УДК 004.42:510.69 https://doi.org/10.15407/pp2019.01.014

О.С. Шкільняк

ДЕВІАНТНІ АЛГЕБРИ ІСТИННІСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ДЕВІАНТНІ КЛАСИ ЗАГАЛЬНИХ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРЕДИКАТІВ

Вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки загальних недетермінованих (*GND*) предикатів. *GND*-предикати моделюються як 7-значні *TD*7-предикати. Досліджено девіантні алгебри істиннісних значень (*TV*-алгебри) *TD*7-предикатів та девіантні класи *GND*-предикатів. Девіантна *TV*-алгебра не індукує алгебру *GND*-предикатів. Для підмножин істиннісних значень досліджено можливість модифікації $\vee_*$ із умовою коректності *TFC*, що визначає відповідні класи *GND*-предикатів. Описано природні модифікації $\vee_*$ без *TFC*, що дає низку девіантних *TV*-алгебр.

Ключові слова: логіка, алгебра, недетермінований предикат, 7-значний предикат.

Вступ

Основа сучасних інформаційних та програмних систем – це апарат математичної логіки. Різноманітні логічні формалізми успішно використовуються для розв'язання широкого кола задач інформатики й програмування [1 – 4]. Водночас розвиток та розширення сфери застосування інформаційних технологій зумовлює необхідність розробки нових логік, які більше адаптовані до потреб програмування й моделювання. Найперше, ці логіки мають враховувати широке використання в в програмних системах та системах штучного інтелекту часткових недетермінованих відображень над неповними даними. До таких програмно-орієнтовних логічних формалізмів належать композиційно-номінативні логіки (КНЛ) квазіарних предикатів [5 – 7].

Важливим класом КНЛ є логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів, або *GND*-предикатів. Ці логіки запропоновано в [8], вони вивчались в [8, 9]. Зазначені логіки відображають такі властивості програм, як частковість, недетермінізм, нефіксовану арність. В роботах [8, 9] виділено різновиди *GND*-предикатів, описано композиційні алгебри та мови логіки *GND*-предикатів. *GND*-предикати можна моделювати як 7-значні тотальні детерміновані (*TD*7) предикати. Описано усі 20 підалгебр алгебри істиннісних значень (*TV*-алгебри) *TD*7-предикатів $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$. Досліджено індукування цими підалгебрами відповідних алгебр *TD*7-предикатів та *GND*-предикатів.

Існує надзвичайно багато 7-значних логік, тому багато підмножин TV_7 незамкнені щодо $\neg_*$ чи $\vee_*$, вони не утворюють підалгебр ATV_7. Такі підмножини та відповідні їм класи *GND*-предикатів названо *девіантними*. Дослідженню девіантних *TV*-алгебр та девіантних класів *GND*-предикатів присвячена дана робота.

Для того, щоб девіантна $TV \subseteq TV_7$ утворила алгебру, необхідно модифікувати $\neg_*$ чи $\vee_*$. Модифікація $\neg_*$ веде до специфічних некласичних логік, вона в роботі не розглядається. Найважливішими є модифікації $\vee_*$, для яких виконується умова *TFC* коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні *TFC* *TV*-алгебра *девіантна*, вона не індукує алгебру *GND*-предикатів. Для всіх підмножин TV_7 в роботі досліджено можливість модифікації $\vee_*$ із умовою *TFC*, що визначає відповідні класи *GND*-предикатів. Описано природні модифікації $\vee_*$ без *TFC*, що дає низку девіантних *TV*-алгебр. Для деяких девіантних множин не існує модифікацій $\vee_*$ із умовою *TFC*, для них вказано відносно природні девіантні *TV*-алгебри.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [6, 8, 9].

1. *GND* та *TD*7-предикати

V-A-квазіарним предикатом називають часткову неоднозначну, взагалі кажучи, функцію вигляду $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, ${}^{V}A$ – множина всіх *V-A*-іменних множин.

Часткові неоднозначні предикати на множині ${}^{V}A$ можна трактувати як відповідності (відношення) між ${}^{V}A$ та $\{T, F\}$. Такі предикати названо [5, 6] квазіарними предикатами реляційного типу, або *R*-предикатами. Для *R*-предикатів неможлива ситуація, коли при застосуванні предиката *P* до певного даного *d* виробляється результат (можливо, не один), водночас застосування *P* до цього *d* може дати невизначеність (результат не виробляється).

В загальному випадку поняття неоднозначного (недетермінованого) квазіарного предиката адекватно уточнюється [8, 9] як поняття *GND*-предиката – загального недетермінованого предиката. Такий предикат $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ при застосуванні до даного $d \in {}^{V}A$ може приймати значення *T*, приймати значення *F*, а може і не приймати жодного значення (бути невизначеним). Множиною значень $P[d]$, які *GND*-предикат *P* може прийняти на даному $d \in {}^{V}A$, може бути одна з множин $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$, $\{T, \varnothing\}$, $\{F, \varnothing\}$, $\{T, F, \varnothing\}$.

Скорочено позначимо ці множини як ↑, *T*, *F*, *TF*, *T*↑, *F*↑, *TF*↑.

Кожний *GND*-предикат *P* можна однозначно описати за допомогою 3-х множин: області істинності $T(P)$, області хибності $F(P)$ та області невизначеності $\bot(P)$. Ці множини задаються наступним чином:

– $T(P) = \{d \mid T \in P[d]\}$;

– $F(P) = \{d \mid F \in P[d]\}$;

– $\bot(P) = \{d \mid \varnothing \in P[d]\} =$

$= \{d \mid P$ може бути невизначеним на $d\}$.

Такі множини пов'язує умова:

$$F(P) \cup T(P) \cup \bot(P) = {}^{V}A \quad .$$

Кожний *R*-предикат $P : {}^{V}A \to \{T, F\}$ на даному $d \in {}^{V}A$ може приймати лише значення *T*, лише значення *F*, обидва значення *T* та *F*, та може бути невизначеним. Тому для *R*-предиката *P* множина $P[d]$ може бути однією з $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$. Кожний *R*-предикат *P* можна однозначно задати за допомогою 2-х множин: $T(P)$ та $F(P)$. Тоді $\bot(P)$ є доповненням до $T(P) \cup F(P)$.

Накладаючи ті чи інші обмеження на області істинності, хибності та невизначеності, виділено [8, 9] низку класів *GND*-предикатів. Зокрема, маємо 7 константних *GND*-предикатів: $\bot$, T, F, Υ, $\mathrm{T}_{\uparrow}$, $\mathrm{F}_{\uparrow}$, $\Upsilon_{\uparrow}$.

GND-предикати можна моделювати [8] як 7-значні тотальні детерміновані предикати, або *TD*7-предикати. Множиною істиннісних значень *TD*7-предикатів є $TV_7 = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Класи *V-A*-квазіарних *GND*-предикатів та *TD*7-предикатів позначають відповідно $PrG_{V\text{–}A}$ та $PrTD7_{V\text{–}A}$.

Базові пропозиційні композиції *TD*7-предикатів – це логічні зв'язки заперечення $\neg_*$ та диз'юнкція $\vee_*$. Задаємо їх традиційним чином – за допомогою таблиць істинності (табл. 1, 2).

Таблиця 1. Композиція $\neg_*$

P	*T*	*F*	*T*↑	*F*↑	↑	*TF*	*TF*↑
$\neg_*$P	*F*	*T*	*F*↑	*T*↑	↑	*TF*	*TF*↑

Таблиця 2. Композиція $\vee_*$

$\vee_*$	*T*	*F*	*T*↑	*F*↑	↑	*TF*	*TF*↑
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*T*↑	*F*↑	↑	*TF*	*TF*↑
T↑	*T*	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑	*T*↑
F↑	*T*	*F*↑	*T*↑	*F*↑	↑	*TF*↑	*TF*↑
↑	*T*	↑	*T*↑	↑	↑	*T*↑	*T*↑
TF	*T*	*TF*	*T*↑	*TF*↑	*T*↑	*TF*	*TF*↑
TF↑	*T*	*TF*↑	*T*↑	*TF*↑	*T*↑	*TF*↑	*TF*↑

Композиція кон'юнкції $\&_*$ – похідна:

$$P \&_* Q = \neg_*(\neg_* P \vee_* \neg_* Q).$$

Тому $\&_*$ можна подати так (табл. 3).

Таблиця 3. Композиція $\&_*$

$\&_*$	T	F	$T{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$\uparrow$	TF	$TF{\uparrow}$
T	T	F	$T{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$\uparrow$	TF	$TF{\uparrow}$
F	F	F	F	F	F	F	F
$T{\uparrow}$	$T{\uparrow}$	F	$T{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$\uparrow$	$TF{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$
$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	F	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	$F{\uparrow}$	$\uparrow$	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$
TF	TF	F	$TF{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	TF	$TF{\uparrow}$
$TF{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$	F	$TF{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$F{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$

Множина істиннісних значень TV_7 замкнена щодо $\neg_*$, $\vee_*$ та $\&_*$.

2. Алгебра істиннісних значень *TD*7-предикатів та її підалгебри

Алгебру $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$ назвемо *алгеброю істиннісних значень*, або *TV-алгеброю* *TD*7-предикатів. Розглядають також *TV*-алгебру *TD*7-предикатів розширеної сигнатури $ATV_{7E} = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$.

Для логічних зв'язок *TD*7-предикатів маємо [8, 9] традиційні властивості:

– комутативність $\vee_*$ та $\&_*$;

– асоціативність $\vee_*$ та $\&_*$;

– ідемпотентність $\vee_*$ та $\&_*$;

– зняття подвійного заперечення;

– закон контрапозиції;

– закони де Моргана.

Проте для TD7-предикатів неправильні закони дистрибутивності $\vee*$ щодо $\&*$ та $\&*$ щодо $\vee*$, також неправильні закони поглинання.

Приклад 1.

$({\uparrow} \vee_* T)\, \&_*\, TF = T \,\&_*\, TF = TF$, водночас

$({\uparrow} \,\&_*\, TF) \vee_* (T \,\&_*\, TF) = F{\uparrow} \vee_* TF = TF{\uparrow}$;

$({\uparrow} \,\&_*\, F) \vee_* TF = F \vee_* TF = TF$, водночас

$({\uparrow} \vee_* TF)\, \&_*\, (F \vee_* TF) = TF{\uparrow} \,\&_*\, TF = TF{\uparrow}$.

Приклад 2.

$TF \vee_* (TF \,\&_*\, {\uparrow}) = TF \vee_* F{\uparrow} = TF{\uparrow} \neq TF$;

$TF \,\&_*(TF \vee_* {\uparrow}) = TF \,\&_*\, T{\uparrow} = TF{\uparrow} \neq TF$.

Це цілком зрозуміло в світлі того, що *GND*-предикати моделюються *TD*7-предикатамии, а в логіці *GND*-предикатів не виконуються [8] закони дистрибутивності та закони поглинання.

Для множини TV_7 задаємо [8] природне впорядкування щодо $\vee_*$ та щодо $\&_*$.

Впорядкування TV_7 щодо $\vee_*$:

$$\alpha \rightarrow_{\vee} \beta, \text{ якщо } \alpha \vee_* \beta = \beta.$$

Впорядкування TV_7 щодо $\&_*$:

$$\alpha \rightarrow_{\&} \beta, \text{ якщо } \alpha \,\&_*\, \beta = \alpha.$$

Твердження 1. Впорядкування $\rightarrow_{\vee}$ та $\rightarrow_{\&}$ транзитивні:

$$\alpha \rightarrow_{\vee} \beta \text{ та } \beta \rightarrow_{\vee} \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow_{\vee} \gamma.$$

$$\alpha \rightarrow_{\&} \beta \text{ та } \beta \rightarrow_{\&} \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow_{\&} \gamma.$$

Таку транзитивність гарантує асоціативність $\vee_*$ та $\&_*$:

$$\alpha \vee_* \gamma = \alpha \vee_* (\beta \vee_* \gamma) =$$

$$= (\alpha \vee_* \beta) \vee_* \gamma = \beta \vee_* \gamma = \gamma;$$

$$\alpha \,\&_*\, \gamma = \alpha \,\&_*\, (\beta \,\&_*\, \gamma) =(\alpha \,\&_*\, \beta) \,\&_*\, \gamma =$$

$$= \beta \,\&_*\, \gamma = \gamma.$$

Наведемо діаграми Хассе для множини TV_7 щодо $\vee_*$ та $\&_*$ [8].

Діаграма Хассе для TV_7 щодо $\vee_*$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \uparrow \arrow[dr] & & \\
 & F{\uparrow} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T{\uparrow} \arrow[r] & T \\
F \arrow[ur] \arrow[dr] & & TF{\uparrow} \arrow[ur] & & \\
 & TF \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Діаграма Хассе для TV_7 щодо $\&_*$:

$$\begin{tikzcd}
 & & \uparrow \arrow[dr] & & \\
F \arrow[r] & F{\uparrow} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T{\uparrow} \arrow[dr] & \\
 & & TF{\uparrow} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\
 & & & TF \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Це означає, що TV_7 не утворює решітки істиннісних значень. Причиною цього є те, що $\vee_*$ та $\&_*$ *невідмінні* на множині $\{TF, TF{\uparrow}\}$.

Для опису підалгебр ATV_7 виділено [8] всі 20 підмножин множини TV_7, які замкнені щодо $\neg_*$, $\vee_*$ та $\&_*$. Ці підмножини TV_{m_n} задають підалгебри ATV_{m_n} алгебри ATV_7. Далі ATV_{m_n} індукують підалгебри алгебри $ATD7_{V\text{–}A}$, які в свою чергу індукують підалгебри алгебри GND-предикатів відповідного рівня: пропозиційної алгебри $APG_{V\text{–}A}$, реномінативної $ARG_{V\text{–}A}$, першопорядкової $AQG_{V\text{–}A} = (PrG_{V\text{–}A}, \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\})$. Зауважимо, що існує 30 підмножин TV_7, які замкнені лише щодо $\neg_*$.

Зв'язок ATV_7 та предикатних алгебр встановлюється так. Наявність істиннісного значення τ в TV_7 означає, що існують $P \in PrG_{V\text{–}A}$ та $d \in {}^{V}\!A$ такі: $\tau \in P[d]$.

Наведемо усі підмножини множини TV_7, замкнені щодо $\neg_*$, $\vee_*$ та $\&_*$, вказавши індуковані ними відповідні підалгебри ATV_{m_n} алгебр ATV_7 та підалгебри $AQG_{V\text{–}A}$.

$TV_{6\_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\uparrow\}$
індукує $AQAU_{V\text{–}A}$;

$TV_{6\_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$
індукує $AQTG_{V\text{–}A}$;

$TV_{5\_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow\}$
індукує $AQSG_{V\text{–}A}$;

$TV_{5\_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$
індукує $AQTAU_{V\text{–}A}$;

$TV_{5\_3} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$
індукує $AQImG_{V\text{–}A}$;

$TV_{4\_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$
індукує $AQTSG_{V\text{–}A}$;

$TV_{4\_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$
індукує $AQUA_{V\text{–}A}$;

$TV_{4\_3} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$
індукує $AQTImG_{V\text{–}A}$;

$TV_{4\_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\uparrow\}$
індукує $AQTIG_{V\text{–}A}$;

$TV_{3\_1} = \{T, F, \uparrow\}$
індукує $AQP_{V\text{–}A}$;

$TV_{3\_2} = \{T, F, TF\}$
індукує $AQT_{V\text{–}A}$;

$TV_{3\_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$
індукує $AQU_{=}A_{V\text{–}A}$;

$TV_{3\_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$
індукує $AQTTIG_{V\text{–}A}$;

$TV_{3\_5} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow\}$
індукує $AQSTIG_{V\text{–}A}$;

$TV_{2\_1} = \{T, F\}$
індукує $AQTS_{V\text{–}A}$;

$TV_{2\_2} = \{T\uparrow, F\uparrow\}$
індукує $AQTSTIG_{V\text{–}A}$;

$TV_{2\_3} = \{TF, TF\uparrow\}$
індукує $AQTAmG_{V\text{–}A}$;

$TV_{1\_1} = \{\uparrow\}$
індукує $AQ\bot_{V\text{–}A}$;

$TV_{1\_2} = \{TF\}$
індукує $AQ\Upsilon_{V\text{–}A}$;

$TV_{1\_3} = \{TF\uparrow\}$
індукує $AQ\Upsilon\bot_{V\text{–}A}$.

Необхідною умовою коректності (“природності”) логічних зв'язок предикатних алгебр можна вважати умову TFC (TF-correct). Для $\vee$ та $\neg$вона задається так (тут $\alpha, \beta \in PrG_{V\text{–}A}$):

$$T(\alpha\vee\beta) = T(\alpha)\cup T(\beta),\ F(\alpha\vee\beta) = F(\alpha)\cap F(\beta);$$

$$T(\neg\alpha) = F(\alpha),\ F(\neg\alpha) = T(\alpha).$$

Виконання умови TFC має бути, зокрема, для константних предикатів T, F, $\bot$, $\mathrm{T}_{\uparrow}$, $\mathrm{F}_{\uparrow}$, Υ, $\Upsilon_{\uparrow}$, індукованих істиннісними значеннями $\uparrow$, T, F, TF, $T\uparrow$, $F\uparrow$, $TF\uparrow$.

Умова TFC виконується для алгебр $APG_{V\text{–}A}$, $ARG_{V\text{–}A}$, $AQG_{V\text{–}A}$, тому вона має виконуватися для всіх її підалгебр, індукованих відповідними підалгебрами ATV_7 .

3. Девіантні підмножини TV_7 та індуковані ними логіки GND-предикатів

Задаючи ті чи інші умови для областей істинності, хибності та невизначеності, виділено низку різноманітних класів

GND-предикатів. Водночас не всі так описані класи замкнені щодо композиції диз'юнкції *GND*-предикатів. Це, зокрема, клас *R*-предикатів та класи *AnU*-предикатів, *TAnU*-предикатів, *RAU*-предикатів, *UAU*-предикатів, $nU_{=}A$-предикатів, $TnU_{=}A$-предикатів. Ці класи індуковано відповідними класами *TD*7-предикатів із такими множинами істиннісних значень:

– $TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$;

– $TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$;

– $TV_{RAU} = TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$;

– $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$;

– $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$;

– $TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$;

– $TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$.

Ці множини замкнені щодо $\neg_*$, але незамкнені щодо $\vee_*$, тому вони не утворюють підалгебр ATV_7. Для того, щоб клас *TD*7-предикатів з такою множиною істиннісних значень утворював алгебру, треба тим чи іншим способом *модифікувати* $\vee_*$. Відповідно модифікується похідна $\&_*$.

Множини істиннісних значень, незамкнені щодо $\neg_*$ чи $\vee_*$, назвемо *девіантними*. Класи *TD*7-предикатів із девіантними множинами істиннісних значень та відповідні класи *GND*-предикатів теж назвемо *девіантними*. Девіантні класи *GND*-предикатів незамкнені щодо $\neg$ чи $\vee$.

Ми не розглядатимемо можливість модифікації композиції $\neg_*$, така модифікація веде до цілком некласичних логік, які вимагають окремого дослідження. З цієї ж причини розглядаємо такі модифікації $\vee_*$, які можуть мати відмінні від $\vee_*$ значення тільки для аргументів $\uparrow$, TF, $TF\uparrow$.

Отримані при модифікації $\vee_*$ *TV*-алгебри індукують алгебри *TD*7-предикатів, які далі індукують відповідні алгебри *GND*-предикатів на пропозиційному, реномінативному, першопорядковому рівнях. В цих алгебрах відповідним чином модифікується $\vee$, тому вони не будуть підалгебрами алгебр $APG_{V\text{–}A}$, $ARG_{V\text{–}A}$, $AQG_{V\text{–}A}$. В деяких випадках маємо *ізоморфізм* цих алгебр та певних підалгебр алгебр $APG_{V\text{–}A}$, $ARG_{V\text{–}A}$, $AQG_{V\text{–}A}$, а тому маємо їх *вкладення* в $APG_{V\text{–}A}$, $ARG_{V\text{–}A}$, $AQG_{V\text{–}A}$.

Нехай $TV \subseteq TV_7$. Так як $\neg_*$ не модифікуємо, то розглядаємо лише такі *TV*, які *замкнені* щодо $\neg_*$. Нехай в обмеженні таблиці істинності $\vee_*$ для *TV* маємо деяке істиннісне значення $\nu \notin TV$. Модифікація $\vee_*$ полягає у заміні значень ν в таблиці $\vee_*$ для *TV* на деяке $\tau \in TV$. Зрозуміло, що існує дуже багато способів це зробити. В першу чергу розглядаємо такі модифікації, для яких виконується умова *TFC* коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні *TFC TV*-алгебра *не індукує* для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними пропозиційними композиціями. Таку *TV*-алгебру назвемо *девіантною*.

Для множин TV_{AnU}, TV_{TAnU}, TV_{D5}, TV_R, TV_{UAU}, $TV_{TnU=A}$ існують модифікації $\vee_*$ та $\vee$ із дотриманням умови *TFC*, тому й маємо такі класи *GND*-предикатів, як *AnU*, *TAnU*, *RAU*, *R*, *UAU*, $nU_{=}A$, $TnU_{=}A$.

Ще залишається розглянути множину істиннісних значень $\{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$, яка незамкнена щодо $\vee_*$:

$$TF \vee_* \uparrow = T\uparrow \text{ та } TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow.$$

Її підмножини $\{TF, \uparrow\}$ та $\{TF\uparrow, \uparrow\}$ теж незамкнені щодо $\vee_*$. Далі покажемо, що для цих множин не існує модифікацій $\vee_*$, які індукують виконання *TFC*. Тому не існує *TV*-алгебр з носіями $\{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$, $\{TF, \uparrow\}$ чи $\{TF\uparrow, \uparrow\}$, які індукують для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними $\vee$ та $\&$. Інакше кажучи, усі такі *TV*-алгебри девіантні.

Логіка *AnU*-предикатів. Множина $TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Природна модифікація $\vee_*$ як $\vee_{AnU}$ така: $TF \vee_{AnU} F\uparrow = TF$.

Тоді TV_{AnU} замкнена щодо визначених нижче $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$ (табл. 4, 5).

Таблиця 4. Композиція $\vee_{AnU}$

$\vee_{AnU}$	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	TF
T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	TF
$T\uparrow$	T	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$
$F\uparrow$	T	$F\uparrow$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	TF
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$T\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$T\uparrow$
TF	T	TF	$T\uparrow$	TF	$T\uparrow$	TF

Таблиця 5. Композиція $\&_{AnU}$

$\&_{AnU}$	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	TF
T	T	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	TF
F	F	F	F	F	F	F
$T\uparrow$	$T\uparrow$	F	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	TF
$F\uparrow$	$F\uparrow$	F	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$F\uparrow$
TF	TF	F	TF	$F\uparrow$	$F\uparrow$	TF

Діаграма Хассе для TV_{AnU} щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$ така:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[dr] & \\ F \arrow[r] & F\uparrow \arrow[u] \arrow[d] & T\uparrow \arrow[r] & T \\ & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Отримуємо TV-алгебру ATV_{AnU}, яка індукує алгебру AnU-предикатів $AQAnU^{V\text{–}A}$.

Твердження 2. Модифікація $\vee_*$ як $\vee_{AnU}$ – єдина для TV_{AnU}, яка гарантує TFC.

Маємо
$T(TF\vee F\uparrow) = T(TF)\cup T(F\uparrow) = {}^{V}\!A\cup\varnothing = {}^{V}\!A$,
$F(TF\vee F\uparrow) = F(TF)\cap F(F\uparrow) = {}^{V}\!A\cap {}^{V}\!A = {}^{V}\!A$,

Отже, згідно TFC для $TF\vee_{AnU}F\uparrow$ можливі лише TF чи $TF\uparrow$.

Проте $TF\uparrow\notin TV_{AnU}$, тому TF – єдина можливість:
$T(TF\vee F\uparrow) = T(TF)$, $F(TF\vee F\uparrow) = F(TF)$.

Таблицю істинності $\vee_{AnU}$ для ATV_{AnU} можна отримати із таблиці істинності $\vee_*$ для ATV_{6_1} заміною $TF\uparrow$на TF. Звідси

Твердження 3. $ATV_{AnU} \sim_{iz} ATV_{6\_1}$.

Наслідок 1. $AQAnU_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQAU_{V\text{–}A}$.

Логіка *TAnU*-предикатів. Множина $TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF\vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Маємо $TV_{TAnU}\subseteq TV_{AnU}$. Множина TV_{TAnU} замкнена щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$.

Діаграма Хассе для TV_{TAnU} щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$ така:

$$F \to F\uparrow \to TF \to T\uparrow \to T.$$

Маємо TV-алгебру ATV_{AnU}, яка індукує алгебру $TAnU$-предикатів $AQTAnU^{V\text{–}A}$.

Модифікація $\vee_*$ як $\vee_{AnU}$ – єдина для TV_{AnU}, яка гарантує умови TFC, тому така модифікація теж єдина, яка гарантує умови TFC, для її підмножини $TV_{TAnU}\subseteq TV_{AnU}$.

Таблицю істинності $\vee_{AnU}$ для ATV_{TAnU} можна отримати із таблиці істинності $\vee_*$ для ATV_{5_1} заміною $\uparrow$на TF та із таблиці істинності $\vee_*$ для ATV_{5_2} заміною $TF\uparrow$ на TF. Звідси

Твердження 4.

$$ATV_{TAnU} \sim_{iz} ATV_{5\_1} \sim_{iz} ATV_{5\_2} .$$

Наслідок 2.

$$AQTAnU_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQSG_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQTAU_{V\text{–}A} .$$

Логіка *RAU*-предикатів. Множина $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$ *незамкнена* щодо $\vee_*$: $TF\vee_*\uparrow = T\uparrow$; $TF\uparrow\vee_*\uparrow = T\uparrow$. Тому TV_{D5} не утворює підалгебри алгебри ATV_7 .

Розглянемо допустимі варіанти модифікації $\vee_*$ у випадку TV_{D5}. Потрібно модифікувати значення $TF\vee_*\uparrow$ та $TF\uparrow\vee_*\uparrow$ так, щоб отримати елемент $\tau\in TV_{D5}$.

Маємо

$T(TF\vee\uparrow) = T(TF)\cup T(\uparrow) = T(TF) = {}^{V}\!A$ та $T(TF\uparrow\vee\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = T(TF\uparrow) = {}^{V}\!A$;

$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\varnothing = \varnothing$ та $F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = \varnothing$.

Отже, за умови TFC таким τ може бути лише T. Отримуємо

Твердження 5. Єдиною модифікацією $\vee_*$ для TV_{D5} за умови TFC є така $\vee_{RAU}$:

$TF \vee_{RAU} \uparrow = T$ та $TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T$.

Маємо TV-алгебру ATV_{RAU}, задамо її логічні зв'язки $\vee_{RAU}$ та $\&_{RAU}$ (табл. 6, 7).

Таблиця 6. Композиція $\vee_{RAU}$

$\vee_{RAU}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$\uparrow$	T	T
TF	T	TF	T	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 7. Композиція $\&_{RAU}$

$\&_{RAU}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	F	F
TF	TF	F	F	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	F	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Діаграма Хассе щодо $\vee_{RAU}$ така:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[drr] & & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & & T \\ & TF \arrow[r] & TF\uparrow \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Діаграма Хассе щодо $\&_{RAU}$ така:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[drr] & & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & & T \\ & TF\uparrow \arrow[r] & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Твердження 6. ATV_{RAU} неізоморфна алгебрам ATV_{5_1}, ATV_{5_2}, ATV_{5_3}, ATV_{AnU}.

Наслідок 3. Алгебра $AQRAU_{V\text{–}A}$ неізоморфна алгебрам $AQSG_{V\text{–}A}$, $AQTAU_{V\text{–}A}$, $AQImG_{V\text{–}A}$, $AQAnU_{V\text{–}A}$.

Логіка *R*-предикатів. Особливе місце посідає множина істиннісних значень $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$, безпосередньо пов'язана з логікою R-предикатів.

Множина TV_R незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Отже, TV_R не утворює підалгебри алгебри ATV_7.

Таким чином, алгебра R-предикатів $AQR_{V\text{–}A}$ не є підалгеброю алгебри $AQG_{V\text{–}A}$.

Маємо $TV_R \subseteq TV_{RAU}$. Множина TV_R замкнена щодо композицій $\vee_{RAU}$ та $\&_{RAU}$.

Алгебра ATV_R – це фактично алгебра ATV_B істиннісних значень відомої [10] 4-значної логіки Белнапа. Композиції $\vee_B$ та $\&_B$ логіки Белнапа – це звуження композицій $\vee_{RAU}$ та $\&_{RAU}$ на множину TV_R. Це гарантує виконання умови TFC.

Діаграма Хассе для множини TV_R щодо композицій $\vee_B$ та $\&_B$ така:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[dr] & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Твердження 7.

$ATV_{4\_4} \sim_{iz} ATV_B \sim_{iz} ATV_R$.

Алгебра $AQR_{V\text{–}A}$ є *вкладенням* в алгебри $AQImG_{V\text{–}A}$ та $AQAU_{V\text{–}A}$, тому й в $AQG_{V\text{–}A}$. Алгебра $AQR_{V\text{–}A}$ не індукується підалгебрами алгебри ATV_7. В $AQR_{V\text{–}A}$ композиція $\vee$ узгоджена із композицією $\vee_B$.

Наслідок 4. $AQR_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQTIG_{V\text{–}A}$.

Логіка *nU=A*-предикатів. Множина $TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\} \subseteq TV_{AnU}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$. Така $TV_{nU=A}$ замкнена щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$. TV-алгебра $ATV_{nU=A}$ індукує алгебру $nU{=}A$-предикатів $AQnU{=}A_{V\text{–}A}$.

Діаграма Хассе для $TV_{nU=A}$ щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$ така:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[dr] & \\ F\uparrow \arrow[ur] \arrow[dr] & & T\uparrow \\ & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Логіка *UAU*-предикатів. Множина $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $\uparrow \vee_* TF\uparrow = T\uparrow$. Маємо $TV_{UAU} \subseteq TV_{RAU}$, така TV_{UAU} замкнена щодо $\vee_{RAU}$ та $\&_{RAU}$. TV-алгебра ATV_{UAU} індукує алгебру UAU-предикатів $AQUAU_{V\text{–}A}$.

Діаграма Хассе для TV_{UAU} щодо $\vee_{RAU}$ та $\&_{RAU}$ така:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[dr] & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & TF\uparrow \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Порівнюючи таблиці істинності $\vee_{RAU}$ для ATV_{UAU}, $\vee_{AnU}$ для $ATV_{nU=A}$, $\vee_{RAU}$ для ATV_R та $\vee_*$ для ATV_{4_4}, отримуємо:

Твердження 8. $ATV_{UAU} \sim_{iz}$

$\sim_{iz} ATV_{nU=A} \sim_{iz} ATV_R \sim_{iz} ATV_{4\_4}$.

Наслідок 5. $AQUAU_{V\text{–}A} \sim_{iz}$

$\sim_{iz}$ $AQnU_{=}A_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQR_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQTIG_{V\text{–}A}$.

Логіка *TnU=A*-предикатів. Множина $TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$. Водночас $TV_{TnU=A}$ замкнена щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$. TV-алгебра $ATV_{TnU=A}$ індукує алгебру $TnU_{=}A$-предикатів $AQTnU_{=}A_{V\text{–}A}$.

Діаграма Хассе для $TV_{TnU=A}$ щодо $\vee_{AnU}$ та $\&_{AnU}$ така:

$$F\uparrow \rightarrow TF \rightarrow T\uparrow$$

Порівнюючи таблицю істинності $\vee_{AnU}$ для $ATV_{TnU=A}$ із таблицями істинності $\vee_*$ для ATV_{3_1}, ATV_{3_2}, ATV_{3_3}, ATV_{3_4}, ATV_{3_5}, отримуємо:

Твердження 9. $ATV_{TnU=A} \sim_{iz} ATV_{3\_1}$

$\sim_{iz} ATV_{3\_2} \sim_{iz} ATV_{3\_3} \sim_{iz} ATV_{3\_4} \sim_{iz} ATV_{3\_5}$.

Наслідок 6.

$AQTnU_{=}A_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQP_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQT_{V\text{–}A} \sim_{iz}$

$\sim_{iz} AQTU_{=}A_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQTTIG_{V\text{–}A} \sim_{iz} AQSTIG_{V\text{–}A}$.

4. Логіки, індуковані TV_{D5}

Єдиним допустимим варіантом модифікації $\vee_*$ за умови *TFC* у випадку TV_{D5} є такий: $TF \vee_{RAU} \uparrow = T$ та $TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T$. Він веде до логіки *RAU*-предикатів.

Інші варіанти модифікації $\vee_*$для TV_{D5} шляхом корекції виділених значень $T\uparrow$ в таблиці $\vee_*$ ведуть до *істотно* девіантних логік, для яких не виконується *TFC*.

Через порушення умови *TFC* *TV*-алгебри девіантні, вони не індукують для *GND*-предикатів композиційні алгебри із коректними $\vee$ та &.

Розглянемо для TV_{D5} варіант модифікації $\vee_*$, який веде до специфічної логіки *EU*-предикатів, істотно відмінної від логіки *GND*-предикатів.

5-значна логіка *EU*. Оригінальна 5-значна логіка *EU* описана в [11]. Множиною істиннісних значень такої логіки є $TV_{EU} = \{T, F, \text{u}, \text{e}, \text{eu}\}$; при цьому u (невизначеність) трактується як $\uparrow$ у нас, проте трактування e (помилка) та eu дещо відмінне від їх трактування як *TF* та $TF\uparrow$ в алгебрі *ATV7*. Проте для уніфікації позначень множиною істиннісних значень логіки *EU* вважаємо $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Логічна зв'язка $\neg_{\text{eu}}$ логіка *EU* ідентична логічній зв'язці $\neg_*$.

Логічні зв'язки $\vee_{\text{eu}}$ та $\&_{\text{eu}}$ логіки *EU* задаються так (табл. 8, 9).

Таблиця 8. Композиція $\vee_{\text{eu}}$

$\vee_{\text{eu}}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
TF	T	TF	$TF\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 9. Композиція $\&_{\text{eu}}$

$\&_{\text{eu}}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
TF	TF	F	$TF\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Отже, $\vee_{\text{eu}}$ отримано такою модифікацією $\vee_*$:

$TF \vee_{\text{eu}} \uparrow = TF\uparrow$ та $TF\uparrow \vee_{\text{eu}} \uparrow = TF\uparrow$.

Для EU умова TFC *не виконується*:

$F(TF{\uparrow}\vee{\uparrow}) = F(TF{\uparrow})\cap F({\uparrow}) = F(TF{\uparrow})\cap\varnothing = \varnothing$

та $F(TF\vee{\uparrow}) = F(TF)\cap F({\uparrow}) = F(TF)\cap\varnothing = \varnothing$, водночас $F(TF{\uparrow}) \neq \varnothing$.

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\vee_{\mathrm{eu}}$:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[dr] & & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & TF{\uparrow} \arrow[r] & T \\ & TF \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\&_{\mathrm{eu}}$:

$$\begin{tikzcd} & & \uparrow \arrow[dr] & \\ F \arrow[r] & TF{\uparrow} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Маємо TV-алгебру AEU. Через порушення TFC алгебра AEU девіантна, вона не індукує для GND-предикатів композиційну алгебру із коректними $\vee$ та $\&$.

Алгебра AEU неізоморфна алгебрам ATV_{5_1}, ATV_{5_2}, ATV_{5_3}, ATV_{AnU}, ATV_{RAU}.

Опишемо ще 3 варіанти модифікації $\vee_*$ для TV_{D5}. Всі інші варіанти такої модифікації видаються зовсім неприродними.

Варіант_1. Модифікуємо $\vee_*$ як $\vee_\#$ так: $TF\vee_\#{\uparrow} = TF$ та $TF{\uparrow}\vee_\#{\uparrow} = TF{\uparrow}$.

Єдина відмінність $\vee_\#$ від $\vee_{\mathrm{eu}}$ у тому, що $TF\vee_{\mathrm{eu}}{\uparrow} = TF{\uparrow}$.

Умова TFC *не виконується*:
$F(TF\vee{\uparrow}) = F(TF)\cap F({\uparrow}) = F(TF)\cap\varnothing = \varnothing$, водночас $F(TF) \neq \varnothing$.

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\vee_\#$:

$$F \to {\uparrow} \to TF \to TF{\uparrow} \to T$$

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\&_\#$:

$$F \to TF{\uparrow} \to TF \to {\uparrow} \to T$$

Маємо TV-алгебру, яку через подібність до AEU назвемо $AEU_\#$.

$AEU_\#$ неізоморфна алгебрам ATV_{5_1}, ATV_{5_2}, ATV_{5_3}, ATV_{RAU}, ATV_{TAnU}, AEU.

Через порушення TFC девіантна алгебра $AEU\#$ не індукує композиційну алгебру GND-предикатів із коректними $\vee$ та $\&$.

Варіант_2. Модифікуємо $\vee_*$ як $\vee_{\#D}$ так: $TF\vee_{\#D}{\uparrow} = TF$ та $TF{\uparrow}\vee_{\#D}{\uparrow} = TF$.

Отримуємо логічні зв'язки $\vee_{\#D}$ та $\&_{\#D}$, що задаються так (табл. 10, 11).

Таблиця 10. Композиція $\vee_{\#D}$

$\vee_{\#D}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF{\uparrow}$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	$\uparrow$	TF	$TF{\uparrow}$
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$\uparrow$	TF	TF
TF	T	TF	TF	TF	$TF{\uparrow}$
$TF{\uparrow}$	T	$TF{\uparrow}$	TF	$TF{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$

Таблиця 11. Композиція $\&_{\#D}$

$\&_{\#D}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF{\uparrow}$
T	T	F	$\uparrow$	TF	$TF{\uparrow}$
F	F	F	F	F	F
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	TF	TF
TF	TF	F	TF	TF	$TF{\uparrow}$
$TF{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$	F	TF	$TF{\uparrow}$	$TF{\uparrow}$

Умова TFC *не виконується*:
$F(TF\vee{\uparrow}) = F(TF)\cap F({\uparrow}) = F(TF)\cap\varnothing = \varnothing$, водночас $F(TF) \neq \varnothing$.

$\vee_{\#D}$ і $\&_{\#D}$ *неасоціативні.* Покажемо для $\vee_{\#D}$: ${\uparrow}\vee_{\#D}(TF{\uparrow}\vee_{\#D}TF) = {\uparrow}\vee_{\#D}TF{\uparrow} = TF$; $({\uparrow}\vee_{\#D}TF)\vee_{\#D}TF{\uparrow} = TF\vee_{\#D}TF{\uparrow} = TF{\uparrow}$.

$\vee_{\#D}$ і $\&_{\#D}$ *не задають* впорядкування TV_{D5} через порушення транзитивності. Показуємо це для $\vee_{\#D}$. $\alpha\to\beta$ означає $\alpha\vee_{\#D}\beta = \beta$, тому ${\uparrow}\to TF$ та $TF\to TF{\uparrow}$. За транзитивністю має бути ${\uparrow}\to TF{\uparrow}$, тобто ${\uparrow}\vee_{\#D}TF{\uparrow} = TF{\uparrow}$. Проте ${\uparrow}\vee_{\#D}TF{\uparrow} = TF$.

Отже, отримана TV-алгебра $AEU_{\#D}$ ***цілком девіантна***.

Варіант_3. Маємо $TV_R\subseteq TV_{D5}$, тому розглянемо модифікацію $\vee_{\#T}$ композиції $\vee_*$, яка є розширенням $\vee_B$ на TV_{D5}.

Модифікуємо $\vee_*$ як $\vee_{\#T}$ так:

$$TF\vee_{\#T}{\uparrow} = T \text{ та } TF{\uparrow}\vee_{\#T}{\uparrow} = TF{\uparrow}.$$

Така $\vee_{\#T}$ відмінна від $\vee_{RAU}$ лише у тому, що $TF{\uparrow}\vee_{RAU}{\uparrow} = T$.

Отримуємо логічні зв'язки $\vee_{\#T}$ та $\&_{\#T}$, що задаються так (табл. 12, 13).

Таблиця 12. Композиція $\vee_{\#T}$

$\vee_{\#T}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T
F	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$\uparrow$	T	$TF\uparrow$
TF	T	TF	T	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 13. Композиція $\&_{\#T}$

$\&_{\#T}$	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
T	T	F	$\uparrow$	TF	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	F	$TF\uparrow$
TF	TF	F	F	TF	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\vee_{\#T}$:

$$\begin{tikzcd} & \uparrow \arrow[dr] & & \\ F \arrow[ur] \arrow[dr] & & TF\uparrow \arrow[r] & T \\ & TF \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Діаграма Хассе для TV_{D5} щодо $\&_{\#T}$:

$$\begin{tikzcd} & & \uparrow \arrow[dr] & \\ F \arrow[r] & TF\uparrow \arrow[ur] \arrow[dr] & & T \\ & & TF \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

TFC не виконується: $F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\varnothing = \varnothing \neq F(TF\uparrow)$.

$\vee_{\#T}$ і $\&_{\#T}$ *неасоціативні.* Покажемо для $\vee_{\#T}$: $\uparrow\vee_{\#T}(TF\uparrow\vee_{\#T}TF) = \uparrow\vee_{\#T}TF\uparrow = TF\uparrow$; $(\uparrow\vee_{\#T}TF)\vee_{\#T}TF\uparrow = T\vee_{\#T}TF\uparrow = T$.

Отримали *цілком девіантну* TV-алгебру, яку назвемо AEU_T.

AEU_T неізоморфна алгебрам ATV_{5_1}, ATV_{5_2}, ATV_{5_3}, ATV_{RAU}, ATV_{TAnU}, AEU, $AEU_{\#}$.

TV*-алгебри, індуковані підмножинами TV_{D5}**. Маємо три **4-*елементних підмножини TV_{D5}, які замкнені щодо $\neg_*$. Це TV_{4_2}, TV_R та TV_{UAU}.

Множина $TV_{4\_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$ генерує TV-алгебру ATV_{4_2}, яка індукує алгебри TUA-предикатів.

Множина $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF\vee_*\uparrow = T\uparrow$.

Модифікація $\vee_*$ як $\vee_{RAU}$ дає TV-алгебру ATV_R, яка індукує алгебри R-предикатів.

Множина $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $\uparrow\vee_* TF\uparrow = T\uparrow$.

Модифікація $\vee_*$ як $\vee_{RAU}$ дає TV-алгебру ATV_{UAU}, яка індукує алгебри UAU-предикатів.

Модифікація $\vee_*$ як $\vee_{eu}$ дає TV-алгебру AEU_{4_1}.

Зауважимо, що на множині TV_{UAU} із $\vee_{eu}$ та $\&_{eu}$ збігаються $\vee_{\#}$ та $\&_{\#}$, $\vee_{\#T}$ та $\&_{\#T}$.

Діаграма Хассе для EU_{4_1} щодо $\vee_{eu}$:

$$F \to \uparrow \to TF\uparrow \to T.$$

Діаграма Хассе для EU_{4_1} щодо $\&_{eu}$:

$$F \to TF\uparrow \to \uparrow \to T.$$

Маємо TV-алгебру AEU_{4_1}.

Для AEU_{4_1} *TFC не виконується*:

$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\varnothing = \varnothing,$$

водночас $F(TF\uparrow) \neq \varnothing$. Тому девіантна AEU_{4_1} *не індукує* композиційну алгебру GND-предикатів із коректними $\vee$ та $\&$.

AEU_{4_1} – це алгебра ATV_{4_2}, в якій $TF \Rightarrow \uparrow$. Тому $AEU_{4\_1} \sim_{iz} ATV_{4\_2}$. Водночас AEU_{4_1} неізоморфна алгебрам ATV_{4_1}, ATV_{4_3}, ATV_{4_4}, $ATV_{nU=A}$, ATV_R, ATV_{UAU}.

Розглянемо ще одну модифікацію $\vee_*$ на TV_{UAU} – це $\vee_{42}$ така: $TF\uparrow\vee_{42}\uparrow = \uparrow$.

Така $\vee_{42}$ та похідна $\&_{42}$ видаються неприродними (табл. 14, 15).

Таблиця 14. Композиція $\vee_{42}$

$\vee_{42}$	T	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T
F	T	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 15. Композиція $\&_{42}$

$\&_{42}$	T	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$
T	T	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	$\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$

Модифікація $\vee_*$ як $\vee_{42}$ дає TV-алгебру AEU_{4_2}.

Для AEU_{4_2} *TFC не виконується:* $T(TF\uparrow\vee\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup\varnothing = T(TF\uparrow) \neq \varnothing$, водночас $T(\uparrow) = \varnothing$.

Діаграма Хассе щодо $\vee_{42}$ така:

$$F \to TF\uparrow \to \uparrow \to T.$$

Діаграма Хассе щодо $\&_{42}$ така:

$$F \to \uparrow \to TF\uparrow \to T.$$

AEU_{4_2} – це ATV_{4_2}, в якій $TF\uparrow \Rightarrow \uparrow$ та $TF \Rightarrow TF\uparrow$. Тому $AEU_{4\_2} \sim_{iz} ATV_{4\_2}$.

Отже, $AEU_{4\_1} \sim_{iz} AEU_{4\_2} \sim_{iz} ATV_{4\_2}$.

Через порушення *TFC* девіантна AEU_{4_2} не індукує композиційну алгебру *GND*-предикатів із коректними $\vee$ та &.

Маємо чотири 3-***елементних*** підмножини TV_{D5}, які замкнені щодо $\neg_*$. Три з них замкнені щодо $\vee_*$.

Множина $TV_{3\_1} = \{T, F, \uparrow\}$ генерує TV-алгебру ATV_{3_1}, яка індукує алгебри *P*-предикатів.

Множина $TV_{3\_2} = \{T, F, TF\}$ генерує TV-алгебру ATV_{3_2}, яка індукує алгебри *T*-предикатів.

Множина $TV_{3\_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$ генерує TV-алгебру ATV_{3_3}, яка індукує алгебри $TU_{=}A$-предикатів.

Множина $TV_{3\_D} = \{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF\vee_*\uparrow = TF\uparrow\vee_*\uparrow = T\uparrow$.

Склад TV_{3_D} засвідчує *невідмінність* істини й фальші, що злилися воєдино!

Коректні модифікації $\vee_*$ на TV_{3_D}, для яких виконується *TFC*, *неможливі*.

Справді маємо:

$T(TF\vee\uparrow) = T(TF)\cup T(\uparrow) = {}^{V}A$;

$T(TF\uparrow\vee\uparrow) = = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = {}^{V}A$;

$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\varnothing = \varnothing$; $F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\varnothing = \varnothing$.

Отже, *єдиною* модифікацією $\vee_{md}$ композиції $\vee_*$ за умови *TFC* є така:

$$TF \vee_{md} \uparrow = T \text{ та } TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T.$$

Проте $T \notin \{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Відносно "природними" модифікаціями $\vee_*$ для TV_{3_D} є $\vee_{eu}$ та $\vee_{\#}$, до певної міри $\vee_{\#D}$.

У випадку $\vee_{eu}$ маємо TV-алгебру ATV_{3_eu}, вона є підалгеброю *AEU*.

$\vee_{eu}$ та $\&_{eu}$ на TV_{3_D} збігаються.

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\vee_{eu}$:

$\uparrow$
↘
$TF\uparrow$
↗
TF

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\&_{eu}$:

$\uparrow$
↗
$TF\uparrow$
↘
TF

У випадку $\vee_{\#}$ маємо TV-алгебру $ATV_{3\_\#}$, вона є підалгеброю $AEU_{\#}$.

$\vee_{\#}$ та $\&_{\#}$ на TV_{3_D} збігаються.

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\vee_{\#}$:

$$\uparrow \to TF \to TF\uparrow.$$

Діаграма Хассе для TV_{3_D} щодо $\&_{\#}$:

$$TF\uparrow \to TF \to \uparrow.$$

У випадку $\vee_{\#D}$ маємо TV-алгебру $ATV_{3\_\#D}$, вона є підалгеброю $AEU_{\#D}$.

$\vee_{\#D}$ та $\&_{\#D}$ на TV_{3_D} збігаються.

$\vee_{\#D}$ та $\&_{\#D}$ на TV_{3_D} неасоціативні, тому TV-алгебра $ATV_{3\_\#D}$ *цілком девіантна*.

Алгебри ATV_{3_eu}, $ATV_{3\_\#}$, $ATV_{3\_\#D}$ попарно неізоморфні, вони також неізоморфні жодній з 3-елементних алгебр ATV_{3_1}, ATV_{3_2}, ATV_{3_3}, ATV_{3_4}, ATV_{3_5}, $ATV_{TnU=A}$.

Через порушення умови *TFC* девіантні алгебри ATV_{3_eu}, $ATV_{3\_\#}$, $ATV_{3\_\#D}$ не індукують композиційні алгебри *GND*-предикатів із коректними $\vee$ та &.

Маємо чотири **2-*елементних*** підмножини TV_{D5}, які замкнені щодо $\neg_*$.

Множина $TV_{2\_1} = \{T, F\}$ генерує класичну булеву TV-алгебру ATV_{2_1}, яка індукує алгебри TS-предикатів.

Множина $TV_{2\_3} = \{TF, TF\uparrow\}$ генерує TV-алгебру ATV_{2_3}, яка індукує алгебри $TAmG$-предикатів. Клас $TAmG$-предикатів вироджений [8].

Множина $TV_{2\_D} = \{\uparrow, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Коректні модифікації $\vee_*$ із TFC, *неможливі*, адже *єдиною* модифікацією $\vee_{md}$ композиції $\vee_*$ за умови TFC є така: $TF \vee_{md} \uparrow = T$ та $TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T$.

Водночас $T \notin \{\uparrow, TF\}$.

Природні модифікації $\vee_*$ на TV_{2_D} – це $\vee_\#$ і дуальна їй на TV_{2_D} композиція $\vee_{\#d}$:
$\uparrow \vee_{\#d} \uparrow = TF \vee_{\#d} \uparrow = \uparrow \vee_{\#d} TF = TF$,
$TF\uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$.

У випадку $\vee_\#$ маємо TV-алгебру $ATV_{2\_D\#}$, вона ізоморфна алгебрі ATV_{2_3} (при перейменуванні $\uparrow$ на TF та TF на $TF\uparrow$).

У випадку $\vee_{\#d}$ маємо TV-алгебру ATV_{2_Dd}, вона ізоморфна ATV_{2_3} (при перейменуванні $\uparrow$ на $TF\uparrow$).

Множина $TV_{2\_U} = \{\uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Коректні модифікації $\vee_*$, для яких виконується TFC, *неможливі*, адже *єдиною* модифікацією $\vee_{md}$ композиції $\vee_*$ за умови TFC є така:

$$TF \vee_{md} \uparrow = T \text{ та } TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T.$$

Проте $T \notin \{\uparrow, TF\uparrow\}$.

Природні модифікації $\vee_*$ на TV_{2_U} – це $\vee_\#$ і дуальна їй на TV_{2_U} композиція $\vee_{\#du}$:
$\uparrow \vee_{\#du} \uparrow = TF\uparrow \vee_{\#du} \uparrow = \uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$,
$TF\uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$.

У випадку $\vee_\#$ маємо TV-алгебру $ATV_{2\_U\#}$, вона ізоморфна ATV_{2_3} (при перейменуванні $\uparrow$ на TF).

У випадку $\vee_{\#du}$ маємо TV-алгебру ATV_{2_Ud}, вона ізоморфна алгебрі ATV_{2_3} (при перейменуванні $\uparrow$ на $TF\uparrow$ та $TF\uparrow$ на $\uparrow$).

Через порушення TFC девіантні алгебри $ATV_{2\_D\#}$, ATV_{2_Dd}, $ATV_{2\_U\#}$, ATV_{2_Ud} не індукують композиційні алгебри GND-предикатів із коректними $\vee$ та &.

Висновки

Вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки загальних недетермінованих (GND) предикатів. GND-предикати моделюються як 7-значні $TD7$-предикати. Множина TV_7 їх істиннісних значень задає алгебру істиннісних значень (TV-алгебру) $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$. Багато підмножин TV_7 незамкнені щодо $\neg_*$ чи $\vee_*$, тому не утворюють підалгебр ATV_7. Такі підмножини та відповідні класи GND-предикатів названо девіантними. Девіантні TV-алгебри та девіантні класи GND-предикатів досліджено в даній роботі. Для того, щоб девіантна $TV \subseteq TV_7$ утворила алгебру, необхідно модифікувати $\neg_*$ чи $\vee_*$. В роботі не розглядається модифікація $\neg_*$, яка веде до специфічних некласичних логік. Найважливішими є такі модифікації $\vee_*$, для яких виконується умова TFC коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні умова TFC TV-алгебра стає девіантною, вона не індукує алгебру GND-предикатів. Для всіх підмножин TV_7 досліджено можливість модифікації $\vee_*$ із умовою TFC, що визначає відповідні класи GND-предикатів. Описано природні модифікації $\vee_*$ без умови TFC, що дає низку девіантних TV-алгебр. Для трьох девіантних множин не існує модифікацій $\vee_*$ із TFC, для них вказано відносно природні девіантні TV-алгебри.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993 – 2000.
2. Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed. 2011. Springer Netherlands. Vol. 16. P. 227–304.
3. Hähnle R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. *Logic Journal of the IGPL,* 2005. **13.** P. 415–433.
4. Jones C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. Elsevier,

Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2006. Vol. 145. P. 3–25.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
6. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С.. Шкільняк С.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування.* 2016. № 2–3. С. 73–86.
7. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. Algebra and Discrete Mathematics. 2017. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
8. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Алгебри загальних недетермінованих предикатів. *Проблеми програмування.* 2018. № 1. С. 5–21.
9. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С.. Шкільняк С.С. Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти. *Проблеми програмування.* 2018. № 2–3. С. 31–45.
10. Belnap N., Steel T. The Logic of Questions and Answers. New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
11. Нікітченко М.С., Шишацька О.В. Семантичні властивості п’ятизначних логік. *Проблеми програмування.* 2018. № 1. С. 22–35.

References

1. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T. (editors). (1993–2000). Handbook of Logic in Computer Science Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. Avron A. and Zamansky A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. In Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed., vol. 16, Springer Netherlands. P. 227–304.
3. Hähnle R. (2005). Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. *In Logic Journal of the IGPL,* **13**. P. 415–433
4. Jones C. (2006). Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In Proceedings of AVoCS’05. V. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. P. 3–25.
5. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). Applied logic. Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in ukr).
6. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. *In Problems in Progamming*. N 2–3. P. 73–86 (in ukr).
7. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In Algebra and Discrete Mathematics. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
8. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. *In Problems in Progamming*. N 1. P. 5–21 (in ukr).
9. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Logics of general non-deterministic predicates: semantic aspects. *In Problems in Progamming*. N 2–3. P. 31–45 (in ukr).
10. Belnap N. and Steel T. (1976). The Logic of Questions and Answers. New Haven and London: Yale Univ. Press.
11. Nikitchenko M., and Shyshatska E. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. *In Problems in Progamming*. N 1. P. 22–35 (in ukr).

Одержано 08.02.2019

Про авторів:

Шкільняк Оксана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри
інформаційних систем.
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – понад 90,
у тому числі у фахових виданнях – 35.
Кількість наукових публікацій в
зарубіжних виданнях – 12.
Scopus Author ID: 57190873266
h-індекс (Google Scholar): 5 (4 з 2014)
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 05 19.
E-mail: me.oksana@gmail.com