2008. 528 с.
7. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
8. Nikitchenko M., Shkilniak S. Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. Workshop on Foundations of Informatics:

Proceedings FOI-2015. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
9. Nikitchenko M., Shkilniak S. Algebras and logics of partial quasiary predicates. Algebra and Discrete Mathematics. 2017. Vol. 23, N 2. P. 263–278.
10. Карпенко А.С. Развития многозначной логики. М.: Издательство ЛКИ, 2010. 448 с.
11. Jordan Z. The development of mathematical logic and logical positivism in Poland between the two wars. Oxford, 1946. С. 346–397.
12. Шрамко Я.В. Истина и ложь: что такое истинностные значения и для чего они нужны. Логос, 2009. 2(70). С. 96–121.
13. Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems. Handbook of Philosophical Logic, Springer Netherlands. 2011. Vol. 16. P. 227–304.
14. Кобзев А.И. Логика и диалектика в Китае // Духовная культура Китая. М.: Вост. лит., 2006. Т.1.
15. Кобзев А.И. Классификационная схема «пять элементов» – у-сын. ХП1НКОГК. М., 1982. Ч. 1.
16. Інструкція про порядок організації та здійснення валютно-обмінних операцій на території України. Режим доступу: http://zakon0.rada.gov.ua/laws/show/z0021-03/ed20120612
17. Киносита К., Асада К., Карацу О. Логическое проектирование СБИС. М.: Мир, 1988. 310 с.
18. Plonka J. On distributive quasi-lattices. Fundamenta Mathemacae, 60. 1967. P. 191–200.
19. Kryvolap A., Nikitchenko M., Schreiner W. Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions. ICTERI 2013, CCIS, Springer, Heidelberg. 2013. P. 355–378.
20. Nikitchenko M.S., Tymofieiev V.G. Satisfiability in composition-nominative logics. *Central European Journal of Computer Science*. 2012. Vol. 2, N 3. P. 194–213.
21. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Алгебри загальних недетермінованих предикатів. *Проблеми програмування*. 2018. № 1. С. 3–19.

References

1. Hähnle R. (2006). Many-Valued Logic, Partiality, and Abstraction in Formal Specification Languages. In *Logic Journal of the IGPL*. N.13 (4). P. 415–433.
2. Jones C. (2006) Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, AVoCS'05, Elsevier. Vol. 145. P. 3–25. [online]. Available from: http://dx.doi.org/10.1016/j.entcs.2005.10.002
3. Gries D. and Schneider F. (1995). Avoiding the undefined by underspecification. In *Springer Berlin Heidelberg*. P. 366–373. [online]. Available from: https://doi.org/10.1007/BFb0015254
4. Nikitchenko N. (1998). *A composition-nominative approach to program semantics*. – Technical report IT-TR: 1998-020. Technical University of Denmark. 103 p.
5. Nikitchenko M. (2009). Composition-nominative aspects of address programming. In *Cybernetics and Systems Analysis*, 45:864. [online]. Available from: https://doi.org/10.1007/s10559-009-9159-4
6. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2008). *Mathematical logic and theory of algorithms*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
7. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
8. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2015). Semantic Properties of Logics of Quasiary Predicates. In *Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015*. Chisinau, Moldova. P. 180–197.
9. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 23, N 2. P. 263–278.
10. Karpenko A. (2010). *The Development of Many-Valued Logics*. M.: LKI (in rus).
11. Jordan Z. (1946) *The development of mathematical logic and logical positivism in Poland between the two wars.* Oxford. P. 346–397.
12. Shramko J. (2009). Truth and Falsity: What Are Truth Values and Why They Are Needed. In *Logos*. 2(70). P. 96–121 (in rus).
13. Avron A. and Zamansky A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. In *Handbook of Philosophical Logic*, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed., vol. 16, Springer Netherlands. P. 227–304.
14. Kobzev A. (2006). The Logic and Dialectics in China. In *The Spiritual Culture of China*. Vol.1 (in rus).
15. Kobzev A. (1982). The classification scheme "Five Elements" is the U-son. M., P. 1 (in rus).
16. The Instruction on the procedure for the organization and liquidation of currency-exchange operations in the territory of Ukraine. [online]. Available from:

http://zakon0.rada.gov.ua/laws/show/z0021-03/ed20120612 (in ukr).
17. Kinosita K. and Asada K. and Karatsu O. (1988). *The Logical design of SLIC*. M.: Myr (in rus).
18. Plonka J. (1967). On distributive quasi-lattices. In *Fundamenta Mathemacae,* 60. P. 191–200.
19. Kryvolap A. and Nikitchenko M. and Schreiner W. (2013). Extending Floyd-Hoare logic for partial pre- and postconditions. In *ICTERI 2013, CCIS,* Springer, Heidelberg. P. 355–378.
20. Nikitchenko M. and Tymofieiev V. Satisfiability in composition-nominative logics. In *Central European Journal of Computer Science.* Vol. 2, N 3. P. 194–213.
21. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. In *Problems in programming.* N 1. – P. 3–19.

Одержано 15.01.2018

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри Теорії та технології програмування.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 250, у тому числі у фахових виданнях – понад 110.
Кількість наукових публікацій в зарубіжних виданнях – понад 50.
Scopus Author ID: 6602842336.
H-індекс (Google Scholar): 10 (8 з 2012).
http://orcid.org/0000-0002-4078-1062.

Шишацька Олена Володимирівна,
інженер-програміст І категорії НДС «Теоретичної кібернетики»,
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – 28, у тому числі у фахових виданнях – 12.
http://orcid.org/0000-0001-8791-8989.

***Місце роботи авторів*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19