УДК 004.42:510.69

*С.С. Шкільняк*

# СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ПЕРШОПОРЯДКОВИХ ЛОГІК ОДНОЗНАЧНИХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

На основі властивостей відношень логічного наслідку для першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних квазіарних предикатів кванторного рівня побудовано числення секвенційного типу. Такі числення пропонуються для логік еквітонних предикатів та для загального випадку логік однозначних квазіарних предикатів. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

## Вступ

Композиційно-номінативні логіки (КНЛ) – це програмно-орієнтовані логічні формалізми, будовані на основі композиційно-номінативного підходу [1]. Дослідження фундаментального поняття логічного слідування для таких логік проведене в роботах [2–4]. Для першопорядкових КНЛ квазіарних предикатів кванторного рівня було запропоновано різні формалізації цього поняття за допомогою відношень логічного наслідку, досліджено властивості таких відношень, зокрема, властивості відношень логічного наслідку для множин формул. У даній роботі на основі цих властивостей для першопорядкових КНЛ однозначних квазіарних предикатів кванторного рівня пропонуються числення секвенційного типу.

Секвенцію визначаємо (див. [5, 6]) як множину формул, специфікованих (відмічених) спеціальними символами $_{\vdash}$ та $_{\dashv}$, які не входять до алфавіту мови. Секвенції позначаємо як ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, де всі формули множини $\Gamma$ специфіковані символом $_{\vdash}$, усі формули множини $\Delta$ – символом $_{\dashv}$. Не деталізуючи, секвенції позначаємо як $\Sigma$.

Секвенційне числення для заданого відношення логічного наслідку $\models$ будується так, що секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна (має виведення) тоді й тільки тоді, коли $\Gamma \models \Delta$.

Роль аксіом секвенційного числення грають замкнені секвенції. Це поняття уточнюється по-різному в різних секвенційних численнях для різних відношень $\models$. При цьому має виконуватись умова: якщо секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ замкнена, то $\Gamma \models \Delta$.

Семантичним властивостям відношення $\models$ зіставимо їх синтаксичні аналоги – секвенційні форми. Вони є правилами виведення секвенційних числень. Секвенційні форми записуємо як $\dfrac{\Sigma}{\Omega}$ або $\dfrac{\Sigma \quad \Lambda}{\Omega}$ (зверху – засновки, внизу – висновок).

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Такі дерева назвемо секвенційними. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція.

Секвенція $\Sigma$ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем $\Sigma$. Таке дерево назвемо виведенням секвенції $\Sigma$.

Різноманітність відношень логічного наслідку дає побудову різних варіантів секвенційних числень КНЛ. У випадку часткових однозначних предикатів (некласична семантика) можна розглядати такі відношення (див. [2]): $\models_{Cl}$, $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{TF}$. Першопорядкові секвенційні числення побудовані [6] для відношення $\models_{Cl}$ логік еквітонних квазіарних предикатів. Для $\models_{Cl}$ в загальному випадку логік однозначних квазіарних предикатів збудоване [3] секвенційне числення кванторного рівня. Метою даної роботи є побудова числень кванторного рівня для відношень $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{TF}$ логік еквітонних та логік однозначних квазіарних предикатів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі робіт [2–4, 6].

## 1. Властивості відношень логічного наслідку для множин формул

У наведених далі властивостях $\models$ – це $\models_{Cl}$, $\models_{T}$, $\models_{F}$, $\models_{TF}$.

Спочатку наведемо базові властивості пропозиційного рівня:

*U*) нехай $\Gamma \models \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \models \Sigma$;
нехай $\Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda \models \Delta$.

*C*) $\Phi, \Gamma \models \Delta, \Phi$.

$\neg\neg_{\models}$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\neg_{=|}$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$.

$\vee_{\models}$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\vee_{=|}$) $\Gamma \models \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$.

$\neg\vee_{\models}$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$.

$\neg\vee_{=|}$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{\mathit{Cl}}$ також справджуються:

$\neg_{\models}$) $\neg\Phi, \Gamma \models_{\mathit{Cl}} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{\mathit{Cl}} \Delta, \Phi$.

$\neg_{=|}$) $\Gamma \models_{\mathit{Cl}} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{\mathit{Cl}} \Delta$.

Це означає, що для $\models_{\mathit{Cl}}$ можна знімати зовнішнє заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки. Проте це не можна робити [2, 5] для $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$ та $\models_{\boldsymbol{TF}}$, для цих наслідків властивості $\neg_{\models}$ та $\neg_{=|}$ невірні.

Додатково гарантують наявність логічного наслідку такі властивості:

*CL*) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models \Delta$ (тут $\models$ – це $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\mathit{Cl}}$).

*CR*) $\Gamma \models \Delta, \Phi, \neg\Phi$ (тут $\models$ – це $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\mathit{Cl}}$).

*CLR*) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \Psi, \neg\Psi$.

Зрозуміло, що *CLR* правильна $\Leftrightarrow$ одночасно правильні *CL* і *CR* (для $\models_{\boldsymbol{TF}}$).

Для $\models_{\mathit{Cl}}$ можна знімати заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки, тому *CLR*, *CL* і *CR* зводяться до *C*, що робить їх використання зайвим.

Наведемо базові властивості реномінативного і кванторного рівнів. При кожній інтерпретації предикати, що є значеннями виділених формул, збігаються. Наведені властивості правильні й для $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$, $\models_{\mathit{Cl}}$.

$\mathrm{RT}_{\models}$) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\mathrm{RT}_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\neg\mathrm{RT}_{\models}$) $\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\neg\mathrm{RT}_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\mathrm{RR}_{\models}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\mathrm{RR}_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$.

$\neg\mathrm{RR}_{\models}$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\neg\mathrm{RR}_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$.

$\mathrm{R}\neg_{\models}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\mathrm{R}\neg_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\neg\mathrm{R}\neg_{\models}$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\neg\mathrm{R}\neg_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

$\mathrm{R}\vee_{\models}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\mathrm{R}\vee_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

$\neg\mathrm{R}\vee_{\models}$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$.

$\neg\mathrm{R}\vee_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ та $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

Ми розглядаємо логіки квазіарних предикатів, в яких за допомогою тотальної функції $\nu: Ps\to 2^V$ для кожного предикатного символа задано множину строго неістотних предметних імен. Така $\nu$ продовжується [6] на множину всіх формул мови.

$\Phi\mathrm{N}_{\models}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$ при $y\in\nu(\Phi)$.

$\Phi\mathrm{N}_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ при $y\in\nu(\Phi)$.

$\neg\Phi\mathrm{N}_{\models}$) $\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$ при $y\in\nu(\Phi)$.

$\neg\Phi\mathrm{N}_{=|}$) $\Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ при $y\in\nu(\Phi)$.

$\mathrm{R}\exists_{\models}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Gamma \models_{\boldsymbol{TF}} \Delta$ при $y\notin\{\bar{v}, \bar{x}\}$.

$\mathrm{R}\exists_{-|}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$ при $y \notin \{\bar v, \bar x\}$.

$\neg\mathrm{R}\exists_{|-}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$ при $y \notin \{\bar v, \bar x\}$.

$\neg\mathrm{R}\exists_{-|}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\exists y R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$ при $y \notin \{\bar v, \bar x\}$.

$\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{|-}$) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{y}_{z}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$.

$\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{-|}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{y}_{z}(\Phi)$.

$\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{|-}$) $\neg R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg\exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{y}_{z}(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$.

$\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{-|}$) $\Gamma \models_{TF} \Delta, \neg R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\exists z R^{\bar v}_{\bar x} \circ^{y}_{z}(\Phi)$.

Для $\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{|-}$, $\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{-|}$, $\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{|-}$, $\neg\mathrm{R}\exists\mathrm{S}_{-|}$ $z$ тотально строго неістотне і $z \notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(\exists x\Phi))$.

Для $\models_{Cl}$ можна знімати зовнішнє заперечення, переносячи формулу з лівої частини у праву і навпаки, тому властивості типів ¬¬, ¬∨, ¬RT, ¬RR, ¬R¬, ¬R∨, ¬ΦN, ¬R∃, ¬R∃S не відносимо до базових.

Наведемо властивості, пов'язані з елімінацією кванторів.

При умові $z$ тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$ маємо (див. [2]):

∃TN) $R^{x}_{z}(\Phi), \Gamma_{A} \models_* \Delta \Rightarrow \exists x\Phi, \Gamma_{A} \models_* \Delta$;

¬∃TN) $\Gamma_{A} \models_* \neg R^{x}_{z}(\Phi), \Delta \Rightarrow \Gamma_{A} \models_* \neg\exists x\Phi, \Delta$.

Тут і надалі, якщо інше явно не вказано, $*$ – це одне з $Cl$, $T$, $F$, $TF$.

Для $X$–$Y$-означених відношень логічного наслідку [3, 4] маємо такі властивості.

Нехай $z$ тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma \cup \Delta)$. Тоді:

*TotN*) $\Gamma_{A, \{z\} \cup X-Y} \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{A, X-Y} \models_* \Delta$.

Нехай $Z, W, U \subseteq V$ – диз'юнктні множини. Тоді:

*Br*∃) $\Gamma_{A, W-U} \models_* \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow$ для кожної $Y \subseteq Z$ $\Gamma_{A, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{y_1}(\Phi), \ldots, R^{x}_{y_n}(\Phi), \ldots$,

де всі $y_i \in W \cup Y$.

*Br*¬∃) $\neg\exists x\Phi, \Gamma_{A, W-U} \models_* \Delta \Leftrightarrow$ для кожної $Y \subseteq Z$ $\neg\exists x\Phi, \neg R^{x}_{y_1}(\Phi), \ldots, \neg R^{x}_{y_n}(\Phi), \ldots, \Gamma_{A, W\cup Y-U\cup(Z\setminus Y)} \models_* \Delta$,

де всі $y_i \in W \cup Y$.

Нехай $z$ тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді при $z \in X$ маємо:

$\exists_{X-Y|-}$) $\Gamma, \exists x\Phi_{X-Y} \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma, R^{x}_{z}(\Phi)_{X-Y} \models_* \Delta$;

$\neg\exists_{X-Y-|}$) $\Gamma_{X-Y} \models_* \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma_{X-Y} \models_* \neg R^{x}_{z}(\Phi), \Delta$.

Для $\models_{Cl}$ можна обмежитись властивостями $\exists_{X-Y|-}$ та $Br\exists$.

Для відношення $\models_{Cl}$ логіки еквітонних предикатів немає потреби виділяти $X$–$Y$-означені відношення логічного наслідку. Тоді маємо:

$\exists_{|-}$) $\exists x\Phi, \Gamma \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{z}(\Phi), \Gamma \models_{Cl} \Delta$, де $z$ тотально строго неістотне, $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$;

$\exists_{-|}$) $\Gamma \models_{Cl} \Delta, \exists x\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{Cl} \Delta, \exists x\Phi, R^{x}_{z}(\Phi)$.

Наведемо тепер спеціальні властивості $X$–$Y$-означених відношень логічного наслідку, які додатково гарантують наявність логічного наслідку для логіки еквітонних предикатів:

*CEqT*) $R^{x,\bar u}_{y,\bar v}(\Phi), \Gamma_{A,X-Y} \models_T R^{x,\bar u}_{z,\bar v}(\Phi), \Delta$

при умові $z \in X$ та $y \in Y$;

*CEq¬T*) $\neg R^{x,\bar u}_{y,\bar v}(\Phi), \Gamma_{A,X-Y} \models_T \neg R^{x,\bar u}_{z,\bar v}(\Phi), \Delta$

при умові $z \in X$ та $y \in Y$;

*CEqF*) $R^{x,\bar u}_{z,\bar v}(\Phi), \Gamma_{A,X-Y} \models_F R^{x,\bar u}_{y,\bar v}(\Phi), \Delta$

при умові $z \in X$ та $y \in Y$;

*CEq¬F*) $\neg R^{x,\bar u}_{z,\bar v}(\Phi), \Gamma_{A,X-Y} \models_F \neg R^{x,\bar u}_{y,\bar v}(\Phi), \Delta$

при умові $z \in X$ та $y \in Y$.

Нехай $R^{\bar v}_{\bar x}\Phi$ та $R^{\bar z}_{\bar y}\Phi$ мають однакові $U$-неозначувані [3] форми, де $U$ – множина неозначених імен. Тоді маємо:

*UnD*) $R^{\bar v}_{\bar x}\Phi, \Gamma_{A,-U} \models_* R^{\bar z}_{\bar y}\Phi, \Delta$.

Підсумовуючи, отримуємо умови, які гарантують наявність відповідного логічного наслідку в неокласичній семантиці.

Відношення $\models_T$, загальний випадок:

$C \vee CL \vee UnD$.

Відношення $\models_T$ логіки еквітонних предикатів:

$C \vee CL \vee CEqT \vee CEq\neg T \vee UnD$.

Відношення $\models_F$, загальний випадок:

$C \vee CR \vee UnD$.

Відношення $\models_F$ логіки еквітонних предикатів:

$C \vee CR \vee CEqF \vee CEq\neg F \vee UnD$.

Відношення $\models_{TF}$, загальний випадок:

$C \vee CL \,\&\, CR \vee UnD$, що рівносильне

$C \vee CLR \vee UnD$.

Відношення $\models_{TF}$ логіки еквітонних предикатів:

$C \vee (CL \vee CEqT \vee CEq\neg T)\ \&$

$\&\ (CR \vee CEqF \vee CEq\neg F) \vee UnD.$

Для відношення $\models_{Cl}$ маємо $C \vee UnD$.

## 2. Базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій

Для ЧКНЛ можна отримати такі варіанти секвенційних числень.

**Відношення** $\models_{Cl}$ формалізуємо за допомогою відомого [3] числення, яке тут назвемо *QCl*. Для логіки еквітонних предикатів маємо відоме [6] неокласичне секвенційне числення, яке тут назвемо *QEqCl*.

**Відношення** $\models_{T}$ формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *QL*. Для логіки еквітонних предикатів отримуємо числення, яке назвемо *QEqL*.

**Відношення** $\models_{F}$ формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *QR*. Для логіки еквітонних предикатів отримуємо числення, яке назвемо *QEqR*.

**Відношення** $\models_{TF}$ формалізуємо за допомогою числення, яке назвемо *QLR*. Для логіки еквітонних предикатів отримуємо числення, яке назвемо *QEqLR*.

Для числень *QCl*, *QL*, *QR*, *QLR* вводимо додаткову умову UnD замкненості секвенції у даній вершині дерева. Це пов'язане із специфікою елімінації кванторів у загальному випадку квазіарних предикатів. Умова UnD опирається на властивість *UnD* [4].

Нехай $U$ – множина всіх неозначених імен у даній вершині-секвенції $\Sigma$.

Секвенція $\Sigma$ $U$-замкнена, якщо:

UnD) існує пара формул ${\vdash} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi,\ {\dashv} R_{\bar{y}}^{\bar{z}}\Phi \in \Sigma$ таких, що $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$ та $R_{\bar{y}}^{\bar{z}}\Phi$ мають однакові $U$-неозначувані форми.

Якщо секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ $U$-замкнена, то $\Gamma_{A,-U} \models \Delta$ для довільної моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Справді, при інтерпретаціях на даних, де всі імена $U$ не мають значення, предикати, що є інтерпретаціями формул із однаковими $U$-неозначуваними формами, приймають однакові значення. Звідси:

якщо ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ $U$-замкнена, то $\Gamma_{A,X-U} \models_{*} \Delta$ для довільних $\boldsymbol{A}$ та $X \subseteq V$: $X \cap U = \varnothing$.

Опишемо тепер введені числення.

**Числення *QCl*.** Базова умова замкненості секвенції $\Sigma$ – умова С:

С) $\Sigma$ замкнена, якщо існує формула $\Phi$ така, що ${\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${\dashv}\Phi \in \Sigma$.

Згідно властивості $C$, якщо секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ замкнена згідно умови С, то $\Gamma \models_{Cl} \Delta$.

Додаткова умова замкненості – це умова UnD $U$-замкненості (тут $U$ – множина всіх неозначених імен у даній секвенції-вершині).

Якщо секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ $U$-замкнена, то $\Gamma_{A,X-U} \models_{Cl} \Delta$ для всіх $\boldsymbol{A}$ та $X \subseteq V$: $X \cap U = \varnothing$.

Наведемо базові секвенційні форми числення *QCl*. Такі форми записуються згідно відповідних властивостей відношення логічного наслідку $\models_{Cl}$.

$${\vdash}\neg\ \frac{{\dashv}A,\ \Sigma}{{\vdash}\neg A,\ \Sigma}; \qquad {\dashv}\neg\ \frac{{\vdash}A,\ \Sigma}{{\dashv}\neg A,\ \Sigma};$$

$${\vdash}\vee\ \frac{{\vdash}A,\ \Sigma \qquad {\vdash}B,\ \Sigma}{{\vdash}A \vee B,\ \Sigma}; \qquad {\dashv}\vee\ \frac{{\dashv}A,\ {\dashv}B,\ \Sigma}{{\dashv}A \vee B,\ \Sigma};$$

$${\vdash}\mathbf{RT}\ \frac{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma}; \qquad {\dashv}\mathbf{RT}\ \frac{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A),\Sigma};$$

$${\vdash}\mathbf{RR}\ \frac{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma}; \qquad {\dashv}\mathbf{RR}\ \frac{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A),\Sigma}{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)),\Sigma};$$

$${\vdash}\mathbf{R}\neg\ \frac{{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma}; \qquad {\dashv}\mathbf{R}\neg\ \frac{{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A),\Sigma};$$

$${\vdash}\mathbf{R}\vee\ \frac{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B),\Sigma};$$

$${\dashv}\mathbf{R}\vee\ \frac{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B),\Sigma}{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B),\Sigma};$$

$${\vdash}\mathbf{\Phi N}\ \frac{{\vdash}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\vdash}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при } y \in \nu(A);$$

$${\dashv}\mathbf{\Phi N}\ \frac{{\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\dashv}R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A),\Sigma}\ \text{при } y \in \nu(A);$$

$${\vdash}\mathbf{R}\exists\ \frac{{\vdash}\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A),\Sigma}\ \text{при } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\};$$

$${\dashv}\mathbf{R}\exists\ \frac{{\dashv}\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A),\Sigma}{{\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A),\Sigma}\ \text{при } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\};$$

$${\vdash}\mathbf{R\exists S}\ \frac{{\vdash}\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y}(A),\Sigma}{{\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A),\Sigma};$$

$_{\dashv}\mathbf{R\exists S}\ \dfrac{_{\dashv}\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y} (A), \Sigma}{_{\dashv} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} (\exists y A), \Sigma}.$

Для $_{\vdash}\mathbf{R\exists S}$ та $_{\dashv}\mathbf{R\exists S}$ умови: $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, $z$ тотально строго неістотне, $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A))$.

За умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $_{\vdash}\mathbf{R\exists}$ та $_{\dashv}\mathbf{R\exists}$.

За умови $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо форми $_{\vdash}\mathbf{R\exists S}$ та $_{\dashv}\mathbf{R\exists S}$.

$_{\vdash}\exists\ \dfrac{_{\vdash} R_{y}^{x}(A), \Sigma}{_{\vdash} \exists x A, \Sigma}$; $\qquad _{\dashv}\exists\ \dfrac{_{\dashv} R_{z}^{x}(A),\ _{\dashv} \exists x A, \Sigma}{_{\dashv} \exists x A, \Sigma}.$

Для $_{\vdash}\exists$ $y$ тотально строго неістотне та $y \notin nm(\mathbf{\Sigma}, A)$; таке $y$ гарантовано означене.

Застосування форм $_{\vdash}\exists$ та $_{\dashv}\exists$ елімінації кванторів уточняється процедурою побудови секвенційного дерева.

**Числення *QEqCl*.** Базові секвенційні форми числення *QEqCl* такі ж, як для *QCl* (єдина відмінність – умову строго неістотності можна послабити до умови неістотності). Замкненість секвенції визначається умовою С.

Істотна відмінність *QEqCl*-числень та *QCl*-числень – різні процедури побудови секвенційного дерева, для *QEqCl*-числень така процедура [6] набагато простіша.

**Числення *QL*.** Базова умова замкненості секвенції в *QL*-численні – умова С.

Перша додаткова умова замкненості секвенції $\mathbf{\Sigma}$ в *QL*-численні – умова CL:

CL) $\mathbf{\Sigma}$ замкнена, якщо існує формула $\Phi$ така, що $_{\vdash}\Phi \in \mathbf{\Sigma}$ та $_{\vdash}\neg\Phi \in \mathbf{\Sigma}$.

Секвенція $\mathbf{\Sigma}$ замкнена, якщо виконується принаймні одна з умов С чи CL.

Згідно властивостей *C* та *CL* відношення $\models_{T}$, якщо $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ замкнена, то $\Gamma \models_{T} \Delta$.

Друга додаткова умова – це умова UnD *U*-замкненості (*U* – множина всіх неозначених імен в даній секвенції-вершині).

Якщо секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ *U*-замкнена, то $\Gamma_{A, X-U} \models_{T} \Delta$ для всіх $A$ та $X \subseteq V$: $X \cap U = \varnothing$.

Базові секвенційні форми числення *QL* записуємо згідно відповідних властивостей відношення логічного наслідку. До форм $_{\vdash}\vee$, $_{\dashv}\vee$, $_{\vdash}\mathbf{RT}$, $_{\dashv}\mathbf{RT}$, $_{\vdash}\mathbf{RR}$, $_{\dashv}\mathbf{RR}$, $_{\vdash}\mathbf{R}\neg$, $_{\dashv}\mathbf{R}\neg$, $_{\vdash}\mathbf{R}\vee$, $_{\dashv}\mathbf{R}\vee$, $_{\vdash}\mathbf{\Phi N}$, $_{\dashv}\mathbf{\Phi N}$, $_{\vdash}\mathbf{R\exists}$, $_{\dashv}\mathbf{R\exists}$, $_{\vdash}\mathbf{R\exists S}$, $_{\dashv}\mathbf{R\exists S}$, $_{\vdash}\exists$, $_{\dashv}\exists$ додаються форми із зовнішнім запереченням.

$_{\vdash}\neg\neg\ \dfrac{_{\vdash} A,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\neg A,\ \Sigma}$; $\qquad _{\dashv}\neg\neg\ \dfrac{_{\dashv} A,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\neg A,\ \Sigma}$;

$_{\vdash}\neg\vee\ \dfrac{_{\vdash}\neg A,\ _{\vdash}\neg B,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg(A \vee B),\ \Sigma}$;

$_{\dashv}\neg\vee\ \dfrac{_{\dashv}\neg A,\ \Sigma \qquad _{\dashv}\neg B,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg(A \vee B),\ \Sigma}$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{RT}\ \dfrac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma}$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{RT}\ \dfrac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(A), \Sigma}$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{RR}\ \dfrac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{RR}\ \dfrac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (A), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(A)), \Sigma}$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{R}\neg\ \dfrac{_{\vdash} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{R}\neg\ \dfrac{_{\dashv} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg A), \Sigma}$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{R}\vee\ \dfrac{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma}$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{R}\vee\ \dfrac{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma \qquad _{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(B), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A \vee B), \Sigma}$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{\Phi N}\ \dfrac{_{\vdash}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A), \Sigma}$ при $y \in \nu(A)$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{\Phi N}\ \dfrac{_{\dashv}\neg R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{z,\bar{u}}^{y,\bar{v}}(A), \Sigma}$ при $y \in \nu(A)$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{R\exists}\ \dfrac{_{\vdash}\neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}$ при $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{R\exists}\ \dfrac{_{\dashv}\neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(A), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}$ при $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$_{\vdash}\neg\mathbf{R\exists S}\ \dfrac{_{\vdash}\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y} (A), \Sigma}{_{\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}$;

$_{\dashv}\neg\mathbf{R\exists S}\ \dfrac{_{\dashv}\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{z}^{y} (A), \Sigma}{_{\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y A), \Sigma}.$

За умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ використовуємо секвенційні форми $_{\vdash}\mathbf{R\exists}$, $_{\dashv}\mathbf{R\exists}$, $_{\vdash}\neg\mathbf{R\exists}$, $_{\dashv}\neg\mathbf{R\exists}$, а якщо $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, то використовуємо форми $\vdash$**R∃S**, $\dashv$**R∃S**, $\vdash\neg$**R∃S**, $\dashv\neg$**R∃S**.

$$\vdash\neg\exists\ \frac{\vdash\neg\exists xA,\ \vdash\neg R_y^x(A),\Sigma}{\vdash\neg\exists xA,\Sigma};$$

$$\dashv\neg\exists\ \frac{\dashv\neg R_z^x(A),\Sigma}{\dashv\neg\exists xA,\Sigma}.$$

Для $\dashv\neg\exists$ $y$ тотально строго неістотне та $y\notin nm(\Sigma, A)$; таке $y$ гарантовано означене.

Застосування форм $\vdash\exists$, $\vdash\neg\exists$, $\dashv\exists$, $\dashv\neg\exists$ елімінації кванторів уточняється процедурою побудови секвенційного дерева.

**Числення *QEqL*.** Базові секвенційні форми числення *QEqL* такі ж, як для *QL*.

Замкненість секвенції визначається умовами C, CL, CEqT, CEq¬T, UnD.

Додаткові умови CEqT та CEq¬T замкненості секвенції у даній вершині секвенційного дерева індуковані властивістю еквітонності. При побудові дерева для незамкненого шляху кожна формула секвенції рано чи пізно буде розкладена до примітивних формул чи їх заперечень. Тому еквітонність достатньо враховувати лише для формул вигляду $R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)$ чи $\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)$.

Умови CEqT та CEq¬T формулюємо на основі властивостей *CEqT* та *CEq¬T*.

Нехай $X$ і $Y$ – множини всіх означених і неозначених імен у даній вершині $\Sigma$.

Секвенція $\Sigma$ $T_{X\text{–}Y}$-замкнена, якщо виконується одна з умов:

CEqT) існує пара формул $\vdash R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ та $\dashv R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ таких, що $z\in X$ та $y\in Y$;

CEq¬T) існує пара формул $\vdash\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ та $\dashv\neg R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ таких, що $z\in X$ та $y\in Y$.

Якщо секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ $T_{X\text{–}Y}$-замкнена, то $\Gamma_{A,X\text{–}Y}|\!=_T\Delta$ для довільної моделі мови $A$.

***Числення QR.*** Базові секвенційні форми числення *QR* такі ж, як і для числення *QL*. Базова умова замкненості секвенції в *QR*-численні – умова C.

Перша додаткова умова замкненості секвенції $\Sigma$ в *QR*-численні – умова CR:

CR) $\Sigma$ замкнена, якщо існує формула $\Phi$ така, що $\dashv\Phi\in\Sigma$ та $\dashv\neg\Phi\in\Sigma$.

Секвенція $\Sigma$ замкнена, якщо виконується принаймі одна з умов C чи CR.

Згідно відповідних властивостей *C* та *CR*, якщо $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ замкнена, то $\Gamma|\!=_F\Delta$.

Друга додаткова умова – це умова UnD *U*-замкненості секвенції $\Sigma$.

**Числення *QEqR*.** Базові секвенційні форми числення *QEqR* такі ж, як для *QR*.

Замкненість секвенції визначається умовами C, CR, CEqF, CEq¬F, UnD.

Додаткові умови CEqF та CEq¬F замкненості секвенції у даній вершині дерева індуковані властивістю еквітонності. Цю властивість достатньо враховувати лише для формул вигляду $R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)$ чи $\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)$.

Умови CEqF та CEq¬F формулюємо на основі властивостей *CEqF* та *CEq¬F*.

Нехай $X$ і $Y$ – множини всіх означених і неозначених імен у даній вершині $\Sigma$.

Секвенція $\Sigma$ $F_{X\text{–}Y}$-замкнена, якщо виконується одна з умов:

CEqF) існує пара формул $\vdash R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ та $\dashv R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ таких, що $z\in X$ та $y\in Y$;

CEq¬F) існує пара формул $\vdash\neg R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ та $\dashv\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi)\in\Sigma$ таких, що $z\in X$ та $y\in Y$.

Якщо секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ $F_{X\text{–}Y}$-замкнена, то $\Gamma_{A,X\text{–}Y}|\!=_F\Delta$ для довільної моделі мови $A$.

**Числення *QLR*.** Базові секвенційні форми числення *QLR* такі ж, як і для числення *QL*. Базова умова замкненості секвенції в *QLR*-численні – умова C.

Перша додаткова умова замкненості секвенції $\Sigma$ в *QLR*-численні – умова CLR:

CLR) $\Sigma$ замкнена, якщо існують формули $\Phi$ та $\Psi$: $\vdash\Phi\in\Sigma$, $\vdash\neg\Phi\in\Sigma$, $\dashv\Psi\in\Sigma$, $\dashv\neg\Psi\in\Sigma$.

Згідно відповідних властивостей *C* та *CLR*, якщо $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ замкнена, то $\Gamma|\!=_{TF}\Delta$.

Друга додаткова умова – це умова UnD *U*-замкненості секвенції $\Sigma$.

***Числення QEqLR.*** Базові секвенційні форми числення *QEqLR* такі ж, як для числення *QLR*.

Замкненість секвенції визначається умовами C, CL, CR, CEqT, CEq¬T, CEqF, CEq¬F, UnD. Для цього необхідно виконання умови C, або одночасного виконання однієї з умов CL, CEqT, CEq¬T та однієї з умов CR, CEqF, CEq¬F, або умови UnD.

## 3. Побудова секвенційного дерева. Коректність секвенційних числень

Опишемо процедуру побудови секвенційного дерева для заданої секвенції Σ. Вона придатна для скінченних та зліченних секвенцій. Зазначена процедура проводиться фактично однаково для числень *QL*, *QEqL*, *QR*, *QEqR*, *QLR*, *QEqLR*. Зауважимо, що ця процедура придатна і для числень логік неоднозначних предикатів, які будуть описані в наступній статті. Порівняно із відомою [6] процедурою для числення *QEqCl* логіки еквітонних предикатів, описувана процедура істотно складніша. Для числення *QCl* подібна процедура запропонована в [3], із невеликими змінами вона підходить для числень, які формалізують $\models_T$, $\models_F$ та $\models_{TF}$ (необхідно врахувати наявність "дублікатів" секвенційних форм для зовнішнього заперечення, а також специфічні для кожного числення умови замкненості секвенцій).

Для відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, а також для відношення $\models_{Cl}$ в загальному випадку (нееквітонність) треба враховувати, що значення предиката $P(d)$ може бути різним залежно від того, входить чи не входить до $d$ компонента з певним предметним іменем. Тому при інтерпретаціях формул треба явно вказувати множини означених та неозначених імен. У процедурі побудови дерева така особливість проявляється при формуванні прикладів для специфікованих формул вигляду $_{\dashv}\exists u\Phi$ та $_{\vdash}\neg\exists u\Phi$ за допомогою $_{\dashv}\exists$-форм та $_{\vdash}\neg\exists$-форм: приклади можуть мати тільки вигляд відповідно $_{\dashv}R_y^u(\Phi)$ та $_{\vdash}\neg R_y^u(\Phi)$, де $y$ означене.

Таким чином, при застосуванні $_{\dashv}\exists$-форми чи $_{\vdash}\neg\exists$-форми треба перебрати всі можливі випадки розподілу наявних предметних імен на означені й неозначені. Це можна реалізувати за допомогою побудови відповідних розгалужень секвенційного дерева: якщо у вершині Ξ вперше на етапі до формули вигляду $_{\dashv}\exists u\Phi$ чи $_{\vdash}\neg\exists u\Phi$ застосовується $_{\dashv}\exists$-форма чи $_{\vdash}\neg\exists$-форма, то для Ξ будується не одна, а багато вершин-"сестер", які є безпосередніми предками Ξ і мають одну й ту ж множину наявних імен та відрізняються лише різними множинами означених імен та відповідними множинами прикладів вигляду $_{\dashv}R_y^u(\Phi)$ чи $_{\vdash}\neg R_y^u(\Phi)$. Розподіл імен на означені й неозначені індукує також додаткову умову UnD замкненості секвенції-вершини.

Процедура побудови дерева для секвенції **Σ** починається з кореня дерева. Таку процедуру розіб'ємо на етапи. Кожне застосування секвенційної форми проводиться до скінченної множини *доступних* на даний момент формул. На початку кожного етапу виконується *крок доступу*: до списку доступних формул додаємо по одній формулі з списків $_{\vdash}$-формул та $_{\dashv}$-формул. Якщо недоступних $_{\vdash}$-формул чи $_{\dashv}$-формул немає (відповідний список вичерпано), то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі невичерпаного списку.

На початку побудови доступна лише пара перших формул списків (або єдина $_{\vdash}$-формула чи $_{\dashv}$-формула, якщо один з списків порожній).

Перед побудовою дерева для секвенції **Σ** зафіксуємо деякий список *TN* (нескінченний) тотально строго неістотних імен ("нових" імен) такий, що імена із *TN* не зустрічаються у формулах секвенції **Σ**.

Із кожною вершиною дерева пов'язуємо множину наявних та множину означених предметних імен. Множина означених імен явно виділяється лише на шляхах, де були хоч раз застосовані $_{\dashv}\exists$-форми чи $_{\vdash}\neg\exists$-форми (до такого застосування явне виділення множини означених імен непотрібне). Множина наявних імен – це множина імен усіх формул, які доступні на шляху від кореня до даної вершини. Усі тотально строго неістотні імена, задіяні при застосуванні $_{\vdash}\exists$-форм чи $_{\dashv}\neg\exists$-форм, у даному виведенні гарантовано означені.

Нехай виконано $k$ етапів процедури. На етапі $k$+1 перевіряємо, чи буде кожен з листів дерева замкненою секвенцією (беремо до уваги тільки доступні формули секвенцій).

Якщо всі листи замкнені, то процедура завершена позитивно, ми отримали замкнене секвенційне дерево.

Якщо ні, то для кожного незамкненого листа $\xi$ робимо наступний крок доступу, після чого добудовуємо скінченне піддерево з вершиною $\xi$**.** Для цього активізуємо всі доступні формули $\xi$, які не є примітивними чи їх запереченнями. Далі по черзі до кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму.

Секвенційні форми $\vdash$**RT**, $\dashv$**RT**, та $\vdash\neg$**RT** $\dashv\neg$**RT** допоміжні: перед застосуванням однієї з форм іншого типу усуваємо, у разі наявності, тотожні перейменування, застосовуючи належну кількість разів форми типу **RT** чи $\neg$**RT**.

Спочатку виконуємо всі $\vdash\exists$-форми та $\dashv\neg\exists$-форми. Застосування кожної такої форми додає нове тотально неістотне ім'я $y$ до множини означених імен вершини, таке $y$ беремо як перше незадіяне на даному шляху від кореня ім'я зі списку *TN*. Ім'я $y$ гарантовано означене, додаємо його до множин наявних та означених імен; далі для кожної доступної формули вигляду $\dashv\exists u\Phi$ чи $\vdash\neg\exists u\Phi$ додаємо відповідно приклад $\dashv R_y^u(\Phi)$ чи $\vdash\neg R_y^u(\Phi)$.

Далі виконуємо **R**$\exists$**S**-форми та $\neg$**R**$\exists$**S**-форми, при цьому беремо $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$ із задіяних на даному шляху від кореня дерева імен списку *TN*, якщо такі є, інакше беремо $z$ як перше ім'я списку *TN*. В останньому випадку таке $z$ додаємо до множин наявних та означених імен, далі для кожної доступної формули вигляду $\dashv\exists u\Psi$ чи $\vdash\neg\exists u\Psi$ додаємо приклад $\dashv R_z^u(\Psi)$ чи $\vdash\neg R_z^u(\Psi)$.

Після цього до кожної з решти активних формул застосовуємо відповідну форму – одну з форм типу $\neg$, $\neg\neg$, $\vee$, $\neg\vee$, **ФN**, $\neg$**ФN**, **RR**, $\neg$**RR**, **R**$\neg$, $\neg$**R**$\neg$, **R**$\vee$, $\neg$**R**$\vee$, **R**$\exists$, $\neg$**R**$\exists$.

Далі застосовуємо $\dashv\exists$-форми та $\vdash\neg\exists$-форми. Це робимо наступним чином.

Якщо $\dashv\exists$-форма чи $\vdash\neg\exists$-форма вперше застосується на шляху від кореня дерева, то із даної вершини будуємо розгалуження дерева. Для кожної вершини, що є безпосереднім предком даної, задаємо множину означених імен як певну підмножину наявних, при цьому до неї мусять входити усі тотально строго неістотні імена, задіяні при попередніх застосуваннях $\vdash\exists$- та $\dashv\neg\exists$-форм на шляху від кореня до даної вершини.

Нехай у даній вершині $\Sigma$ із множиною наявних імен $Z$ $\dashv\exists$-форма чи $\vdash\neg\exists$-форма застосовується вперше на шляху від кореня до $\Sigma$. Це означає, що на цьому шляху ще не було явного виділення множин означених та неозначених імен, окрім, можливо, виділення гарантовано означених при попередніх застосуваннях $\vdash\exists$- та $\dashv\neg\exists$-форм. Нехай $G$ – множина гарантовано означених імен, задіяних при застосуванні $\vdash\exists$-форм та $\dashv\neg\exists$-форм на шляху від кореня до даної вершини $\Sigma$, нехай $\dashv\exists x\Phi$ чи $\vdash\neg\exists x\Phi$ – та специфікована формула, до якої застосовується $\dashv\exists$-форма чи $\vdash\neg\exists$-форма. Добудовуємо безпосередніх предків вершини $\Sigma$ для кожної $X\subseteq Z\backslash G$ (фактично розглядаємо всеможливі розподіли імен із $Z\backslash G$ на означені й неозначені). Тоді $X\cup G$ та $Z\backslash(X\cup G)$ – це множини означених та неозначених імен відповідної вершини-предка. В кожній такій вершині-предку додаємо приклад $\dashv R_z^x(\Phi)$ формули $\dashv\exists x\Phi$ чи приклад $\vdash\neg R_z^x(\Phi)$ формули $\vdash\neg\exists x\Phi$ для кожного $z\in X\cup G$; надалі в усіх шляхах із цієї вершини-предка імена із $X\cup G$ означені.

Окремого розгляду вимагає випадок $G=\varnothing$. Тоді для вершини-предка із $X=\varnothing$ маємо $X\cup G=\varnothing$, тому при додаванні приклада формули $\dashv\exists x\Phi$ чи $\vdash\neg\exists x\Phi$ необхідно взяти *нове* тотально строго неістотне ім'я (такий вибір зумовлений необхідністю збереження відношення логічного наслідку, див. властивість *TotN*). Тому беремо із *TN* тотально строго неістотне $t\notin nm(\Sigma)$ та записуємо приклад $\dashv R_t^x(\Phi)$ чи приклад $\vdash\neg R_t^x(\Phi)$.

Нехай у вершині $\Sigma$ з множинами наявних імен $Z$ та означених імен $W$ до $\dashv\exists x\Phi$ чи $\vdash\neg\exists x\Phi$ вперше на етапі застосовується $\dashv\exists$-форма чи $\vdash\neg\exists$-форма, проте застосування $\dashv\exists$-форм та $\vdash\neg\exists$-форм на на шляху від кореня до вершини $\Sigma$ вже були, тому для $\Sigma$ множини означених та неозначених імен вже виділені. Розширення множини наявних імен при появі нових доступних формул після виконання кроку доступу веде також до повторного застосування $\dashv\exists$-форм та

$\vdash\neg\exists$-форм до старих доступних формул.

Нехай $X$ – множина доданих нових імен після виконання кроку доступу у вершині з множинами наявних імен $Z$ та означених імен $W$. Перше на етапі застосування $\dashv\exists$-форми до $\dashv\exists x\Phi$ чи $\vdash\neg\exists$-форми до $\vdash\neg\exists x\Phi$ дає розгалуження для кожної $Y\subseteq X$, у кожній такій вершині-предку для кожного $z\in Y\cup W$ додаємо $\dashv R_z^x(\Phi)$ чи $\vdash\neg R_z^x(\Phi)$, при цьому множиною наявних імен вершини-предка буде $Z\cup X$, множиною означених імен буде $W\cup Y$. Якщо застосування $\dashv\exists$-форми чи $\vdash\neg\exists$-форми не перше на етапі, то в даній вершині $X=\varnothing$, тобто вже немає імен, нерозподілених на означені й неозначені. Тоді в єдиній вершині-предку для кожного $z\in W$ додаємо $\dashv R_z^x(\Phi)$ чи $\vdash\neg R_z^x(\Phi)$.

Всі повтори специфікованих формул у секвенції усуваємо.

Після виконання базової секвенційної форми (окрім допоміжних типу **RT** чи **¬RT**) формула дезактивується і стає пасивною. До пасивних та утворених на даному етапі формул базові секвенційні форми незастосовні.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) процедуру завершено позитивно, маємо скінченне замкнене дерево;

2) процедуру завершено негативно, маємо скінченне незамкнене дерево;

3) процедура не завершується, маємо нескінченне незамкнене дерево. За лемою Кеніга [7] нескінченне дерево зі скінченним розгалуженням має хоча б один нескінченний шлях. Вершини цього шляху не можуть бути замкненими секвенціями, тому що при появі замкненої секвенції до неї незастосовна жодна секвенційна форма, і процес побудови для цього шляху обривається.

Отже, у випадках 2) і 3) у дереві існує скінченний чи нескінченний шлях $\wp$, усі вершини якого – незамкнені секвенції. Такий шлях назвемо незамкненим. Кожна з формул секвенції $\mathbf{\Sigma}$ зустрінеться на цьому шляху і стане доступною.

Із наведеної процедури побудови секвенційного дерева випливає, що для кожної його вершини $\vdash\Lambda\dashv\mathbf{K}$ з множинами означених імен $W$ та неозначених імен $U$ для кожної моделі мови $\boldsymbol{A}$ справджується $\Lambda_{A,\,W-U}\models_* \mathbf{K}$ (тут $*$ – одне з $Cl$, $T$, $F$, $TF$).

Для листів дерева це випливає з виконання умов замкненості секвенції:

– для числень $QL$, $QR$, $QLR$ – умов замкненості та $U$-замкненості;

– для числення $QEqL$ – умов замкненості, $U$-замкненості, $T_{X-Y}$–замкненості;

– для числення $QEqR$ – умов замкненості, $U$-замкненості, $F_{X-Y}$–замкненості;

– для числення $QEqLR$ – умов замкненості, $U$-замкненості, $T_{X-Y}$–замкненості, $F_{X-Y}$–замкненості.

Збереження секвенційними формами (від засновків до висновків) вищезазначених відношень логічного наслідку виконується для секвенційних форм типу ¬, ¬¬, ∨, ¬∨, **RT**, **¬RT**, **ΦN**, **¬ΦN**, **RR**, **¬RR**, **R¬**, **¬R¬**, **R∨**, **¬R∨**, **R∃**, **¬R∃**, **R∃S**, **¬R∃S**. Це безпосередньо випливає із відповідних властивостей для відношень логічного наслідку.

Окремого розгляду вимагають форми для елімінації кванторів.

Для $\vdash\exists$-форм та $\dashv\neg\exists$-форм збереження відповідних відношень логічного наслідку від засновку до висновку гарантується властивостями $\exists_{X-Y}\vdash$ та $\neg\exists_{X-Y}\dashv$, а також $TotN$.

Для $\dashv\exists$-форм та $\vdash\neg\exists$-форм збереження відповідних відношень логічного наслідку при русі до вершини Σ, яка містить активну $\dashv\exists x\Phi$ чи $\vdash\neg\exists x\Phi$, від вершин, які є її безпосередніми предками та містять приклади вигляду $\dashv R_z^x(\Phi)$ чи $\vdash\neg R_z^x(\Phi)$, гарантується властивостями $Br\exists$, $Br\neg\exists$, а також $TotN$.

Нехай секвенція $\vdash\mathbf{\Gamma}\dashv\mathbf{\Delta}$ вивідна, тоді для неї згідно нашої процедури збудоване замкнене секвенційне дерево. При такій побудові введені $\vdash\exists$-формами та $\dashv\neg\exists$-формами (в окремих випадках також $\dashv\exists$-формами та $\vdash\neg\exists$-формами) нові тотально строго неістотні імена гарантовано означені в цьому виведенні секвенції $\vdash\mathbf{\Gamma}\dashv\mathbf{\Delta}$, тому можна обмежитись розглядом тільки інтерпретацій (моделей мови) $\boldsymbol{A}$ із $G$-означеними даними, де $G$ – множина таких гарантовано означених імен. Неформально кажучи, гарантовано означені імена ведуть себе подібно до константних символів класичної логіки предикатів. Беручи до уваги $TotN$, отримуємо: $\mathbf{\Gamma}\models_*\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$ для кожної $\boldsymbol{A}$ маємо $\mathbf{\Gamma}_A\models_*\mathbf{\Delta}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ для кожної $A$ маємо $\Gamma_{A,G} \models_{*} \Delta$, де $G$ – множина таких гарантовано означених тотально строго неістотних імен (тут $*$ – одне з $Cl$, $T$, $F$, $TF$ для відповідного числення).

Таким чином, для побудованих секвенційних числень справджується теорема коректності. Для різних числень та наслідків вона формулюється однотипно.

**Теорема 1** (коректності). Нехай секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Для різних числень та відношень логічного наслідку теорема 1 конкретизується так.

**Теорема коректності.** Нехай секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QCl$-численні. Тоді $\Gamma \models_{Cl} \Delta$.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QEqCl$-численні. Тоді $\Gamma \models_{Cl} \Delta$ для логіки еквітонних предикатів.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QL$-численні. Тоді $\Gamma \models_{T} \Delta$.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QEqL$-численні. Тоді $\Gamma \models_{T} \Delta$ для логіки еквітонних предикатів.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QR$-численні. Тоді $\Gamma \models_{F} \Delta$.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QEqR$-численні. Тоді $\Gamma \models_{F} \Delta$ для логіки еквітонних предикатів.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QLR$-численні. Тоді $\Gamma \models_{TF} \Delta$.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна в $QEqLR$-численні. Тоді $\Gamma \models_{TF} \Delta$ для логіки еквітонних предикатів.

## 4. Модельні множини

Для доведення повноти збудованих секвенційних числень використаємо метод модельних (хінтікківських) множин [5, 6]. Для різних секвенційних числень визначення модельної множини дещо відмінні

*Числення QL.* Нехай $\boldsymbol{H}$ – множина специфікованих формул із виділеною множиною $W \subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен; тоді $U = nm(\boldsymbol{H}) \setminus W$ – множина її неозначених імен.

Множина $\boldsymbol{H}$ $L$-модельна, якщо виконуються такі умови.

HC) не існує формули $\Phi$ такої, що ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$.

HCL) не існує формули $\Phi$ такої, що ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$.

HCU) не існує пари формул вигляду ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}} A \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv} R^{\bar{u}}_{\bar{y}} A \in \boldsymbol{H}$ таких, що $R^{\bar{v}}_{\bar{x}} A$ та $R^{\bar{u}}_{\bar{y}} A$ мають однакові $U$-неозначувані форми.

HC, HCL та HCU – це умови коректності $L$-модельної можини.

H¬¬) якщо ${}_{\vdash}\neg\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv}\neg\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$,то ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$.

H∨) якщо ${}_{\vdash}\Phi\vee\Psi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}$ або ${}_{\vdash}\Psi \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv}\Phi\vee\Psi \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\dashv}\Psi \in \boldsymbol{H}$.

H¬∨) якщо ${}_{\vdash}\neg(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ та ${}_{\vdash}\neg\Psi \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv}\neg(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$ або ${}_{\dashv}\neg\Psi \in \boldsymbol{H}$.

HRT) якщо ${}_{\vdash} R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv} R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬RT) якщо ${}_{\vdash}\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv}\neg R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HRR) якщо ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬RR) якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR¬) якщо ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬R¬) Якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR∨) якщо ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\vdash} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;
якщо ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi) \in \boldsymbol{H}$, то ${}_{\dashv} R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬R∨) якщо ${}_{\vdash}\neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$, то

$\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \in \boldsymbol{H}$, то

$\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in \boldsymbol{H}$.

HΦN) якщо $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$,

то $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то

$\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬ΦN) якщо $\vdash\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то

$\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \nu(\Phi)$, то

$\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR∃) якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то

$\vdash \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то

$\dashv \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬R∃) якщо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$,

то $\vdash\neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то

$\dashv\neg\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

HR∃S) якщо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то

$\vdash \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то

$\dashv \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬R∃S) якщо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$,

то $\vdash\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, то

$\dashv\neg\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

Для HR∃S та H¬R∃S $z$ строго тотально неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi))$.

H∃) якщо $\vdash\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то існує $y \in W$ таке, що

$\vdash R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то для всіх $y \in W$ маємо

$\dashv R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

H¬∃) якщо $\vdash\neg\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то для всіх $y \in W$

маємо $\vdash\neg R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}$;

якщо $\dashv\neg\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}$, то існує $y \in W$ таке, що

$\dashv\neg R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}$.

*Числення QEqL.* Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із виділеними множинами $W \subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен та $U = nm(\boldsymbol{H}) \setminus W$ неозначених імен *EqL*-модельна, якщо виконуються вищенаведені умови для *L*-модельної множини та додаткові умови коректності:

HCEqT) не існує пари формул $\vdash R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$

та $\dashv R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ таких: $z \in W$ та $y \in U$;

HCEq¬T) не існує пари формул

$\vdash\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv\neg R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ таких:

$z \in W$ та $y \in U$.

*Числення QR.* Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із виділеними множинами $W \subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен та $U = nm(\boldsymbol{H}) \setminus W$ неозначених імен *R*-модельна, якщо виконуються умови HC, HCU, H¬¬, H∨, H¬∨, HRT, HRR, HR¬, HR∨, HΦN, H¬RT, H¬RR, H¬R¬, H¬R∨, H¬ΦN, HR∃, H¬R∃, HR∃S, H¬R∃S, H∃, H¬∃, а також HCR:

HCR) не існує формули Φ такої, що $\dashv\Phi \in \boldsymbol{H}$

та $\dashv\neg\Phi \in \boldsymbol{H}$.

Тут HC та HCR – умови коректності *R*-модельної можини.

*Числення QEqR.* Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із виділеними множинами $W \subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен та $U = nm(\boldsymbol{H}) \setminus W$ неозначених імен *EqR*-модельна, якщо виконуються вищенаведені умови для *R*-модельної множини та додаткові умови коректності:

HCEqF) не існує пари формул

$\vdash R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ таких:

$z \in W$ та $y \in U$;

HCEq¬F) не існує пари формул

$\vdash\neg R_{z,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ та $\dashv\neg R_{y,\bar{v}}^{x,\bar{u}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}$ таких:

$z \in W$ та $y \in U$.

*Числення QLR.* Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із виділеними множинами $W \subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен та $U = nm(\boldsymbol{H}) \setminus W$ неозначених імен *LR*-модельна, якщо виконуються умови H¬¬, H∨, H¬∨, HRT, HRR, HR¬, HR∨, HΦN, H¬RT, H¬RR, H¬R¬, H¬R∨, H¬ΦN, HR∃, H¬R∃, HR∃S, H¬R∃S, H∃, H¬∃, а також наступні умови коректності *LR*-модельної множини: HC, HCL або HCR, HCU.

Замість умови "HCL або HCR" тут можна брати рівносильну умову:

HCLR) не існують формули $\Phi$ та $\Psi$ такі, що $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$, $_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$ та $_{\dashv}\Psi\in\boldsymbol{H}$, $_{\dashv}\neg\Psi\in\boldsymbol{H}$.

*Секвенційне числення QEqLR.* Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із виділеними множинами $W\subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен та $U=nm(\boldsymbol{H})\setminus W$ неозначених імен *EqLR*-модельна, якщо виконуються вищенаведені умови для *LR*-модельної множини з наступними умовами коректності: HC, HCL, HCU, HCEqT, HCEq¬T; або HC, HCR, HCU, HCEqF, HCEq¬F.

*Числення QCl.* Множина $\boldsymbol{H}$ специфікованих формул із виділеними множинами $W\subseteq nm(\boldsymbol{H})$ означених імен та $U=nm(\boldsymbol{H})\setminus W$ неозначених імен *C*-модельна, якщо виконуються умови HC, HCU, H$\vee$, HRT, HRR, HR¬, HR$\vee$, HΦN, HR$\exists$, HR$\exists$S, H$\exists$ та H¬:

H¬) якщо $_{\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}$;
якщо $_{\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, то $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$.

HC та HCU – це умови коректності *C*-модельної можини.

Зауважимо, що визначення *L*-модельної, *EqL*-модельної, *R*-модельної, *EqR*-модельної, *LR*-модельної, *EqLR*-модельної множини відрізняються тільки різними умовами їх коректності.

## 5. Повнота секвенційних числень

**Теорема 2.** Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві*,* $\boldsymbol{H}$ – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді $\boldsymbol{H}$ – модельна множина відповідного типу (*C*-модельна, *L*-модельна, *EqL*-модельна, *R*-модельна, *EqR*-модельна, *LR*-модельна, *EqLR*-модельна).

Справді, для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовується одна з базових секвенційних форм відповідного числення. Переходи згідно з такими формами узгодженні з однойменними пунктами визначення модельної множини відповідного типу. Кожна формула, яка не є примітивною чи її запереченням, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена згідно з відповідною секвенційною формою. Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконані відповідні умови коректності модельної множини відповідного типу:

– HC та HCU для *C*-модельної;

– HC, HCL та HCU для *L*-модельної;

– HC, HCL, HCEqT, HCEq¬T та HCU для *EqL*-модельної;

– HC, HCR та HCU для *R*-модельної;

– HC, HCR, HCEqF, HCEq¬F та HCU для *EqR*-модельної;

– HC, HCLR та HCU для *LR*-модельної;

– HC, HCL, HCU, HCEqT, HCEq¬T або HC, HCR, HCU, HCEqF, HCEq¬F для *EqLR*-модельної.

Наступні твердження фактично задають побудову контрмоделей при відсутності логічного наслідку. Вони формулюються для різних типів модельних множин.

**Теорема 3.** Нехай $\boldsymbol{H}$ – модельна множина, яка може бути *L*-модельною, *EqL*-модельною, *R*-модельною, *EqR*-модельною, *LR*-модельною, *EqLR*-модельною. Тоді існують моделі мови АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ і $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I})$ та $\delta$, $\eta\in{}^{V}\!A$ такі:

1) $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$;

2) $_{\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $_{\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Пари $(\boldsymbol{A},\delta)$ та $(\boldsymbol{B},\eta)$ із такими властивостями відповідно назвемо *T*-контрмоделлю та *F*-контрмоделлю.

Доведення теореми 3 не залежить від умови однозначності предикатів, це враховано при виборі позначень. Ми пишемо $d\in\boldsymbol{T}(P)$, $d\in\boldsymbol{F}(P)$, $d\notin\boldsymbol{T}(P)$, $d\notin\boldsymbol{F}(P)$, що для однозначних предикатів можна записати $P(d)=T$, $P(d)=F$, невірно $P(d)=T$, невірно $P(d)=F$. Тут $\boldsymbol{T}(P)=\{d\in{}^{V}\!A \mid T\in P(d)\}$ та $\boldsymbol{F}(P)=\{d\in{}^{V}\!A \mid F\in P(d)\}$ – області істинності та хибності квазіарного предиката *P*.

Нехай *W* – множина всіх означених предметних імен, що фігурують у $\boldsymbol{H}$.

Візьмемо деяку множину *A* таку, що $|A|=|W|$, та деякі ін'єктивні $\delta,\eta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta)=W$. Така *A* дублює множину *W*.

Доведення теореми проведемо індукцією за складністю формули згідно з побудовою модельної множини.

Спочатку задамо значення базових предикатів та їх заперечень на $\delta$ та $\eta$, а також на ІМ вигляду $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$ та $\mathbf{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\eta)$:

– якщо $_{\vdash}p\in\boldsymbol{H}$, то задамо $\delta\in\boldsymbol{T}(p_A)$;

– якщо $_{\dashv}p\in\boldsymbol{H}$, то задамо $\delta\notin\boldsymbol{T}(p_B)$;

– якщо $\vdash p\in \boldsymbol{H}$, то задамо $\eta\notin \boldsymbol{F}(p_B)$;
– якщо $\dashv p\in \boldsymbol{H}$, то задамо $\eta\in \boldsymbol{F}(p_A)$;
– якщо $\vdash\neg p\in \boldsymbol{H}$, то $\delta\in \boldsymbol{F}(p_A) = \boldsymbol{T}(\neg p_A)$;
– якщо $\dashv\neg p\in \boldsymbol{H}$, то $\delta\notin \boldsymbol{F}(p_A) = \boldsymbol{T}(\neg p_A)$;
– якщо $\vdash\neg p\in \boldsymbol{H}$, то $\eta\notin \boldsymbol{T}(p_B) = \boldsymbol{F}(\neg p_B)$;
– якщо $\dashv\neg p\in \boldsymbol{H}$, то $\eta\in \boldsymbol{T}(p_B) = \boldsymbol{F}(\neg p_B)$;
– якщо $\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо $\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\in \boldsymbol{T}(p_A)$;
– якщо $\dashv R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо $\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\notin \boldsymbol{T}(p_A)$;
– якщо $\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо $\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\notin \boldsymbol{F}(p_B)$;
– якщо $\dashv R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо $\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\in \boldsymbol{F}(p_B)$;
– якщо $\vdash\neg R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо
$\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\in \boldsymbol{F}(p_A) = \boldsymbol{T}(\neg p_A)$;
– якщо $\dashv\neg R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо
$\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\delta)\notin \boldsymbol{F}(p_A) = \boldsymbol{T}(\neg p_A)$;
– якщо $\vdash\neg R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо
$\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\notin \boldsymbol{T}(p_B) = \boldsymbol{F}(\neg p_B)$;
– якщо $\dashv\neg R_{\bar x}^{\bar v}(p)\in \boldsymbol{H}$, то задамо
$\mathbf{r}_{\bar x}^{\bar v}(\eta)\in \boldsymbol{T}(p_B) = \boldsymbol{F}(\neg p_B)$.

В усіх інших випадках значення базових предикатів та їх заперечень можна задавати довільно, беручи до уваги обмеження щодо строго неістотності: для всіх $d, h\in {}^{V}\!A$ таких, що $d\,\|\text{-}\nu(p) = h\,\|\text{-}\nu(p)$, необхідно $p_A(d) = p_A(h)$, $\neg p_A(d) = \neg p_A(h)$, $p_B(d) = p_B(h)$, $\neg p_B(d) = \neg p_B(h)$. Це враховує строго неістотність імен $y\in\nu(p)$ для $p_A$ та $p_B$.

Для випадків *EqL*-модельної, *EqR*-модельної чи *EqLR*-модельної множини вищезадані значення базових предикатів та їх заперечень продовжимо, ураховуючи умови еквітонності та строго неістотності імен, на відповідні $h\in {}^{V}\!A$. В усіх інших випадках значення базових предикатів та їх заперечень задаємо довільно, беручи до уваги обмеження щодо еквітонності та строго неістотності. Таким чином, значення базових предикатів та їх заперечень визначені коректно.

Для атомарних формул і формул вигляду $R_{\bar x}^{\bar v}(p)$ та їх заперечень твердження теореми випливають з вищенаведеного визначення значень базових предикатів та їх заперечень.

Доведемо крок індукції.

Нехай $\vdash\neg\neg\Phi\in \boldsymbol{H}$. Згідно H$\neg\neg$ маємо $\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, звідки $\delta\in \boldsymbol{T}(\neg\neg\Phi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$, звідки $\eta\notin \boldsymbol{F}(\neg\neg\Phi_B)$.

Нехай $\dashv\neg\neg\Phi\in \boldsymbol{H}$. Згідно H$\neg\neg$ маємо $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$, звідки $\delta\notin \boldsymbol{T}(\neg\neg\Phi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$, звідки $\eta\in \boldsymbol{F}(\neg\neg\Phi_B)$.

Нехай $\vdash\Phi\vee\Psi\in \boldsymbol{H}$. Згідно H$\vee$ маємо $\vdash\Phi\in \boldsymbol{H}$ або $\vdash\Psi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ або $\delta\in \boldsymbol{T}(\Psi_A)$, звідки $\delta\in \boldsymbol{T}(\Phi_A)\cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = \boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ або $\eta\notin \boldsymbol{F}(\Psi_B)$, тому $\eta\notin \boldsymbol{F}(\Phi_B)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_B) = \boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_B)$.

Нехай $\dashv\Phi\vee\Psi\in \boldsymbol{H}$. Згідно H$\vee$ маємо $\dashv\Phi\in \boldsymbol{H}$ та $\dashv\Psi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $d\notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $d\notin \boldsymbol{T}(\Psi_A)$, звідки $d\notin \boldsymbol{T}(\Phi_A)\cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = \boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ тоді $\eta\in \boldsymbol{F}(\Phi_B)$ і $\eta\in \boldsymbol{F}(\Psi_B)$, звідки $\eta\in \boldsymbol{F}(\Phi_B)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_B) = \boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_B)$.

Нехай $\vdash\neg(\Phi\vee\Psi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно H$\neg\vee$ маємо $\vdash\neg\Phi\in \boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg\Psi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ тоді $\delta\in \boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)$ та $\delta\in \boldsymbol{T}(\neg\Psi_A)$, звідки $\delta\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)$ та $\delta\in \boldsymbol{F}(\Psi_A)$, тому $\delta\in \boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_A) = \boldsymbol{T}(\neg(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\notin \boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)$ та $\eta\notin \boldsymbol{F}(\neg\Psi_B)$, звідки $\eta\notin \boldsymbol{T}(\Phi_B)$ та $\eta\notin \boldsymbol{T}(\Psi_B)$, тому $\eta\notin \boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup \boldsymbol{T}(\Psi_B) = \boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_B) = \boldsymbol{F}(\neg(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $\dashv\neg(\Phi\vee\Psi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно H$\neg\vee$ маємо $\dashv\neg\Phi\in \boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg\Psi\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\notin \boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)$ або $\delta\notin \boldsymbol{T}(\neg\Psi_A)$, звідки $\delta\notin \boldsymbol{F}(\Phi_A)$ або $\delta\notin \boldsymbol{F}(\Psi_A)$, тому маємо $\delta\notin \boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \boldsymbol{F}(\Phi\vee\Psi_A) = \boldsymbol{T}(\neg(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\in \boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)$ або $\eta\in \boldsymbol{F}(\neg\Psi_B)$, звідки $\eta\in \boldsymbol{T}(\Phi_B)$ або $\eta\in \boldsymbol{T}(\Psi_B)$, тому $\eta\in \boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup \boldsymbol{T}(\Psi_B) = \boldsymbol{T}(\Phi\vee\Psi_B) = \boldsymbol{F}(\neg(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $\vdash R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно HRT маємо $\vdash R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\in \boldsymbol{T}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi_A))$, звідки $\delta\in \boldsymbol{T}(R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi_A))$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\notin \boldsymbol{F}(R_{\bar x}^{\bar v}(\Phi_B))$, звідки $\eta\notin \boldsymbol{F}(R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi_B))$.

Нехай $\dashv R_{z,\bar x}^{z,\bar v}(\Phi)\in \boldsymbol{H}$. Згідно HRT маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A))$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_B))$.

Нехай $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$. Згідно HRR маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_B)$.

Нехай $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$. Згідно HRR маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_B)$.

Нехай $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR¬ маємо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$.

Нехай $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR¬ маємо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$.

Нехай $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR∨ маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$, звідки отримуємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно HR∨ маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$, звідки отримуємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $\vdash R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$. Згідно HΦN маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_B)$.

Нехай $\dashv R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$. Згідно HΦN маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_B)$.

Нехай $\vdash\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬RT $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$. Але $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))=\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))=\boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A))=$ $=\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))$. Але $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))=$ $=\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))=\boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_B))=\boldsymbol{F}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_B))$.

Нехай $\dashv\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬RT $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$. Але $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))=\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))=\boldsymbol{F}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_A))=$ $=\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))$. Але $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))=$ $=\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_B))=\boldsymbol{T}(R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_B))=\boldsymbol{F}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi)_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi_B))$.

Нехай $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$. Згідно

H¬RR тоді $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)$. Але $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_B)$. Але $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_B)$.

Нехай $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬RR тоді $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)$. Але $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_B)$. Але $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi))_B)$.

Нехай $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬R¬ маємо $\vdash R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$. Але $\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$, звідки маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$. Але $\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B)$, звідки маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B)$.

Нехай $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬R¬ маємо $\dashv R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$. Але $\boldsymbol{T}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$, звідки маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$. Але $\boldsymbol{F}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B)$, звідки маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi)_B)$.

Нехай $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬R∨ маємо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$ та $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\,\&\,\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\vee\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi))_A)=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$ та $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)\cup\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)$. Враховуючи, що $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)\cup\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)=$ $=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\,\&\,\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$, звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)\in\boldsymbol{H}$. Згідно H¬R∨ тоді $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ або $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)$ або $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)\cap\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)$. Але маємо $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_A)\cap\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)=$ $=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\,\&\,\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_A)$, тому $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$ або $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)\cup$ $\cup\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)$. Враховуючи, що $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)\cup\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)=$ $=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\,\&\,\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)_B)=\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$, звідси $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi)_B)$.

Нехай $\vdash\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$. Згідно H¬ΦN маємо $\vdash\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$. Проте $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))=$ $=\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$. Водночас $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)=$ $=\boldsymbol{F}(\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_B)$.

Нехай $\dashv\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$ та $y\in\nu(\Phi)$. Згідно H¬ΦN маємо $\dashv\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для δ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))$. Проте $\boldsymbol{T}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi_A))=$ $=\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi)_A)$. За припущенням індукції для η маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)$. Водночас $\boldsymbol{F}(\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)_B)=$

$=\boldsymbol{F}(\neg R^{y,\bar{y}}_{z,\bar{x}}(\Phi)_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R^{y,\bar{y}}_{z,\bar{x}}(\Phi)_B)$.

Нехай $\vdash\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$. Згідно Н$\exists$ тоді існує $y\in W$ таке, що $\vdash R^x_y(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(R^x_y(\Phi)_A)$. Звідси $\delta\nabla x\mapsto\delta(y)\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Однак $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta\in{}^W\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\delta(y)$ маємо $\delta\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, звідки $\delta\in\boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(R^x_y(\Phi)_B)$. Звідси $\eta\nabla x\mapsto\eta(y)\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$. Однак $\eta(y)\downarrow$ згідно з $\eta\in{}^W\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\eta(y)$ маємо $\eta\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{F}(\exists x\Phi_B)$.

Нехай $\dashv\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$. Згідно Н$\exists$ тоді для всіх $y\in W$ маємо $\dashv R^x_y(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(R^x_y(\Phi)_A)$ для всіх $y\in W$. Звідси $\delta\nabla x\mapsto\delta(y)\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\delta\in A^W$ маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк $\delta$ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\delta\nabla x\mapsto b\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ для всіх $b\in A$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{T}(\exists x\Phi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(R^x_y(\Phi)_B)$ для всіх $y\in W$. Звідси $\eta\nabla x\mapsto\eta(y)\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\eta\in A^W$ маємо $\eta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк $\eta$ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\eta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\eta\nabla x\mapsto b\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ для всіх $b\in A$, звідки $\eta\in\boldsymbol{F}(\exists x\Phi_B)$.

Нехай $\vdash\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$. Згідно Н$\neg\exists$ тоді для всіх $y\in W$ маємо $\vdash\neg R^x_y(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg R^x_y(\Phi)_A)$ для всіх $y\in W$. Звідси $\delta\nabla x\mapsto\delta(y)\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\delta\in A^W$ маємо $\delta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк $\delta$ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\delta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\delta\nabla x\mapsto b\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для всіх $b\in A$, звідки $\delta\in\boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$, тому $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg\exists x\Phi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg R^x_y(\Phi)_B)$ для всіх $y\in W$. Звідси $\eta\nabla x\mapsto\eta(y)\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$ для всіх $y\in W$. Згідно з $\eta\in A^W$ маємо $\eta(y)\downarrow$ для всіх $y\in W$. Позаяк $\eta$ є бієкцією $W\to A$, то кожне $b\in A$ має вигляд $b=\eta(y)$ для деякого $y\in W$. Отже, $\eta\nabla x\mapsto b\notin\boldsymbol{T}(\Phi_B)$ для всіх $b\in A$, звідки $\eta\notin\boldsymbol{T}(\exists x\Phi_B)$, тому $\eta\notin\boldsymbol{F}(\neg\exists x\Phi_B)$.

Нехай $\dashv\neg\exists x\Phi\in\boldsymbol{H}$. Згідно Н$\neg\exists$ тоді існує $y\in W$ таке, що $\dashv\neg R^x_y(\Phi)\in\boldsymbol{H}$. За припущенням індукції для $\delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg R^x_y(\Phi)_A)$. Звідси $\delta\nabla x\mapsto\delta(y)\notin\boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Однак $\delta(y)\downarrow$ згідно з $\delta\in{}^W\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\delta(y)$ маємо $\delta\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки $\delta\notin\boldsymbol{F}(\exists x\Phi_A)$, тому $\delta\notin\boldsymbol{T}(\neg\exists x\Phi_A)$. За припущенням індукції для $\eta$ тоді маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg R^x_y(\Phi)_B)$. Звідси $\eta\nabla x\mapsto\eta(y)\in\boldsymbol{T}(\Phi_B)$. Однак $\eta(y)\downarrow$ згідно з $\eta\in{}^W\!A$ та $y\in W$, тому для $a=\eta(y)$ маємо $\eta\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Phi_B)$, звідки $\eta\in\boldsymbol{T}(\exists x\Phi_B)$, тому $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg\exists x\Phi_B)$.

Аналогічним чином доводимо для пп. HR$\exists$, H$\neg$R$\exists$, HR$\exists$S, H$\neg$R$\exists$S визначення модельної множини.

**Теорема 4.** Нехай $\boldsymbol{H}$ – $C$-модельна множина. Тоді існують модель мови АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ та $\delta\in{}^V\!A$ такі:
$\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

Пару $(\boldsymbol{A},\delta)$ із вищенаведеними властивостями назвемо *Cl*-контрмоделлю.

Доведення теореми 4 подібне до доведення теореми 3, воно наведене в [3].

Теорема повноти для різних варіантів секвенційних числень та логічних наслідків формулюється однаково.

**Теорема 5**. *Нехай* $\Gamma\models_{Cl}\Delta$. Тоді секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна в численні *QCl*.

Припустимо супротивне: $\Gamma\models_{Cl}\Delta$ та $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma=\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна, то секвенційне дерево для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – $C$-модельна. При цьому $\vdash\Gamma\dashv\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Згідно з теоремою 4 існує *Cl*-контрмодель $(\boldsymbol{A},\delta)$ така: $\vdash\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\dashv\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{F}(\Phi_A)$. Згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ $\delta\in\boldsymbol{F}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{F}(\Delta_A)$, звідки $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\cap\boldsymbol{F}(\Delta_A)\neq\varnothing$. Це заперечує $\Gamma\models_{Cl}\Delta$.

Розглянемо теореми повноти числень *QL*, *QEqL*, *QR*, *QEqR*, *QLR*, *QEqLR* для відношень $\models_{\boldsymbol{T}}$, $\models_{\boldsymbol{F}}$ та $\models_{\boldsymbol{TF}}$. Зробимо певні зауваження щодо вибору числень та контрмоделей.

У загальному випадку логіки однозначних предикатів:

– формалізуємо $|=_{\boldsymbol{T}}$ численням *QL* та беремо *T*-контрмодель;

– формалізуємо $|=_{\boldsymbol{F}}$ численням *QR* та беремо *F*-контрмодель.

Для логіки однозначних еквітонних предикатів:

– формалізуємо $|=_{\boldsymbol{T}}$ численням *QEqL* та беремо *T*-контрмодель;

– формалізуємо $|=_{\boldsymbol{F}}$ численням *QEqR* та беремо *F*-контрмодель.

Зауважимо, що для *T*-контрмоделі $\delta$ невиконання умови HCL, тобто наявність формули $\Phi$ такої, що ${\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}$ та ${\vdash}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, дає $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та $\delta\in\boldsymbol{T}(\neg\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$, звідки маємо неоднозначність $\Phi_A$. Для *F*-контрмоделі $\eta$ невиконання умови HCR, тобто наявність $\Phi$ такої, що ${\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}$ та ${\dashv}\neg\Phi\in\boldsymbol{H}$, дає $\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\neg\Phi_B)=\boldsymbol{T}(\Phi_B)$, звідки маємо неоднозначність $\Phi_B$.

**Теорема 6**. Нехай $\Gamma|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$. Тоді секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QL*.

Припустимо супротивне: $\Gamma|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$ та ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *L*-модельна. Тоді ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Згідно з теоремою 3 існує *T*-контрмодель $(\boldsymbol{A},\delta)$ така: ${\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та ${\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$. Згідно з ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Delta_A)$, звідки невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$.

**Теорема 7**. Нехай $\Gamma|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$. Тоді секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QEqL*.

Припустимо супротивне: $\Gamma|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$ та ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна, то в дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *EqL*-модельна. Тоді ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Далі доводимо так, як в теоремі 6.

**Теорема 8**. Нехай $\Gamma|=_{\boldsymbol{F}}\Delta$. Тоді секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QR*.

Припустимо супротивне: $\Gamma|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$ та ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *R*-модельна. Тоді ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Згідно з теоремою 3 існує *F*-контрмодель $(\boldsymbol{B},\eta)$ така: ${\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та ${\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$. Згідно з ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\Delta_B)$, звідки невірно $\boldsymbol{F}(\Delta_B)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma|=_{\boldsymbol{F}}\Delta$.

**Теорема 9**. Нехай $\Gamma|=_{\boldsymbol{F}}\Delta$. Тоді секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QEqR*.

Припустимо супротивне: $\Gamma|=_{\boldsymbol{F}}\Delta$ та ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *EqR*-модельна. Тоді ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Далі доводимо так, як в теоремі 8.

Для вибору *T*-контрмоделі чи *F*-контрмоделі в *QLR*-численні чи *QEqLR*-численні беремо до уваги наступні обставини.

Якщо при виконанні HCLR не виконується HCL (тоді маємо HCR), то для *T*-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, тому беремо *F*-контрмодель.

Якщо при виконанні HCLR не виконується HCR (тоді маємо HCL), то для *F*-контрмоделі отримуємо неоднозначний предикат, тому беремо *T*-контрмодель.

Якщо виконуються HCL та HCR, то можна брати як *T*-контрмодель, так і *F*-контрмодель.

**Теорема 10**. Нехай $\Gamma|=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$. Тоді секвенція ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ вивідна в численні *QLR*.

Припустимо супротивне: $\Gamma|=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$ та ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma={\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta$ невивідна, то в секвенційному дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *LR*-модельна. Тоді ${\vdash}\Gamma{\dashv}\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Згідно з теоремою 3 існують *T*-контрмодель $(\boldsymbol{A},\delta)$ та *F*-контрмодель $(\boldsymbol{B},\eta)$ такі: ${\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$ та ${\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\delta\notin\boldsymbol{T}(\Phi_A)$; ${\vdash}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$ та ${\dashv}\Phi\in\boldsymbol{H}\Rightarrow\eta\in\boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Для $T$-контрмоделі згідно з $\llcorner\Gamma\lrcorner\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\delta\in\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Psi_A)$. Звідси $\delta\in\boldsymbol{T}(\Gamma_A)$ та $\delta\notin\boldsymbol{T}(\Delta_A)$, звідки невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma_A)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta_A)$.

Це заперечує $\Gamma_{\boldsymbol{A}}|=_{\boldsymbol{T}}\Delta$, тому й заперечує $\Gamma|=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$.

Для $F$-контрмоделі згідно з $\llcorner\Gamma\lrcorner\Delta \subseteq \boldsymbol{H}$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Phi_B)$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\eta\in\boldsymbol{F}(\Psi_B)$. Звідси $\eta\notin\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$ та $\eta\in\boldsymbol{F}(\Delta_B)$, звідки невірно $\boldsymbol{F}(\Delta_B)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma_{\boldsymbol{B}}|=_{\boldsymbol{F}}\Delta$, тому й заперечує $\Gamma|=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$.

**Теорема 11**. Нехай $\Gamma|=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$. Тоді секвенція $\llcorner\Gamma\lrcorner\Delta$ вивідна в численні *QEqLR*.

Припустимо супротивне: $\Gamma|=_{\boldsymbol{TF}}\Delta$ та $\llcorner\Gamma\lrcorner\Delta$ невивідна. Якщо $\Sigma = \llcorner\Gamma\lrcorner\Delta$ невивідна, то в дереві для $\Sigma$ існує незамкнений шлях. Згідно з теоремою 2, множина $\boldsymbol{H}$ усіх специфікованих формул секвенцій цього шляху – *EqLR*-модельна. Тоді $\llcorner\Gamma\lrcorner\Delta\subseteq\boldsymbol{H}$.

Далі доводимо так, як в теоремі 10.

## Висновки

На основі властивостей відношень логічного наслідку для першопорядкових композиційно-номінативних логік однозначних квазіарних предикатів кванторного рівня побудовано числення секвенційного типу. Такі числення збудовано як для логік еквітонних, так і для загального випадку логік однозначних квазіарних предикатів. Для пропонованих числень наведено базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій, описано процедуру побудови секвенційного дерева, визначено поняття модельної множини. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

В наступній роботі планується побудова числень секвенційного типу для першопорядкових композиційно-номінативних логік тотальних неоднозначних та частко-
UDC 004.42:510.69
вих неоднозначних квазіарних предикатів.


1. *Никитченко Н.С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблеми програмування. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
2. *Шкільняк С.С.* Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках // Проблеми програмування. – 2010. – № 1. – С. 15–38.
3. *Шкильняк С.С.* Логики квазиарных предика тов первого порядка // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6 – С. 32–49.
4. *Шкільняк С.С.* Спеціальні відношення логічного наслідку в логіках квазіарних предикатів // Проблеми програмування. – 2011. – № 4. – С. 36–48.
5. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия – М., 1996. – 304 с.
6. *Нікітченко М.С.*, *Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
7. *Клини С.* Математическая логика. – М., 1973. – 480 с.


Отримано 14.07.2011


***Про автора:***

*Шкільняк Степан Степанович*,
доктор фізико-математичних наук,
доцент кафедри теорії та технології програмування.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259-0519, (044) 522-0640 (д)
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua