

## ДЕВІАНТНІ АЛГЕБРИ ІСТИННІСНИХ ЗНАЧЕНЬ ТА ДЕВІАНТНІ КЛАСИ ЗАГАЛЬНИХ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРЕДИКАТІВ

Вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки загальних недетермінованих (*GND*) предикатів. *GND*-предикати моделюються як 7-значні *TD7*-предикати. Досліджено девіантні алгебри істиннісних значень (*TV*-алгебри) *TD7*-предикатів та девіантні класи *GND*-предикатів. Девіантна *TV*-алгебра не індукує алгебру *GND*-предикатів. Для підмножин істиннісних значень досліджено можливість модифікації  $\vee_*$  із умовою коректності *TFC*, що визначає відповідні класи *GND*-предикатів. Описано природні модифікації  $\vee_*$  без *TFC*, що дає низку девіантних *TV*-алгебр.

Ключові слова: логіка, алгебра, недетермінований предикат, 7-значний предикат.

### Вступ

Основа сучасних інформаційних та програмних систем – це апарат математичної логіки. Різноманітні логічні формалізми успішно використовуються для розв'язання широкого кола задач інформатики й програмування [1 – 4]. Водночас розвиток та розширення сфери застосування інформаційних технологій зумовлює необхідність розробки нових логік, які більше адаптовані до потреб програмування й моделювання. Найперше, ці логіки мають враховувати широке використання в програмних системах та системах штучного інтелекту часткових недетермінованих відображень над неповними даними. До таких програмно-орієнтованих логічних формалізмів належать композиційно-номінативні логіки (КНЛ) квазіарних предикатів [5 – 7].

Важливим класом КНЛ є логіки загальних недетермінованих квазіарних предикатів, або *GND*-предикатів. Ці логіки запропоновано в [8], вони вивчалися в [8, 9]. Зазначені логіки відображають такі властивості програм, як частковість, недетермінізм, нефіксовану арність. В роботах [8, 9] виділено різновиди *GND*-предикатів, описано композиційні алгебри та мови логіки *GND*-предикатів. *GND*-предикати можна моделювати як 7-значні тотальні детерміновані (*TD7*) предикати. Описано усі 20 підалгебр алгебри істиннісних значень (*TV*-алгебри) *TD7*-предикатів

$ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$ . Досліджено індукування цими підалгебрами відповідних алгебр *TD7*-предикатів та *GND*-предикатів.

Існує надзвичайно багато 7-значних логік, тому багато підмножин  $TV_7$  незамкнені щодо  $\neg_*$  чи  $\vee_*$ , вони не утворюють підалгебр  $ATV_7$ . Такі підмножини та відповідні їм класи *GND*-предикатів названо *девіантними*. Дослідженню девіантних *TV*-алгебр та девіантних класів *GND*-предикатів присвячена дана робота.

Для того, щоб девіантна  $TV \subseteq TV_7$  утворила алгебру, необхідно модифікувати  $\neg_*$  чи  $\vee_*$ . Модифікація  $\neg_*$  веде до специфічних неklasичних логік, вона в роботі не розглядається. Найважливішими є модифікації  $\vee_*$ , для яких виконується умова *TFC* коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні *TFC* *TV*-алгебра *девіантна*, вона не індукує алгебру *GND*-предикатів. Для всіх підмножин  $TV_7$  в роботі досліджено можливість модифікації  $\vee_*$  із умовою *TFC*, що визначає відповідні класи *GND*-предикатів. Описано природні модифікації  $\vee_*$  без *TFC*, що дає низку девіантних *TV*-алгебр. Для деяких девіантних множин не існує модифікацій  $\vee_*$  із умовою *TFC*, для них вказано відносно природні девіантні *TV*-алгебри.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачимо в сенсі [6, 8, 9].

### 1. GND та TD7-предикати

*V-A-квазіарним предикатом* називають часткову неоднозначну, взагалі кажучи, функцію вигляду  $P : V A \rightarrow \{T, F\}$ . Тут  $\{T, F\}$  – множина істиннісних значень,  $V A$  – множина всіх *V-A*-іменних множин.

Часткові неоднозначні предикати на множині  $V A$  можна трактувати як відповідності (відношення) між  $V A$  та  $\{T, F\}$ . Такі предикати названо [5, 6] квазіарними предикатами реляційного типу, або *R*-предикатами. Для *R*-предикатів неможлива ситуація, коли при застосуванні предиката *P* до певного даного *d* виробляється результат (можливо, не один), водночас застосування *P* до цього *d* може дати невизначеність (результат не виробляється).

В загальному випадку поняття неоднозначного (недетермінованого) квазіарного предиката адекватно уточнюється [8, 9] як поняття *GND*-предиката – загального недетермінованого предиката. Такий предикат  $P : V A \rightarrow \{T, F\}$  при застосуванні до даного  $d \in V A$  може приймати значення *T*, приймати значення *F*, а може і не приймати жодного значення (бути невизначеним). Множиною значень  $P[d]$ , які *GND*-предикат *P* може прийняти на даному  $d \in V A$ , може бути одна з множин  $\{\emptyset\}, \{T\}, \{F\}, \{T, F\}, \{T, \emptyset\}, \{F, \emptyset\}, \{T, F, \emptyset\}$ .

Скорочено позначимо ці множини як  $\uparrow, T, F, TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow$ .

Кожний *GND*-предикат *P* можна однозначно описати за допомогою 3-х множин: області істинності  $T(P)$ , області хибності  $F(P)$  та області невизначеності  $\perp(P)$ . Ці множини задаються наступним чином:

$$\begin{aligned} - T(P) &= \{d \mid T \in P[d]\}; \\ - F(P) &= \{d \mid F \in P[d]\}; \\ - \perp(P) &= \{d \mid \emptyset \in P[d]\} = \\ &= \{d \mid P \text{ може бути невизначеним на } d\}. \end{aligned}$$

Такі множини пов'язує умова:

$$F(P) \cup T(P) \cup \perp(P) = V A .$$

Кожний *R*-предикат  $P : V A \rightarrow \{T, F\}$  на даному  $d \in V A$  може приймати лише значення *T*, лише значення *F*, обидва значення *T* та *F*, та може бути невизначеним. Тому

для *R*-предиката *P* множина  $P[d]$  може бути однією з  $\{\emptyset\}, \{T\}, \{F\}, \{T, F\}$ . Кожний *R*-предикат *P* можна однозначно задати за допомогою 2-х множин:  $T(P)$  та  $F(P)$ . Тоді  $\perp(P)$  є доповненням до  $T(P) \cup F(P)$ .

Накладаючи ті чи інші обмеження на області істинності, хибності та невизначеності, виділено [8, 9] низку класів *GND*-предикатів. Зокрема, маємо 7 константних *GND*-предикатів:  $\perp, T, F, Y, T_{\uparrow}, F_{\uparrow}, Y_{\uparrow}$ .

*GND*-предикати можна моделювати [8] як 7-значні тотальні детерміновані предикати, або *TD7*-предикати. Множиною істиннісних значень *TD7*-предикатів є  $TV_7 = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$ .

Класи *V-A*-квазіарних *GND*-предикатів та *TD7*-предикатів позначають відповідно  $PrG_{V-A}$  та  $PrTD7_{V-A}$ .

Базові пропозиційні композиції *TD7*-предикатів – це логічні зв'язки заперечення  $\neg_*$  та диз'юнкція  $\vee_*$ . Задаємо їх традиційним чином – за допомогою таблиць істинності (табл. 1, 2).

Таблиця 1. Композиція  $\neg_*$

P	T	F	T↑	F↑	↑	TF	TF↑
$\neg_*P$	F	T	F↑	T↑	↑	TF	TF↑

Таблиця 2. Композиція  $\vee_*$

$\vee_*$	T	F	T↑	F↑	↑	TF	TF↑
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T↑	F↑	↑	TF	TF↑
T↑	T	T↑	T↑	T↑	T↑	T↑	T↑
F↑	T	F↑	T↑	F↑	↑	TF↑	TF↑
↑	T	↑	T↑	↑	↑	T↑	T↑
TF	T	TF	T↑	TF↑	T↑	TF	TF↑
TF↑	T	TF↑	T↑	TF↑	T↑	TF↑	TF↑

Композиція кон'юнкції  $\&_*$  – похідна:

$$P \&_* Q = \neg_*(\neg_*P \vee_* \neg_*Q).$$

Тому  $\&_*$  можна подати так (табл. 3).

Таблиця 3. Композиція  $\&_*$

$\&_*$	$T$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$T\uparrow$	$T\uparrow$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
$TF$	$TF$	$F$	$TF\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F$	$TF\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Множина істиннісних значень  $TV_7$  замкнена щодо  $\neg_*$ ,  $\vee_*$  та  $\&_*$ .

## 2. Алгебра істиннісних значень TD7-предикатів та її підалгебри

Алгебру  $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$  назвемо алгеброю істиннісних значень, або  $TV$ -алгеброю TD7-предикатів. Розглядають також  $TV$ -алгебру TD7-предикатів розширеної сигнатури  $ATV_{7E} = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$ .

Для логічних зв'язок TD7-предикатів маємо [8, 9] традиційні властивості:

- комутативність  $\vee_*$  та  $\&_*$ ;
- асоціативність  $\vee_*$  та  $\&_*$ ;
- ідемпотентність  $\vee_*$  та  $\&_*$ ;
- зняття подвійного заперечення;
- закон контрапозиції;
- закони де Моргана.

Проте для TD7-предикатів неправильні закони дистрибутивності  $\vee_*$  щодо  $\&_*$  та  $\&_*$  щодо  $\vee_*$ , також неправильні закони поглинання.

### Приклад 1.

$$\begin{aligned} (\uparrow \vee_* T) \&_* TF &= T \&_* TF = TF, \text{ водночас} \\ (\uparrow \&_* TF) \vee_* (T \&_* TF) &= F\uparrow \vee_* TF = TF\uparrow; \\ (\uparrow \&_* F) \vee_* TF &= F \vee_* TF = TF, \text{ водночас} \\ (\uparrow \vee_* TF) \&_* (F \vee_* TF) &= TF\uparrow \&_* TF = TF\uparrow. \end{aligned}$$

### Приклад 2.

$$\begin{aligned} TF \vee_* (TF \&_* \uparrow) &= TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow \neq TF; \\ TF \&_* (TF \vee_* \uparrow) &= TF \&_* T\uparrow = TF\uparrow \neq TF. \end{aligned}$$

Це цілком зрозуміло в світлі того, що  $GND$ -предикати моделюються TD7-предикатами, а в логіці  $GND$ -предикатів не виконуються [8] закони дистрибутивності та закони поглинання.

Для множини  $TV_7$  задаємо [8] природне впорядкування щодо  $\vee_*$  та щодо  $\&_*$ .

Впорядкування  $TV_7$  щодо  $\vee_*$ :

$$\alpha \rightarrow_{\vee} \beta, \text{ якщо } \alpha \vee_* \beta = \beta.$$

Впорядкування  $TV_7$  щодо  $\&_*$ :

$$\alpha \rightarrow_{\&} \beta, \text{ якщо } \alpha \&_* \beta = \alpha.$$

**Твердження 1.** Впорядкування  $\rightarrow_{\vee}$  та  $\rightarrow_{\&}$  транзитивні:

$$\alpha \rightarrow_{\vee} \beta \text{ та } \beta \rightarrow_{\vee} \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow_{\vee} \gamma.$$

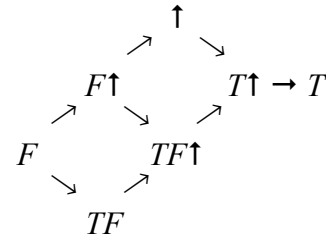
$$\alpha \rightarrow_{\&} \beta \text{ та } \beta \rightarrow_{\&} \gamma \Rightarrow \alpha \rightarrow_{\&} \gamma.$$

Таку транзитивність гарантує асоціативність  $\vee_*$  та  $\&_*$ :

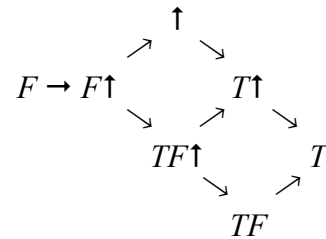
$$\begin{aligned} \alpha \vee_* \gamma &= \alpha \vee_* (\beta \vee_* \gamma) = \\ &= (\alpha \vee_* \beta) \vee_* \gamma = \beta \vee_* \gamma = \gamma; \\ \alpha \&_* \gamma &= \alpha \&_* (\beta \&_* \gamma) = (\alpha \&_* \beta) \&_* \gamma = \\ &= \beta \&_* \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

Наведемо діаграми Хасе для множини  $TV_7$  щодо  $\vee_*$  та  $\&_*$  [8].

Діаграма Хасе для  $TV_7$  щодо  $\vee_*$ :



Діаграма Хасе для  $TV_7$  щодо  $\&_*$ :



Це означає, що  $TV_7$  не утворює решітки істиннісних значень. Причиною цього є те, що  $\vee_*$  та  $\&_*$  невідмінні на множині  $\{TF, TF\uparrow\}$ .

Для опису підалгебр  $ATV_7$  виділено [8] всі 20 підмножин множини  $TV_7$ , які замкнені щодо  $\neg^*$ ,  $\vee^*$  та  $\&^*$ . Ці підмножини  $TV_{m_n}$  задають підалгебри  $ATV_{m_n}$  алгебри  $ATV_7$ . Далі  $ATV_{m_n}$  індукують підалгебри алгебри  $ATD_{V-A}$ , які в свою чергу індукують підалгебри алгебри  $GND$ -предикатів відповідного рівня: пропозиційної алгебри  $APG_{V-A}$ , реномінативної  $ARG_{V-A}$ , першого рядкової  $AQG_{V-A} = (PrG_{V-A}, \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x\})$ . Зауважимо, що існує 30 підмножин  $TV_7$ , які замкнені лише щодо  $\neg^*$ .

Зв'язок  $ATV_7$  та предикатних алгебр встановлюється так. Наявність істиннісного значення  $\tau$  в  $TV_7$  означає, що існують  $P \in PrG_{V-A}$  та  $d \in V_A$  такі:  $\tau \in P[d]$ .

Наведемо усі підмножини множини  $TV_7$ , замкнені щодо  $\neg^*$ ,  $\vee^*$  та  $\&^*$ , вказавши індуковані ними відповідні підалгебри  $ATV_{m_n}$  алгебр  $ATV_7$  та підалгебри  $AQG_{V-A}$ .

$$TV_{6_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQAU_{V-A}$ ;

$$TV_{6_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQTG_{V-A}$ ;

$$TV_{5_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow\}$$

індукує  $AQSG_{V-A}$ ;

$$TV_{5_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQTAU_{V-A}$ ;

$$TV_{5_3} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQImG_{V-A}$ ;

$$TV_{4_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$$

індукує  $AQTS_{V-A}$ ;

$$TV_{4_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQUA_{V-A}$ ;

$$TV_{4_3} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQTIImG_{V-A}$ ;

$$TV_{4_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQTIG_{V-A}$ ;

$$TV_{3_1} = \{T, F, \uparrow\}$$

індукує  $AQP_{V-A}$ ;

$$TV_{3_2} = \{T, F, TF\}$$

індукує  $AQT_{V-A}$ ;

$$TV_{3_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQU_{V-A}$ ;

$$TV_{3_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQTTIG_{V-A}$ ;

$$TV_{3_5} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow\}$$

індукує  $AQSTIG_{V-A}$ ;

$$TV_{2_1} = \{T, F\}$$

індукує  $AQTS_{V-A}$ ;

$$TV_{2_2} = \{T\uparrow, F\uparrow\}$$

індукує  $AQTSTIG_{V-A}$ ;

$$TV_{2_3} = \{TF, TF\uparrow\}$$

індукує  $AQTAmG_{V-A}$ ;

$$TV_{1_1} = \{\uparrow\}$$

індукує  $AQ\perp_{V-A}$ ;

$$TV_{1_2} = \{TF\}$$

індукує  $AQY_{V-A}$ ;

$$TV_{1_3} = \{TF\uparrow\}$$

індукує  $AQY\perp_{V-A}$ .

Необхідною умовою коректності (“природності”) логічних зв'язок предикатних алгебр можна вважати умову  $TFC$  ( $TF$ -сегмент). Для  $\vee$  та  $\neg$ -вона задається так (тут  $\alpha, \beta \in PrG_{V-A}$ ):

$$T(\alpha \vee \beta) = T(\alpha) \cup T(\beta), F(\alpha \vee \beta) = F(\alpha) \cap F(\beta);$$

$$T(\neg \alpha) = F(\alpha), F(\neg \alpha) = T(\alpha).$$

Виконання умови  $TFC$  має бути, зокрема, для константних предикатів  $T, F, \perp, T\uparrow, F\uparrow, Y, Y\uparrow$ , індукованих істиннісними значеннями  $\uparrow, T, F, TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow$ .

Умова  $TFC$  виконується для алгебр  $APG_{V-A}, ARG_{V-A}, AQG_{V-A}$ , тому вона має виконуватися для всіх її підалгебр, індукованих відповідними підалгебрами  $ATV_7$ .

### 3. Девіантні підмножини $TV_7$ та індуковані ними логіки $GND$ -предикатів

Задаючи ті чи інші умови для областей істинності, хибності та невизначеності, виділено низку різноманітних класів

*GND*-предикатів. Водночас не всі так описані класи замкнені щодо композиції диз'юнкції *GND*-предикатів. Це, зокрема, клас *R*-предикатів та класи *AnU*-предикатів, *TAnU*-предикатів, *RAU*-предикатів, *UAU*-предикатів, *nU=A*-предикатів, *TnU=A*-предикатів. Ці класи індуковано відповідними класами *TD7*-предикатів із такими множинами істиннісних значень:

- $TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$ ;
- $TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$ ;
- $TV_{RAU} = TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$ ;
- $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$ ;
- $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$ ;
- $TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$ ;
- $TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$ .

Ці множини замкнені щодо  $\neg_*$ , але незамкнені щодо  $\vee_*$ , тому вони не утворюють підалгебр *ATV*<sub>7</sub>. Для того, щоб клас *TD7*-предикатів з такою множиною істиннісних значень утворював алгебру, треба тим чи іншим способом *модифікувати*  $\vee_*$ . Відповідно модифікується похідна  $\&_*$ .

Множини істиннісних значень, незамкнені щодо  $\neg_*$  чи  $\vee_*$ , назвемо *девіантними*. Класи *TD7*-предикатів із девіантними множинами істиннісних значень та відповідні класи *GND*-предикатів теж назвемо *девіантними*. Девіантні класи *GND*-предикатів незамкнені щодо  $\neg$  чи  $\vee$ .

Ми не розглядатимемо можливість модифікації композиції  $\neg_*$ , така модифікація веде до цілком неklasичних логік, які вимагають окремого дослідження. З цієї ж причини розглядаємо такі модифікації  $\vee_*$ , які можуть мати відмінні від  $\vee_*$  значення тільки для аргументів  $\uparrow, TF, TF\uparrow$ .

Отримані при модифікації  $\vee_*$  *TV*-алгебри індукують алгебри *TD7*-предикатів, які далі індукують відповідні алгебри *GND*-предикатів на пропозиційному, реномінативному, першопорядковому рівнях. В цих алгебрах відповідним чином модифікується  $\vee$ , тому вони не будуть підалгебрами алгебр *APG*<sub>V-A</sub>, *ARG*<sub>V-A</sub>, *AQG*<sub>V-A</sub>. В

деяких випадках маємо *ізоморфізм* цих алгебр та певних підалгебр алгебр *APG*<sub>V-A</sub>, *ARG*<sub>V-A</sub>, *AQG*<sub>V-A</sub>, а тому маємо їх *вкладення* в *APG*<sub>V-A</sub>, *ARG*<sub>V-A</sub>, *AQG*<sub>V-A</sub>.

Нехай  $TV \subseteq TV_7$ . Так як  $\neg_*$  не модифікуємо, то розглядаємо лише такі *TV*, які *замкнені* щодо  $\neg_*$ . Нехай в обмеженні таблиці істинності  $\vee_*$  для *TV* маємо деяке істиннісне значення  $\vee \notin TV$ . Модифікація  $\vee_*$  полягає у заміні значень  $\vee$  в таблиці  $\vee_*$  для *TV* на деяке  $\tau \in TV$ . Зрозуміло, що існує дуже багато способів це зробити. В першу чергу розглядаємо такі модифікації, для яких виконується умова *TFC* коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні *TFC* *TV*-алгебра *не індукує* для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними пропозиційними композиціями. Таку *TV*-алгебру назвемо *девіантною*.

Для множин  $TV_{AnU}$ ,  $TV_{TAnU}$ ,  $TV_{D5}$ ,  $TV_R$ ,  $TV_{UAU}$ ,  $TV_{TnU=A}$  існують модифікації  $\vee_*$  та  $\vee$  із дотриманням умови *TFC*, тому й маємо такі класи *GND*-предикатів, як *AnU*, *TAnU*, *RAU*, *R*, *UAU*, *nU=A*, *TnU=A*.

Ще залишається розглянути множини істиннісних значень  $\{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$ , яка незамкнена щодо  $\vee_*$ :

$$TF \vee_* \uparrow = T\uparrow \text{ та } TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow.$$

Її підмножини  $\{TF, \uparrow\}$  та  $\{TF\uparrow, \uparrow\}$  теж незамкнені щодо  $\vee_*$ . Далі покажемо, що для цих множин не існує модифікацій  $\vee_*$ , які індукують виконання *TFC*. Тому не існує *TV*-алгебр з носіями  $\{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$ ,  $\{TF, \uparrow\}$  чи  $\{TF\uparrow, \uparrow\}$ , які індукують для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними  $\vee$  та  $\&$ . Інакше кажучи, усі такі *TV*-алгебри девіантні.

**Логіка *AnU*-предикатів.** Множина  $TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$ .

Природна модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{AnU}$  така:  $TF \vee_{AnU} F\uparrow = TF$ .

Тоді  $TV_{AnU}$  замкнена щодо визначених нижче  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$  (табл. 4, 5).

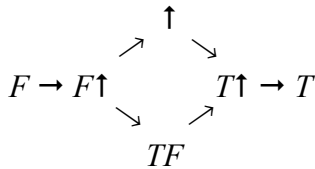
Таблиця 4. Композиція  $\vee_{AnU}$ 

$\vee_{AnU}$	$T$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$
$T\uparrow$	$T$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$
$F\uparrow$	$T$	$F\uparrow$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$
$\uparrow$	$T$	$\uparrow$	$T\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$T\uparrow$
$TF$	$T$	$TF$	$T\uparrow$	$TF$	$T\uparrow$	$TF$

 Таблиця 5. Композиція  $\&_{AnU}$ 

$\&_{AnU}$	$T$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$
$T$	$T$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$T\uparrow$	$T\uparrow$	$F$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF$
$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$F\uparrow$
$TF$	$TF$	$F$	$TF$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$TF$

Діаграма Хассе для  $TV_{AnU}$  щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$  така:



Отримуємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{AnU}$ , яка індукує алгебру  $AnU$ -предикатів  $AQAnU^{V-A}$ .

**Твердження 2.** Модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{AnU}$  – єдина для  $TV_{AnU}$ , яка гарантує  $TFC$ .

Маємо

$$\begin{aligned}
 T(TF \vee F\uparrow) &= T(TF) \cup T(F\uparrow) = {}^V A \cup \emptyset = {}^V A, \\
 F(TF \vee F\uparrow) &= F(TF) \cap F(F\uparrow) = {}^V A \cap {}^V A = {}^V A,
 \end{aligned}$$

Отже, згідно  $TFC$  для  $TF \vee_{AnU} F\uparrow$  можливі лише  $TF$  чи  $TF\uparrow$ .

Проте  $TF\uparrow \notin TV_{AnU}$ , тому  $TF$  – єдина можливість:

$$T(TF \vee F\uparrow) = T(TF), \quad F(TF \vee F\uparrow) = F(TF).$$

Таблицю істинності  $\vee_{AnU}$  для  $ATV_{AnU}$  можна отримати із таблиці істинності  $\vee_*$  для  $ATV_{6\_1}$  заміною  $TF\uparrow$  на  $TF$ . Звідси

**Твердження 3.**  $ATV_{AnU} \sim_{iz} ATV_{6\_1}$ .

**Наслідок 1.**  $AQAnU_{V-A} \sim_{iz} AQAU_{V-A}$ .

**Логіка  $TAnU$ -предикатів.** Множина  $TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$ .

Маємо  $TV_{TAnU} \subseteq TV_{AnU}$ . Множина  $TV_{TAnU}$  замкнена щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$ .

Діаграма Хассе для  $TV_{TAnU}$  щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$  така:

$$F \rightarrow F\uparrow \rightarrow TF \rightarrow T\uparrow \rightarrow T.$$

Маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{AnU}$ , яка індукує алгебру  $TAnU$ -предикатів  $AQTAnU^{V-A}$ .

Модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{AnU}$  – єдина для  $TV_{AnU}$ , яка гарантує умови  $TFC$ , тому така модифікація теж єдина, яка гарантує умови  $TFC$ , для її підмножини  $TV_{TAnU} \subseteq TV_{AnU}$ .

Таблицю істинності  $\vee_{AnU}$  для  $ATV_{TAnU}$  можна отримати із таблиці істинності  $\vee_*$  для  $ATV_{5\_1}$  заміною  $\uparrow$  на  $TF$  та із таблиці істинності  $\vee_*$  для  $ATV_{5\_2}$  заміною  $TF\uparrow$  на  $TF$ . Звідси

**Твердження 4.**

$$ATV_{TAnU} \sim_{iz} ATV_{5\_1} \sim_{iz} ATV_{5\_2}.$$

**Наслідок 2.**

$$AQTAnU_{V-A} \sim_{iz} AQSG_{V-A} \sim_{iz} AQTAU_{V-A}.$$

**Логіка  $RAU$ -предикатів.** Множина  $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$ ;  $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$ . Тому  $TV_{D5}$  не утворює підалгебри алгебри  $ATV_7$ .

Розглянемо допустимі варіанти модифікації  $\vee_*$  у випадку  $TV_{D5}$ . Потрібно модифікувати значення  $TF \vee_* \uparrow$  та  $TF\uparrow \vee_* \uparrow$  так, щоб отримати елемент  $\tau \in TV_{D5}$ .

Маємо

$$\begin{aligned}
 T(TF \vee \uparrow) &= T(TF) \cup T(\uparrow) = T(TF) = {}^V A \quad \text{та} \\
 T(TF\uparrow \vee \uparrow) &= T(TF\uparrow) \cup T(\uparrow) = T(TF\uparrow) = {}^V A;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F(TF \vee \uparrow) &= F(TF) \cap F(\uparrow) = F(TF) \cap \emptyset = \emptyset \quad \text{та} \\
 F(TF\uparrow \vee \uparrow) &= F(TF\uparrow) \cap F(\uparrow) = \emptyset.
 \end{aligned}$$

Отже, за умови  $TFC$  таким  $\tau$  може бути лише  $T$ . Отримуємо

**Твердження 5.** Єдиною модифікацією  $\vee_*$  для  $TV_{D5}$  за умови  $TFC$  є така  $\vee_{RAU}$ :

$$TF \vee_{RAU} \uparrow = T \text{ та } TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T.$$

Маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{RAU}$ , задамо її логічні зв'язки  $\vee_{RAU}$  та  $\&_{RAU}$  (табл. 6, 7).

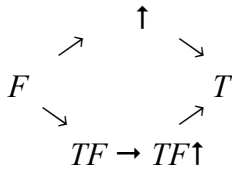
Таблиця 6. Композиція  $\vee_{RAU}$

$\vee_{RAU}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	$T$	$\uparrow$	$\uparrow$	$T$	$T$
$TF$	$T$	$TF$	$T$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

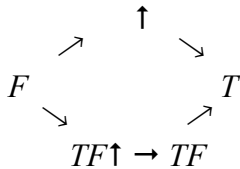
Таблиця 7. Композиція  $\&_{RAU}$

$\&_{RAU}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$F$	$F$
$TF$	$TF$	$F$	$F$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F$	$F$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Діаграма Хассе щодо  $\vee_{RAU}$  така:



Діаграма Хассе щодо  $\&_{RAU}$  така:



**Твердження 6.**  $ATV_{RAU}$  неізоморфна алгебрам  $ATV_{5_1}$ ,  $ATV_{5_2}$ ,  $ATV_{5_3}$ ,  $ATV_{AnU}$ .

**Наслідок 3.** Алгебра  $AQRAU_{V-A}$  неізоморфна алгебрам  $AQSG_{V-A}$ ,  $AQTAU_{V-A}$ ,  $AQImG_{V-A}$ ,  $AQAnU_{V-A}$ .

**Логіка  $R$ -предикатів.** Особливе місце посідає множина істиннісних значень  $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$ , безпосередньо пов'язана з логікою  $R$ -предикатів.

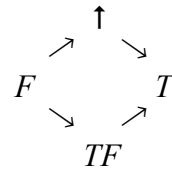
Множина  $TV_R$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$ . Отже,  $TV_R$  не утворює підалгебри алгебри  $ATV_7$ .

Таким чином, алгебра  $R$ -предикатів  $AQR_{V-A}$  не є підалгеброю алгебри  $AQG_{V-A}$ .

Маємо  $TV_R \subseteq TV_{RAU}$ . Множина  $TV_R$  замкнена щодо композицій  $\vee_{RAU}$  та  $\&_{RAU}$ .

Алгебра  $ATV_R$  – це фактично алгебра  $ATV_B$  істиннісних значень відомої [10] 4-значної логіки Белнапа. Композиції  $\vee_B$  та  $\&_B$  логіки Белнапа – це звуження композицій  $\vee_{RAU}$  та  $\&_{RAU}$  на множину  $TV_R$ . Це гарантує виконання умови  $TFC$ .

Діаграма Хассе для множини  $TV_R$  щодо композицій  $\vee_B$  та  $\&_B$  така:



**Твердження 7.**

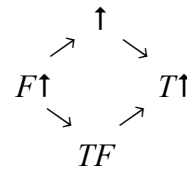
$$ATV_{4_4} \sim_{iz} ATV_B \sim_{iz} ATV_R.$$

Алгебра  $AQR_{V-A}$  є вкладенням в алгебра  $AQImG_{V-A}$  та  $AQAU_{V-A}$ , тому й в  $AQG_{V-A}$ . Алгебра  $AQR_{V-A}$  не індукується підалгебрами алгебри  $ATV_7$ . В  $AQR_{V-A}$  композиція  $\vee$  узгоджена із композицією  $\vee_B$ .

**Наслідок 4.**  $AQR_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A}$ .

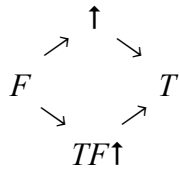
**Логіка  $nU=A$ -предикатів.** Множина  $TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\} \subseteq TV_{AnU}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$ . Така  $TV_{nU=A}$  замкнена щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$ .  $TV$ -алгебра  $ATV_{nU=A}$  індукує алгебру  $nU=A$ -предикатів  $AQnU_{V-A}$ .

Діаграма Хассе для  $TV_{nU=A}$  щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$  така:



**Логіка  $UAU$ -предикатів.** Множина  $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $\uparrow \vee_* TF\uparrow = T\uparrow$ . Маємо  $TV_{UAU} \subseteq TV_{RAU}$ , така  $TV_{UAU}$  замкнена щодо  $\vee_{RAU}$  та  $\&_{RAU}$ .  $TV$ -алгебра  $ATV_{UAU}$  індукує алгебру  $UAU$ -предикатів  $AQUAU_{V-A}$ .

Діаграма Хассе для  $TV_{UAU}$  щодо  $\vee_{RAU}$  та  $\&_{RAU}$  така:



Порівнюючи таблиці істинності  $\vee_{RAU}$  для  $ATV_{UAU}$ ,  $\vee_{AnU}$  для  $ATV_{nU=A}$ ,  $\vee_{RAU}$  для  $ATV_R$  та  $\vee_*$  для  $ATV_{4\_4}$ , отримуємо:

**Твердження 8.**  $ATV_{UAU} \sim_{iz} ATV_{nU=A} \sim_{iz} ATV_R \sim_{iz} ATV_{4\_4}$ .

**Наслідок 5.**  $AQUAU_{V-A} \sim_{iz} AQnU_{=A_{V-A}} \sim_{iz} AQR_{V-A} \sim_{iz} AQTIG_{V-A}$ .

**Логіка  $TnU=A$ -предикатів.** Множина  $TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$ . Водночас  $TV_{TnU=A}$  замкнена щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$ .  $TV$ -алгебра  $ATV_{TnU=A}$  індукує алгебру  $TnU=A$ -предикатів  $AQTnU=A_{V-A}$ .

Діаграма Хассе для  $TV_{TnU=A}$  щодо  $\vee_{AnU}$  та  $\&_{AnU}$  така:



Порівнюючи таблицю істинності  $\vee_{AnU}$  для  $ATV_{TnU=A}$  із таблицями істинності  $\vee_*$  для  $ATV_{3\_1}$ ,  $ATV_{3\_2}$ ,  $ATV_{3\_3}$ ,  $ATV_{3\_4}$ ,  $ATV_{3\_5}$ , отримуємо:

**Твердження 9.**  $ATV_{TnU=A} \sim_{iz} ATV_{3\_1} \sim_{iz} ATV_{3\_2} \sim_{iz} ATV_{3\_3} \sim_{iz} ATV_{3\_4} \sim_{iz} ATV_{3\_5}$ .

**Наслідок 6.**  $AQTnU=A_{V-A} \sim_{iz} AQP_{V-A} \sim_{iz} AQT_{V-A} \sim_{iz} AQTU_{=A_{V-A}} \sim_{iz} AQTIG_{V-A} \sim_{iz} AQRSTIG_{V-A}$ .

#### 4. Логіки, індуковані $TV_{D5}$

Єдиним допустимим варіантом модифікації  $\vee_*$  за умови  $TFC$  у випадку  $TV_{D5}$  є такий:  $TF \vee_{RAU} \uparrow = T$  та  $TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T$ . Він веде до логіки  $RAU$ -предикатів.

Інші варіанти модифікації  $\vee_*$  для  $TV_{D5}$  шляхом корекції виділених значень  $T\uparrow$  в таблиці  $\vee_*$  ведуть до істотно девіантних логік, для яких не виконується  $TFC$ .

Через порушення умови  $TFC$   $TV$ -ал-

гебри девіантні, вони не індукують для  $GND$ -предикатів композиційні алгебри із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

Розглянемо для  $TV_{D5}$  варіант модифікації  $\vee_*$ , який веде до специфічної логіки  $EU$ -предикатів, істотно відмінної від логіки  $GND$ -предикатів.

**5-значна логіка  $EU$ .** Оригінальна 5-значна логіка  $EU$  описана в [11]. Множиною істиннісних значень такої логіки є  $TV_{EU} = \{T, F, u, e, eu\}$ ; при цьому  $u$  (невизначеність) трактується як  $\uparrow$  у нас, проте трактування  $e$  (помилка) та  $eu$  дещо відмінне від їх трактування як  $TF$  та  $TF\uparrow$  в алгебрі  $ATV_7$ . Проте для уніфікації позначень множиною істиннісних значень логіки  $EU$  вважаємо  $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$ .

Логічна зв'язка  $\neg_{eu}$  логіки  $EU$  ідентична логічній зв'язці  $\neg_*$ .

Логічні зв'язки  $\vee_{eu}$  та  $\&_{eu}$  логіки  $EU$  задаються так (табл. 8, 9).

Таблиця 8. Композиція  $\vee_{eu}$

$\vee_{eu}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	$T$	$\uparrow$	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
$TF$	$T$	$TF$	$TF\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 9. Композиція  $\&_{eu}$

$\&_{eu}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
$TF$	$TF$	$F$	$TF\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Отже,  $\vee_{eu}$  отримано такою модифікацією  $\vee_*$ :

$$TF \vee_{eu} \uparrow = TF\uparrow \text{ та } TF\uparrow \vee_{eu} \uparrow = TF\uparrow.$$

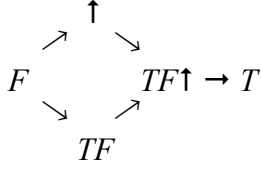


Для  $EU$  умова  $TFC$  не виконується:

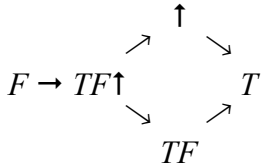
$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset$$

та  $F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset$ ,  
водночас  $F(TF\uparrow) \neq \emptyset$ .

Діаграма Хассе для  $TV_{D5}$  щодо  $\vee_{eu}$ :



Діаграма Хассе для  $TV_{D5}$  щодо  $\&_{eu}$ :



Маємо  $TV$ -алгебру  $AEU$ . Через порушення  $TFC$  алгебра  $AEU$  девіантна, вона не індукує для  $GND$ -предикатів композиційну алгебру із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

Алгебра  $AEU$  неізоморфна алгебрам  $ATV_{5\_1}$ ,  $ATV_{5\_2}$ ,  $ATV_{5\_3}$ ,  $ATV_{AnU}$ ,  $ATV_{RAU}$ .

Опишемо ще 3 варіанти модифікації  $\vee_*$  для  $TV_{D5}$ . Всі інші варіанти такої модифікації видаються зовсім неприродними.

**Варіант\_1.** Модифікуємо  $\vee_*$  як  $\vee_{\#}$  так:  $TF\vee_{\#}\uparrow = TF$  та  $TF\uparrow\vee_{\#}\uparrow = TF\uparrow$ .

Єдина відмінність  $\vee_{\#}$  від  $\vee_{eu}$  у тому, що  $TF\vee_{eu}\uparrow = TF\uparrow$ .

Умова  $TFC$  не виконується:

$$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset,$$

водночас  $F(TF) \neq \emptyset$ .

Діаграма Хассе для  $TV_{D5}$  щодо  $\vee_{\#}$ :

$$F \rightarrow \uparrow \rightarrow TF \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T$$

Діаграма Хассе для  $TV_{D5}$  щодо  $\&_{\#}$ :

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow TF \rightarrow \uparrow \rightarrow T$$

Маємо  $TV$ -алгебру, яку через подібність до  $AEU$  назвемо  $AEU_{\#}$ .

$AEU_{\#}$  неізоморфна алгебрам  $ATV_{5\_1}$ ,  $ATV_{5\_2}$ ,  $ATV_{5\_3}$ ,  $ATV_{RAU}$ ,  $ATV_{TAnU}$ ,  $AEU$ .

Через порушення  $TFC$  девіантна алгебра  $AEU_{\#}$  не індукує композиційну алгебру  $GND$ -предикатів із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

**Варіант\_2.** Модифікуємо  $\vee_*$  як  $\vee_{\#D}$  так:  $TF\vee_{\#D}\uparrow = TF$  та  $TF\uparrow\vee_{\#D}\uparrow = TF\uparrow$ .

Отримуємо логічні зв'язки  $\vee_{\#D}$  та  $\&_{\#D}$ , що задаються так (табл. 10, 11).

Таблиця 10. Композиція  $\vee_{\#D}$

$\vee_{\#D}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	$T$	$\uparrow$	$\uparrow$	$TF$	$TF$
$TF$	$T$	$TF$	$TF$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 11. Композиція  $\&_{\#D}$

$\&_{\#D}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF$
$TF$	$TF$	$F$	$TF$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F$	$TF$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Умова  $TFC$  не виконується:

$$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset,$$

водночас  $F(TF) \neq \emptyset$ .

$\vee_{\#D}$  і  $\&_{\#D}$  неасоціативні. Покажемо для  $\vee_{\#D}$ :  $\uparrow\vee_{\#D}(TF\uparrow\vee_{\#D}TF) = \uparrow\vee_{\#D}TF\uparrow = TF$ ;  
 $(\uparrow\vee_{\#D}TF)\vee_{\#D}TF\uparrow = TF\vee_{\#D}TF\uparrow = TF\uparrow$ .

$\vee_{\#D}$  і  $\&_{\#D}$  не задають впорядкування  $TV_{D5}$  через порушення транзитивності. Показуємо це для  $\vee_{\#D}$ .  $\alpha \rightarrow \beta$  означає  $\alpha\vee_{\#D}\beta = \beta$ , тому  $\uparrow \rightarrow TF$  та  $TF \rightarrow TF\uparrow$ . За транзитивністю має бути  $\uparrow \rightarrow TF\uparrow$ , тобто  $\uparrow\vee_{\#D}TF\uparrow = TF\uparrow$ . Проте  $\uparrow\vee_{\#D}TF\uparrow = TF$ .

Отже, отримана  $TV$ -алгебра  $AEU_{\#D}$  цілком девіантна.

**Варіант\_3.** Маємо  $TV_R \subseteq TV_{D5}$ , тому розглянемо модифікацію  $\vee_{\#T}$  композиції  $\vee_*$ , яка є розширенням  $\vee_B$  на  $TV_{D5}$ .

Модифікуємо  $\vee_*$  як  $\vee_{\#T}$  так:

$$TF\vee_{\#T}\uparrow = T \text{ та } TF\uparrow\vee_{\#T}\uparrow = TF\uparrow.$$

Така  $\vee_{\#T}$  відмінна від  $\vee_{RAU}$  лише у тому, що  $TF\uparrow\vee_{RAU}\uparrow = T$ .

Отримуємо логічні зв'язки  $\vee_{\#T}$  та  $\&_{\#T}$ , що задаються так (табл. 12, 13).

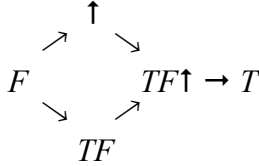
Таблиця 12. Композиція  $\vee_{\#T}$

$\vee_{\#T}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	$T$	$\uparrow$	$\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$
$TF$	$T$	$TF$	$T$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

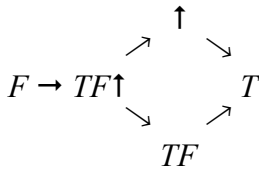
Таблиця 13. Композиція  $\&_{\#T}$

$\&_{\#T}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF$	$TF\uparrow$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$F$	$TF\uparrow$
$TF$	$TF$	$F$	$F$	$TF$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

Діаграма Хассе для  $TV_{D5}$  щодо  $\vee_{\#T}$ :



Діаграма Хассе для  $TV_{D5}$  щодо  $\&_{\#T}$ :



$TFC$  не виконується:  $F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset \neq F(TF\uparrow)$ .

$\vee_{\#T}$  і  $\&_{\#T}$  неасоціативні. Покажемо для  $\vee_{\#T}$ :  $\uparrow\vee_{\#T}(TF\uparrow\vee_{\#T}TF) = \uparrow\vee_{\#T}TF\uparrow = TF\uparrow$ ;  $(\uparrow\vee_{\#T}TF)\vee_{\#T}TF\uparrow = T\vee_{\#T}TF\uparrow = T$ .

Отримали цілком девіантну  $TV$ -алгебру, яку назовемо  $AEU_T$ .

$AEU_T$  неізоморфна алгебрам  $ATV_{5_1}$ ,  $ATV_{5_2}$ ,  $ATV_{5_3}$ ,  $ATV_{RAU}$ ,  $ATV_{TAnU}$ ,  $AEU$ ,  $AEU_{\#}$ .

**$TV$ -алгебри, індуковані підмножинами  $TV_{D5}$ .** Маємо три 4-елементних підмножини  $TV_{D5}$ , які замкнені щодо  $\neg_*$ .

Це  $TV_{4_2}$ ,  $TV_R$  та  $TV_{UAU}$ .

Множина  $TV_{4_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$  генерує  $TV$ -алгебру  $ATV_{4_2}$ , яка індукує алгебри  $TUA$ -предикатів.

Множина  $TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF\vee_*\uparrow = T\uparrow$ .

Модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{RAU}$  дає  $TV$ -алгебру  $ATV_R$ , яка індукує алгебри  $R$ -предикатів.

Множина  $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $\uparrow\vee_*TF\uparrow = T\uparrow$ .

Модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{RAU}$  дає  $TV$ -алгебру  $ATV_{UAU}$ , яка індукує алгебри  $UAU$ -предикатів.

Модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{eu}$  дає  $TV$ -алгебру  $AEU_{4_1}$ .

Зауважимо, що на множині  $TV_{UAU}$  із  $\vee_{eu}$  та  $\&_{eu}$  збігаються  $\vee_{\#}$  та  $\&_{\#}$ ,  $\vee_{\#T}$  та  $\&_{\#T}$ .

Діаграма Хассе для  $EU_{4_1}$  щодо  $\vee_{eu}$ :

$$F \rightarrow \uparrow \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T.$$

Діаграма Хассе для  $EU_{4_1}$  щодо  $\&_{eu}$ :

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow T.$$

Маємо  $TV$ -алгебру  $AEU_{4_1}$ .

Для  $AEU_{4_1}$   $TFC$  не виконується:

$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset,$$

водночас  $F(TF\uparrow) \neq \emptyset$ . Тому девіантна  $AEU_{4_1}$  не індукує композиційну алгебру  $GND$ -предикатів із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

$AEU_{4_1}$  – це алгебра  $ATV_{4_2}$ , в якій  $TF \Rightarrow \uparrow$ . Тому  $AEU_{4_1} \sim_{iz} ATV_{4_2}$ . Водночас  $AEU_{4_1}$  неізоморфна алгебрам  $ATV_{4_1}$ ,  $ATV_{4_3}$ ,  $ATV_{4_4}$ ,  $ATV_{nU=A}$ ,  $ATV_R$ ,  $ATV_{UAU}$ .

Розглянемо ще одну модифікацію  $\vee_*$  на  $TV_{UAU}$  – це  $\vee_{42}$  така:  $TF\uparrow\vee_{42}\uparrow = \uparrow$ .

Така  $\vee_{42}$  та похідна  $\&_{42}$  видаються неприродними (табл. 14, 15).

Таблиця 14. Композиція  $\vee_{42}$

$\vee_{42}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	$T$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$TF\uparrow$	$T$	$TF\uparrow$	$\uparrow$	$TF\uparrow$

Таблиця 15. Композиція  $\&_{42}$

$\&_{42}$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF\uparrow$
$T$	$T$	$F$	$\uparrow$	$TF\uparrow$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$
$\uparrow$	$\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F$	$\uparrow$	$TF\uparrow$

Модифікація  $\vee_*$  як  $\vee_{42}$  дає  $TV$ -алгебру  $AEU_{4_2}$ .

Для  $AEU_{4_2}$   $TFC$  не виконується:

$$T(TF\uparrow\vee\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup\emptyset = T(TF\uparrow) \neq \emptyset, \text{ водночас } T(\uparrow) = \emptyset.$$

Діаграма Хассе щодо  $\vee_{42}$  така:

$$F \rightarrow TF\uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow T.$$

Діаграма Хассе щодо  $\&_{42}$  така:

$$F \rightarrow \uparrow \rightarrow TF\uparrow \rightarrow T.$$

$AEU_{4_2}$  – це  $ATV_{4_2}$ , в якій  $TF\uparrow \Rightarrow \uparrow$  та  $TF \Rightarrow TF\uparrow$ . Тому  $AEU_{4_2} \sim_{iz} ATV_{4_2}$ .

Отже,  $AEU_{4_1} \sim_{iz} AEU_{4_2} \sim_{iz} ATV_{4_2}$ .

Через порушення  $TFC$  девіантна  $AEU_{4_2}$  не індукує композиційну алгебру  $GND$ -предикатів із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

Маємо чотири **3-елементних** підмножини  $TV_{D5}$ , які замкнені щодо  $\neg_*$ . Три з них замкнені щодо  $\vee_*$ .

Множина  $TV_{3_1} = \{T, F, \uparrow\}$  генерує  $TV$ -алгебру  $ATV_{3_1}$ , яка індукує алгебри  $P$ -предикатів.

Множина  $TV_{3_2} = \{T, F, TF\}$  генерує  $TV$ -алгебру  $ATV_{3_2}$ , яка індукує алгебри  $T$ -предикатів.

Множина  $TV_{3_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$  генерує  $TV$ -алгебру  $ATV_{3_3}$ , яка індукує алгебри  $TU=A$ -предикатів.

Множина  $TV_{3_D} = \{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$  не замкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF\vee_*\uparrow = TF\uparrow\vee_*\uparrow = T\uparrow$ .

Склад  $TV_{3_D}$  засвідчує **невідмінність** істини й фальші, що злилися воедино!

Коректні модифікації  $\vee_*$  на  $TV_{3_D}$ , для яких виконується  $TFC$ , **неможливі**.

Справді маємо:

$$T(TF\vee\uparrow) = T(TF)\cup T(\uparrow) = \emptyset;$$

$$T(TF\uparrow\vee\uparrow) = T(TF\uparrow)\cup T(\uparrow) = \emptyset;$$

$$F(TF\vee\uparrow) = F(TF)\cap F(\uparrow) = F(TF)\cap\emptyset = \emptyset;$$

$$F(TF\uparrow\vee\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap F(\uparrow) = F(TF\uparrow)\cap\emptyset = \emptyset.$$

Отже, **єдиною** модифікацією  $\vee_{md}$  композиції  $\vee_*$  за умови  $TFC$  є така:

$$TF\vee_{md}\uparrow = T \text{ та } TF\uparrow\vee_{md}\uparrow = T.$$

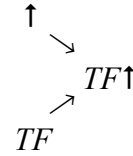
Проте  $T \notin \{\uparrow, TF, TF\uparrow\}$ .

Відносно “природними” модифікаціями  $\vee_*$  для  $TV_{3_D} \in \vee_{eu}$  та  $\vee_{\#}$ , до певної міри  $\vee_{\#D}$ .

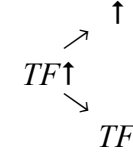
У випадку  $\vee_{eu}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{3_{eu}}$ , вона є підалгеброю  $AEU$ .

$\vee_{eu}$  та  $\&_{eu}$  на  $TV_{3_D}$  збігаються.

Діаграма Хассе для  $TV_{3_D}$  щодо  $\vee_{eu}$ :



Діаграма Хассе для  $TV_{3_D}$  щодо  $\&_{eu}$ :



У випадку  $\vee_{\#}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{3_{\#}}$ , вона є підалгеброю  $AEU_{\#}$ .

$\vee_{\#}$  та  $\&_{\#}$  на  $TV_{3_D}$  збігаються.

Діаграма Хассе для  $TV_{3_D}$  щодо  $\vee_{\#}$ :

$$\uparrow \rightarrow TF \rightarrow TF\uparrow.$$

Діаграма Хассе для  $TV_{3_D}$  щодо  $\&_{\#}$ :

$$TF\uparrow \rightarrow TF \rightarrow \uparrow.$$

У випадку  $\vee_{\#D}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{3_{\#D}}$ , вона є підалгеброю  $AEU_{\#D}$ .

$\vee_{\#D}$  та  $\&_{\#D}$  на  $TV_{3_D}$  збігаються.

$\vee_{\#D}$  та  $\&_{\#D}$  на  $TV_{3_D}$  неасоціативні, тому  $TV$ -алгебра  $ATV_{3_{\#D}}$  **цілком девіантна**.

Алгебри  $ATV_{3_{eu}}$ ,  $ATV_{3_{\#}}$ ,  $ATV_{3_{\#D}}$  попарно неізоморфні, вони також неізоморфні жодній з 3-елементних алгебр  $ATV_{3_1}$ ,  $ATV_{3_2}$ ,  $ATV_{3_3}$ ,  $ATV_{3_4}$ ,  $ATV_{3_5}$ ,  $ATV_{TnU=A}$ .

Через порушення умови  $TFC$  девіантні алгебри  $ATV_{3_{eu}}$ ,  $ATV_{3_{\#}}$ ,  $ATV_{3_{\#D}}$  не індукують композиційні алгебри  $GND$ -предикатів із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

Маємо чотири **2-елементних** підмножини  $TV_{D5}$ , які замкнені щодо  $\neg_*$ .

Множина  $TV_{2_1} = \{T, F\}$  генерує класичну булеву  $TV$ -алгебру  $ATV_{2_1}$ , яка індукує алгебри  $TS$ -предикатів.

Множина  $TV_{2_3} = \{TF, TF\uparrow\}$  генерує  $TV$ -алгебру  $ATV_{2_3}$ , яка індукує алгебри  $TAmG$ -предикатів. Клас  $TAmG$ -предикатів вироджений [8].

Множина  $TV_{2_D} = \{\uparrow, TF\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$ . Коректні модифікації  $\vee_*$  із  $TFC$ , *неможливі*, адже *єдиною* модифікацією  $\vee_{md}$  композиції  $\vee_*$  за умови  $TFC$  є така:  $TF \vee_{md} \uparrow = T$  та  $TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T$ .

Водночас  $T \notin \{\uparrow, TF\}$ .

Природні модифікації  $\vee_*$  на  $TV_{2_D}$  – це  $\vee_{\#}$  і дуальна їй на  $TV_{2_D}$  композиція  $\vee_{\#d}$ :  
 $\uparrow \vee_{\#d} \uparrow = TF \vee_{\#d} \uparrow = \uparrow \vee_{\#d} TF = TF$ ,  
 $TF\uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$ .

У випадку  $\vee_{\#}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{2_{D\#}}$ , вона ізоморфна алгебрі  $ATV_{2_3}$  (при перейменуванні  $\uparrow$  на  $TF$  та  $TF$  на  $TF\uparrow$ ).

У випадку  $\vee_{\#d}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{2_{Dd}}$ , вона ізоморфна  $ATV_{2_3}$  (при перейменуванні  $\uparrow$  на  $TF\uparrow$ ).

Множина  $TV_{2_U} = \{\uparrow, TF\uparrow\}$  незамкнена щодо  $\vee_*$ :  $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$ . Коректні модифікації  $\vee_*$ , для яких виконується  $TFC$ , *неможливі*, адже *єдиною* модифікацією  $\vee_{md}$  композиції  $\vee_*$  за умови  $TFC$  є така:

$$TF \vee_{md} \uparrow = T \text{ та } TF\uparrow \vee_{md} \uparrow = T.$$

Проте  $T \notin \{\uparrow, TF\uparrow\}$ .

Природні модифікації  $\vee_*$  на  $TV_{2_U}$  – це  $\vee_{\#}$  і дуальна їй на  $TV_{2_U}$  композиція  $\vee_{\#du}$ :  
 $\uparrow \vee_{\#du} \uparrow = TF\uparrow \vee_{\#du} \uparrow = \uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$ ,  
 $TF\uparrow \vee_{\#du} TF\uparrow = TF\uparrow$ .

У випадку  $\vee_{\#}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{2_{U\#}}$ , вона ізоморфна  $ATV_{2_3}$  (при перейменуванні  $\uparrow$  на  $TF$ ).

У випадку  $\vee_{\#du}$  маємо  $TV$ -алгебру  $ATV_{2_{Ud}}$ , вона ізоморфна алгебрі  $ATV_{2_3}$  (при перейменуванні  $\uparrow$  на  $TF\uparrow$  та  $TF\uparrow$  на  $\uparrow$ ).

Через порушення  $TFC$  девіантні алгебри  $ATV_{2_{D\#}}$ ,  $ATV_{2_{Dd}}$ ,  $ATV_{2_{U\#}}$ ,  $ATV_{2_{Ud}}$  не індукують композиційні алгебри  $GND$ -предикатів із коректними  $\vee$  та  $\&$ .

## Висновки

Вивчаються програмно-орієнтовані логічні формалізми – логіки загальних недетермінованих ( $GND$ ) предикатів.  $GND$ -предикати моделюються як 7-значні  $TD7$ -предикати. Множина  $TV_7$  їх істиннісних значень задає алгебру істиннісних значень ( $TV$ -алгебру)  $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$ . Багато підмножин  $TV_7$  незамкнені щодо  $\neg_*$  чи  $\vee_*$ , тому не утворюють підалгебр  $ATV_7$ . Такі підмножини та відповідні класи  $GND$ -предикатів названо девіантними. Девіантні  $TV$ -алгебри та девіантні класи  $GND$ -предикатів досліджено в даній роботі. Для того, щоб девіантна  $TV \subseteq TV_7$  утворила алгебру, необхідно модифікувати  $\neg_*$  чи  $\vee_*$ . В роботі не розглядається модифікація  $\neg_*$ , яка веде до специфічних некласичних логік. Найважливішими є такі модифікації  $\vee_*$ , для яких виконується умова  $TFC$  коректності логічних зв'язок предикатних алгебр. При порушенні умова  $TFC$   $TV$ -алгебра стає девіантною, вона не індукує алгебру  $GND$ -предикатів. Для всіх підмножин  $TV_7$  досліджено можливість модифікації  $\vee_*$  із умовою  $TFC$ , що визначає відповідні класи  $GND$ -предикатів. Описано природні модифікації  $\vee_*$  без умови  $TFC$ , що дає низку девіантних  $TV$ -алгебр. Для трьох девіантних множин не існує модифікацій  $\vee_*$  із  $TFC$ , для них вказано відносно природні девіантні  $TV$ -алгебри.

## Література

1. Handbook of Logic in Computer Science. Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. Oxford University Press, Vol. 1–5. 1993 – 2000.
2. Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenther (eds.), 2nd ed. 2011. Springer Netherlands. Vol. 16. P. 227–304.
3. Hähnle R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. *Logic Journal of the IGPL*, 2005. **13**. P. 415–433.
4. Jones C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. Elsevier,

- Electronic Notes in Theoretical Computer Science. 2006. Vol. 145. P. 3–25.
5. Нікітченко М.С., Шкільняк С.С. Прикладна логіка. К.: ВПЦ Київський університет, 2013. 278 с.
  6. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Чисті першого порядку логіки квазіарних предикатів. *Проблеми програмування*. 2016. № 2–3. С. 73–86.
  7. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates. *Algebra and Discrete Mathematics*. 2017. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
  8. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Алгебри загальних недетермінованих предикатів. *Проблеми програмування*. 2018. № 1. С. 5–21.
  9. Нікітченко М.С., Шкільняк О.С., Шкільняк С.С. Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти. *Проблеми програмування*. 2018. № 2–3. С. 31–45.
  10. Belnap N., Steel T. *The Logic of Questions and Answers*. New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
  11. Нікітченко М.С., Шишацька О.В. Семантичні властивості п'ятизначних логік. *Проблеми програмування*. 2018. № 1. С. 22–35.
  7. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2017). Algebras and logics of partial quasiary predicates. In *Algebra and Discrete Mathematics*. Vol. 23. N 2. P. 263–278.
  8. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. In *Problems in Programming*. N1. P. 5–21 (in ukr).
  9. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2018). Logics of general non-deterministic predicates: semantic aspects. In *Problems in Programming*. N2–3. P. 31–45 (in ukr).
  10. Belnap N. and Steel T. (1976). *The Logic of Questions and Answers*. New Haven and London: Yale Univ. Press.
  11. Nikitchenko M., and Shyshatska E. (2018). Algebras of general non-deterministic predicates. In *Problems in Programming*. N1. P. 22–35 (in ukr).

Одержано 08.02.2019

### References

1. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T. (editors). (1993–2000). *Handbook of Logic in Computer Science* Oxford University Press, Vol. 1–5.
2. Avron A. and Zamansky A. (2011). Non-deterministic semantics for logical systems. In *Handbook of Philosophical Logic*, D.M. Gabbay, F. Guenther (eds.), 2nd ed., vol. 16, Springer Netherlands. P. 227–304.
3. Hähnle R. (2005). Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. In *Logic Journal of the IGPL*, **13**. P. 415–433
4. Jones C. (2006). Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In *Proceedings of AVoCS'05*. V. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. P. 3–25.
5. Nikitchenko M. and Shkilniak S. (2013). *Applied logic*. Kyiv: VPC Kyivskiy Universytet (in ukr).
6. Nikitchenko M., Shkilniak O. and Shkilniak S. (2016). Pure first-order logics of quasiary predicates. In *Problems in Programming*. N2–3. P. 73–86 (in ukr).

### Про авторів:

*Шкільняк Оксана Степанівна*,  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент, доцент кафедри  
інформаційних систем.  
Кількість наукових публікацій в  
українських виданнях – понад 90,  
у тому числі у фахових виданнях – 35.  
Кількість наукових публікацій в  
зарубіжних виданнях – 12.  
Scopus Author ID: 57190873266  
h-індекс (Google Scholar): 5 (4 з 2014)  
<http://orcid.org/0000-0003-4139-2525>.

### Місце роботи автора:

Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка,  
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.  
Тел.: (044) 259 05 19.  
E-mail: [me.oksana@gmail.com](mailto:me.oksana@gmail.com)