

ПРО ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В СИСТЕМІ “ХИЖАК-ЖЕРТВА”

С.В. Пашко

Розглядається система диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерри з двома змінними керування. Описано оптимальне керування, яке забезпечує перехід до стаціонарної точки за мінімальний час. Знайдено також оптимальне керування в граничному випадку, за умови, що фазові траєкторії лежать поблизу стаціонарної точки. Побудовано оптимальні траєкторії руху у фазовому просторі, що мають вигляд спіралей.

Ключові слова: оптимальне керування, мінімальний час, стаціонарна точка.

Рассматривается система дифференциальных уравнений Лотки-Вольтерры с двумя переменными управления. Описано оптимальное управление, обеспечивающее переход к стационарной точке за минимальное время. Найдено также оптимальное управление в предельном случае, при условии, что фазовые траектории расположены вблизи стационарной точки. Построены оптимальные траектории движения в фазовом пространстве, имеющие вид спиралей.

Ключевые слова: оптимальное управление, минимальное время, стационарная точка.

We consider the system of Lotka-Volterra differential equations with two control variables and describe an optimal control, which provides a transition to a stationary point in a minimum time. We also found an optimal control for the limit case, on condition that the phase trajectories are located near a stationary point. Optimal trajectories of motion in the phase space are constructed; they look like spirals.

Key words: optimal control, minimum time, stationary point.

Вступ

Математики Альфред Джеймс Лотка та Віто Вольтерра запропонували модель взаємодії двох популяцій типу “хижак-жертва”, що являє собою систему двох звичайних лінійних диференціальних рівнянь з двома невідомими та має вигляд

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\alpha - \beta x_2)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \gamma)x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

де величини $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ означають кількості жертв і хижаків у момент часу t відповідно, а додатні числа $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ є параметрами моделі. Вважається, що $t \geq 0$ та початкові значення задовольняють співвідношенням $x_1(0) > 0$, $x_2(0) > 0$. За таких умов точка $(x_1(t), x_2(t))$, де функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$ задовольняють (1), рухається вздовж замкнутої кривої проти годинникової стрілки навколо стаціонарної точки $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ і виконуються нерівності $x_1(t) > 0$, $x_2(t) > 0$, $t \geq 0$. Подібні моделі застосовуються в біології, медицині, економіці.

Керовані динамічні системи типу “хижак-жертва” вивчалися в ряді робіт. В роботі [1] система Лотки-Вольтерри з двома змінними керування використовується для мінімізації витрат сільськогосподарського підприємства, що пов'язані з внесенням пестицидів та з іншими способами впливу на систему. В роботі [2] досліджується система “хижак-жертва” більш загального типу з двома змінними керування. Розв'язується задача про оптимальну швидкодію, доведено теореми про керованість та про існування оптимального керування, однак за умов, що не виконуються для моделі Лотки-Вольтерри. В [3] побудовано оптимальне керування для системи Лотки-Вольтерри з однією змінною керування, яка визначає ступінь сепарації популяцій. В статтях [4–7] також розв'язуються задачі оптимального керування системами “хижак-жертва” з однією змінною керування.

В даній роботі розглядається керована система Лотки-Вольтерри

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (\alpha - \beta x_2 + u_1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= (\delta x_1 - \gamma + u_2)x_2, \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0,\end{aligned}\tag{2}$$

де $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t)$ – змінні керування, $t \geq 0$, $\bar{u}_1 < 0, \bar{u}_2 < 0$ – константи. Використовуючи принцип максимуму Понтрягіна, розшукується керування, що за мінімальний час переводить задану фазову точку $x_1(0) > 0, x_2(0) > 0$ в точку $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$, яка є стаціонарною для системи (1).

1. Оптимальне керування в граничному випадку

Позначимо $\bar{x}_1 = \frac{\gamma}{\delta}, \bar{x}_2 = \frac{\alpha}{\beta}$; тоді (\bar{x}_1, \bar{x}_2) – стаціонарна точка системи (1). Нехай $x_i(t) = \bar{x}_i + \tilde{x}_i(t)$, $i = 1, 2$. Із співвідношень (2) випливає

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (\alpha - \beta(\bar{x}_2 + \tilde{x}_2) + u_1)(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1) = (-\beta\tilde{x}_2 + u_1)(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1), \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= (\delta(\bar{x}_1 + \tilde{x}_1) - \gamma + u_2)(\bar{x}_2 + \tilde{x}_2) = (\delta\tilde{x}_1 + u_2)(\bar{x}_2 + \tilde{x}_2), \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Якщо величини \tilde{x}_i досить малі у порівнянні з величинами \bar{x}_i , то з останньої системи випливає, що з високою точністю виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= (-\beta\tilde{x}_2 + u_1)\bar{x}_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= (\delta\tilde{x}_1 + u_2)\bar{x}_2;\end{aligned}$$

приходимо до системи

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -\frac{\beta\gamma}{\delta}\tilde{x}_2 + \frac{\gamma}{\delta}u_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \frac{\alpha\delta}{\beta}\tilde{x}_1 + \frac{\alpha}{\beta}u_2, \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Позначаючи $a = \frac{\beta\gamma}{\delta}, b = \frac{\alpha\delta}{\beta}, \tilde{u}_1 = \frac{\gamma}{\delta}u_1, \tilde{u}_2 = \frac{\alpha}{\beta}u_2, \bar{\tilde{u}}_1 = \frac{\gamma}{\delta}\bar{u}_1, \bar{\tilde{u}}_2 = \frac{\alpha}{\beta}\bar{u}_2$, отримуємо

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1 &= -a\tilde{x}_2 + \tilde{u}_1, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= b\tilde{x}_1 + \tilde{u}_2, \\ \bar{\tilde{u}}_i &\leq \tilde{u}_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Виконавши заміну змінних $\tilde{x}_1 = \sqrt{a}y_1, \tilde{x}_2 = \sqrt{b}y_2$, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -ky_2 + \tilde{u}_1/\sqrt{a}, \\ \dot{y}_2 &= ky_1 + \tilde{u}_2/\sqrt{b},\end{aligned}$$

де $k = \sqrt{ab}$. Нехай $t = t_1/k, z_i(t_1) = y_i(t_1/k), v_i(t_1) = \tilde{u}_i(t_1/k), i = 1, 2$. Маємо

$$\frac{d}{dt_1} z_1(t_1) = \frac{d}{dt_1} y_1\left(\frac{t_1}{k}\right) = \frac{1}{k} \frac{d}{dt} y_1(t) = -y_2(t) + \frac{\tilde{u}_1(t)}{k\sqrt{a}} = -z_2(t_1) + \frac{v_1(t_1)}{a\sqrt{b}},$$

$$\frac{d}{dt_1} z_2(t_1) = \frac{d}{dt_1} y_2\left(\frac{t_1}{k}\right) = \frac{1}{k} \frac{d}{dt} y_2(t) = y_1(t) + \frac{\tilde{u}_2(t)}{k\sqrt{b}} = z_1(t_1) + \frac{v_2(t_1)}{b\sqrt{a}};$$

отже, справедлива система

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -z_2 + w_1, \\ \dot{z}_2 &= z_1 + w_2, \\ \frac{\bar{u}_1}{a\sqrt{b}} \leq w_1(t) \leq 0, \quad \frac{\bar{u}_2}{b\sqrt{a}} \leq w_2(t) \leq 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

де $w_1 = \frac{v_1}{a\sqrt{b}}, w_2 = \frac{v_2}{b\sqrt{a}}$.

Із сказаного випливає, що, не обмежуючи загальності, досить розглянути систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u_2, \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

де \bar{u}_1, \bar{u}_2 – константи. В даному розділі розв’язується задача про оптимальну швидкодію для системи (3), тобто будується керування $U(t) = (u_1(t), u_2(t))$, що за мінімальний час переводить задану фазову точку у початок координат. Використовується принцип максимуму Понтрягіна, а також прийоми розв’язання подібних задач, розвинуті в [8].

Для того, щоб використати принцип максимуму Понтрягіна, розглянемо функцію H

$$H = \psi_1(-x_2 + u_1) + \psi_2(x_1 + u_2)$$

та систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= -\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1, \end{aligned}$$

розв’язок якої визначається формулами

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \rho \cos(t + \varphi), \\ \psi_2(t) &= \rho \sin(t + \varphi), \end{aligned} \tag{4}$$

де ρ та φ – константи, $\rho > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Згідно з принципом максимуму [8], оптимальне керування $U(t)$ задовольняє умові

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = \sup_{V \in G} H(\Psi(t), X(t), V),$$

де $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)), X(t) = (x_1(t), x_2(t)), V = (v_1, v_2), G = \{(v_1, v_2) : \bar{u}_1 \leq v_1 \leq 0, \bar{u}_2 \leq v_2 \leq 0\}$, звідки виводимо

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \cos(t + \varphi) \geq 0, \\ u_1 &= \bar{u}_1 \quad \text{якщо} \quad \cos(t + \varphi) < 0, \\ u_2 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \sin(t + \varphi) \geq 0, \\ u_2 &= \bar{u}_2 \quad \text{якщо} \quad \sin(t + \varphi) < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отже, оптимальні керування $u_1(t), u_2(t)$ є кусково-постійними функціями та можуть приймати значення $0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$.

У випадку постійних u_1 та u_2 розв’язок системи рівнянь (3) визначається формулами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \rho_1 \cos(t + \varphi_1) - u_2, \\ x_2(t) &= \rho_1 \sin(t + \varphi_1) + u_1, \end{aligned} \tag{6}$$

де ρ_1 та φ_1 – константи, $\rho_1 > 0, 0 \leq \varphi_1 < 2\pi$. Формули (6) описують коло з центром у точці $(-u_2, u_1)$. З (6) випливає, що частини фазових траєкторій, які відповідають відрізкам часу, на яких u_1 та u_2 приймають постійні значення, являють собою дуги кіл з центрами в $(-u_2, u_1)$. За умови оптимальності вектор $(-u_2, u_1)$ може приймати одне з чотирьох значень $O = (0, 0)$, $A = (0, \bar{u}_1)$, $B = (-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$, $C = (-\bar{u}_2, 0)$. Точки O, A, B, C є центрами кіл, на яких лежать оптимальні фазові траєкторії $X(t)$.

Формули (4) та (6) показують, що рух точок $\Psi(t), X(t)$ відбувається вздовж кіл проти годинникової стрілки з постійною швидкістю, яка становить один оберт за час 2π . З (5) випливає, що в моменти $t = -\varphi + k\pi/2$, де k – ціле число, одна з керуючих величин u_1, u_2 змінює своє значення. У кожний такий момент відбувається зміна кола, вздовж якого рухається фазова точка $X(t)$. Між двома моментами зміни керування фазова точка описує дугу кола з центральним кутом $\pi/2$; перша та остання дуги фазової траєкторії можуть мати менші центральні кути. Очевидно, центри кіл, тобто точки O, A, B, C , з часом змінюються у наступному порядку:

$$\dots, O, A, B, C, O, A, B, C, O, \dots \tag{7}$$

На рис. 1 показано частину оптимальних фазових траєкторій. Якщо керування оптимальні, перед моментом потрапляння в початок координат O фазова точка $X(t)$ рухається по одній з трьох дуг OD, OF або OG з постійною швидкістю проти годинникової стрілки. Дуги OD, OF, OG мають центри відповідно C, B, A та центральні кути $\pi/2$, але фазова точка може описати менший кут, якщо рух по дузі починається не з крайньої точки (наприклад, з точки H дуги OD , рис. 1). Якщо перед потраплянням у точку O рух відбувався по дузі OD , то перед потраплянням на дугу OD рух відбувався по дузі з центром у точці B . Отже, у криволінійному чотирикутнику $ODEF$ рух відбувається по дугам з центром B . Дуга FE утворена поворотом дуги OD навколо точки B на кут $\pi/2$ за годинниковою стрілкою.

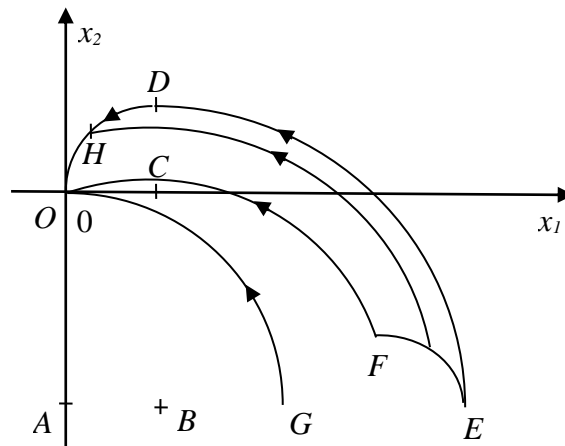


Рис. 1. Побудова оптимальних траєкторій

Якщо фазова точка перетинає дугу FE , то перед моментом потрапляння на цю дугу вона рухається по дузі з центром у точці A . Отже, можна збудувати нову частину оптимальної траєкторії, яка лежить на дузі з центром в A та з центральним кутом $\pi/2$. Множина таких дуг утворює криволінійний чотирикутник, що прилягає до криволінійного чотирикутника $ODEF$ вздовж дуги FE . Продовжуючи, можна збудувати всі оптимальні траєкторії, що приводять у початок координат, проходячи на останньому етапі через дугу OD . Аналогічно можна побудувати всі оптимальні траєкторії, що приводять у початок координат, проходячи на останньому етапі через дуги OF та OG . В результаті будуть побудовані всі оптимальні траєкторії, через кожену точку площини буде проходити одна траєкторія.

На рис. 2 показані оптимальні траєкторії. Якщо фазова точка $X(t)$ не належить кривим $OK_1K_2\dots, OL_1L_2\dots, OM_1M_2\dots, ON_1N_2\dots$, оптимальні керування зберігають постійні значення. Нехай Q_1 – частина площини, що лежить справа від кривої $OM_1M_2\dots$ та вище кривої $ON_1N_2\dots$, Q_2 – частина площини, що лежить зліва від кривої $OM_1M_2\dots$ та вище кривої $OL_1L_2\dots$, Q_3 – частина площини, що лежить зліва від

кривої $OK_1K_2\dots$ та нижче кривої $OL_1L_2\dots$, Q_4 – частина площини, що лежить справа від кривої $OK_1K_2\dots$ та нижче кривої $ON_1N_2\dots$ (рис. 2). Якщо фазова точка, рухаючись оптимально, перетинає одну із згаданих кривих, переходячи з області Q_i в область Q_j , оптимальні значення величин u_1, u_2 змінюються. В областях Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 оптимальні значення змінних керування становлять відповідно $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = \bar{u}_2$; $u_1 = 0, u_2 = \bar{u}_2$; $u_1 = 0, u_2 = 0$; $u_1 = \bar{u}_1, u_2 = 0$. Під час руху в областях Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 фазова точка описує дуги кіл з центрами в точках B, C, O, A відповідно.

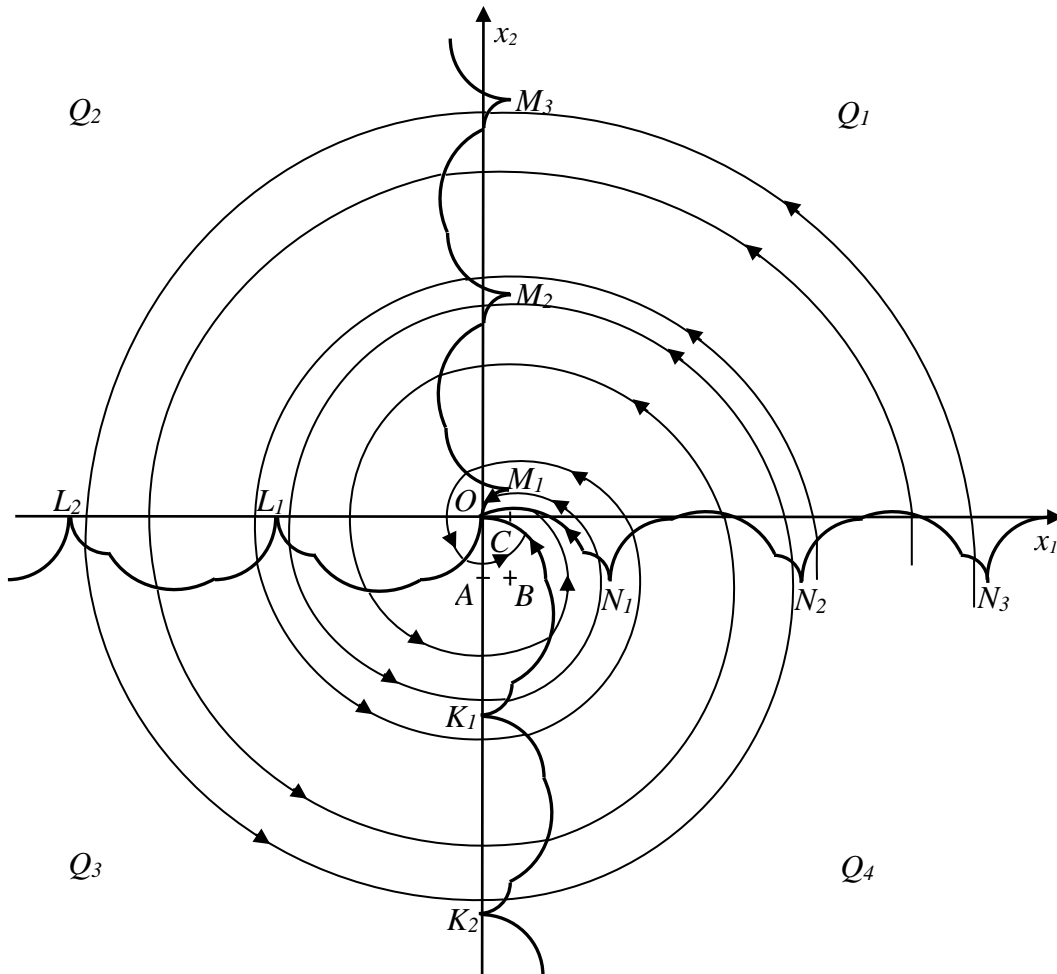


Рис. 2. Оптимальні траєкторії в граничному випадку

Крива $OK_1K_2\dots$ складається з конгруентних криволінійних відрізків $OK_1, K_1K_2, K_2K_3, \dots$. Відрізок K_1K_2 утворюється шляхом зсуву відрізка OK_1 вниз на величину $2|u_1 + u_2|$, відрізок K_2K_3 утворюється шляхом зсуву відрізка K_1K_2 вниз на величину $2|u_1 + u_2|$ і т. д. Відрізок кривої OK_1 складається з трьох дуг, кожна з яких має центральний кут $\pi/2$. Перша дуга має центр $(0, \bar{u}_1)$ та крайні точки $(0, 0)$ і $(-\bar{u}_1, \bar{u}_1)$. Центр другої дуги знаходиться в точці $(0, \bar{u}_1 + \bar{u}_2)$, ця дуга має крайні точки $(-\bar{u}_1, \bar{u}_1)$ та $(-\bar{u}_2, 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$. Центр третьої дуги знаходиться в точці $(0, 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$, ця дуга має крайні точки $(-\bar{u}_2, 2\bar{u}_1 + \bar{u}_2)$ та $(0, 2(\bar{u}_1 + \bar{u}_2))$.

Крива $OL_1L_2\dots$ утворюється шляхом повороту кривої $OK_1K_2\dots$ на кут $-\pi/2$. Крива $M_1M_2\dots$ утворюється шляхом повороту кривої $OL_1L_2\dots$ на кут $-\pi/2$, зсуву вгору на величину $|\bar{u}_2|$ та зсуву вправо на величину $|\bar{u}_2|$. Дуга OM_1 має центральний кут $\pi/2$, радіус $|\bar{u}_2|$ та центр у точці $(-\bar{u}_2, 0)$. Крива $N_1N_2\dots$ утворюється шляхом повороту кривої $M_1M_2\dots$ на кут $-\pi/2$, зсуву вниз на величину $|\bar{u}_2|$ та зсуву вправо на величину $|u_1 + u_2|$. Криволінійний відрізок ON_1 складається з двох дуг, кожна з яких має центральний кут

$\pi/2$. Перша дуга має центр $(-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$ та крайні точки $(0,0)$ і $(-\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{u}_2)$. Центр другої дуги знаходиться в точці $(-\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{u}_1)$, ця дуга має крайні точки $(-\bar{u}_1 - \bar{u}_2, \bar{u}_2)$ та $(-\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2, 2\bar{u}_2)$.

Для лінійних керованих систем принцип максимуму є не тільки необхідною, але й достатньою умовою оптимальності [8], тому побудоване керування оптимальне.

2. Оптимальне керування в загальному випадку

Розглянемо керовану систему Лотки-Вольтерри в загальному випадку. Виконуючи заміну змінних $x_1 = \delta y_1 - \gamma$, $x_2 = \beta y_2 - \alpha$ в системі

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma), \\ \dot{x}_2 &= (x_1 + u_2)(x_2 + \alpha), \\ \bar{u}_i &\leq u_i(t) \leq 0, \quad i=1,2, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

отримуємо систему (2), тому в даному розділі розв'язується задача про мінімальний час переходу до початку координат для системи (8). Початкові значення повинні задовольняти умовам $x_1(0) > -\gamma$, $x_2(0) > -\alpha$; вважаємо також, що виконується нерівність $\alpha + \bar{u}_1 > 0$.

Інтегруючи систему диференціальних рівнянь (8) за умови, що величини u_1 та u_2 приймають постійні значення, отримуємо співвідношення

$$e^{-x_1} (x_1 + \gamma)^{\gamma - u_2} e^{-x_2} (x_2 + \alpha)^{\alpha + u_1} = C, \quad (9)$$

аналіз якого показує, що фазові криві системи (8) замкнуті [9]; тут $C > 0$ - величина, що не залежить від часу. За умови постійності u_1 та u_2 точка $(x_1(t), x_2(t))$, де функції $x_1(t)$ та $x_2(t)$ задовольняють (8), рухається вздовж замкнутої кривої проти годинникової стрілки навколо стаціонарної точки $(-u_2, u_1)$ і виконуються нерівності $x_1(t) > -\gamma$, $x_2(t) > -\alpha$, $t \geq 0$.

Для того, щоб використати принцип максимуму, розглянемо функцію H

$$H = -\psi_1(x_2 - u_1)(x_1 + \gamma) + \psi_2(x_1 + u_2)(x_2 + \alpha)$$

та систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= (x_2 - u_1)\psi_1 - (x_2 + \alpha)\psi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= (x_1 + \gamma)\psi_1 - (x_1 + u_2)\psi_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Як і в попередньому розділі, оптимальне керування $U(t)$ повинно задовольняти умові

$$H(\Psi(t), X(t), U(t)) = \sup_{V \in G} H(\Psi(t), X(t), V),$$

звідки виводимо

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \psi_1(t) \geq 0, \\ u_1 &= \bar{u}_1 \quad \text{якщо} \quad \psi_1(t) < 0, \\ u_2 &= 0 \quad \text{якщо} \quad \psi_2(t) \geq 0, \\ u_2 &= \bar{u}_2 \quad \text{якщо} \quad \psi_2(t) < 0. \end{aligned}$$

Оптимальні керування $u_1(t), u_2(t)$ є кусково-постійними функціями та можуть приймати значення $0, \bar{u}_1, \bar{u}_2$.

Частина фазової траєкторії, що відповідає відрізку часу, на якому величини u_1 та u_2 приймають постійні значення, являє собою частину кривої (9) зі стаціонарною точкою $(-u_2, u_1)$. За умови оптимальності

вектор $(-u_2, u_1)$ може приймати одне з чотирьох значень $O=(0,0)$, $A=(0, \bar{u}_1)$, $B=(-\bar{u}_2, \bar{u}_1)$, $C=(-\bar{u}_2, 0)$. Легко довести, що нетривіальний розв'язок $\Psi(t)$ системи (10) перетинає по черзі перший, другий, третій та четвертий квадранти, тому точки O, A, B, C з часом змінюються у порядку (7).

На рис. 3 зображено оптимальні траєкторії руху, побудова яких принципово не відрізняється від побудови у граничному випадку. Тонкими лініями зображено оптимальні траєкторії, товстими – лінії перемикання, пунктирними – криволінійні відрізки, що одночасно є лініями перемикання та траєкторіями. Фазова точка може потрапити у початок координат, рухаючись на останньому етапі вздовж одного з трьох криволінійних пунктирних відрізків, кожний з яких описується рівнянням (9). Верхній пунктирний відрізок відповідає керуванню $u_1=0, u_2=\bar{u}_2$; середній – керуванню $u_1=\bar{u}_1, u_2=\bar{u}_2$; нижній – керуванню $u_1=\bar{u}_1, u_2=0$. Початкові точки цих відрізків легко знайти, використовуючи числовий метод розв'язання системи рівнянь (8), (10). Згідно з (7), якщо перед потраплянням у початок координат рух відбувався вздовж верхнього пунктирного відрізка, то перед потраплянням на цей відрізок фазова точка рухалася вздовж частини кривої (9) за умов $u_1=\bar{u}_1, u_2=\bar{u}_2$; початкову точку цієї частини можна знайти, використовуючи числовий метод розв'язання системи (8), (10). Продовжуючи, збудуємо оптимальну траєкторію, що веде у початок координат через фіксовану точку верхнього пунктирного відрізка. Виконуючи таку побудову для всіх точок трьох пунктирних відрізків, отримуємо всі оптимальні траєкторії. Вони заповнюють всю множину $Q=\{x_1 > -\gamma, x_2 > -\alpha\}$; через кожен точку цієї множини, відмінну від початку координат, проходить єдина оптимальна траєкторія. Лінії перемикання розбивають множину Q на чотири області. Оптимальні значення змінних керування u_1, u_2 становлять відповідно: у верхній правій області \bar{u}_1, \bar{u}_2 ; у верхній лівій області $0, \bar{u}_2$; у нижній лівій області $0, 0$; у нижній правій області $\bar{u}_1, 0$. Оптимальні траєкторії системи (8), зображені на рис. 3, розраховані за умов $\alpha=8, \gamma=10, \bar{u}_1=-1.5, \bar{u}_2=-0.7$.

Зауважимо, що принцип максимуму є необхідною умовою оптимальності, тобто його справедливості в загальному випадку не гарантує оптимальності. Але можна довести, що для побудованих керувань та траєкторій виконуються умови регулярного синтезу [10], звідки випливає їхня оптимальність. Також легко довести, що оптимальні керування є кусково-постійними функціями від часу.

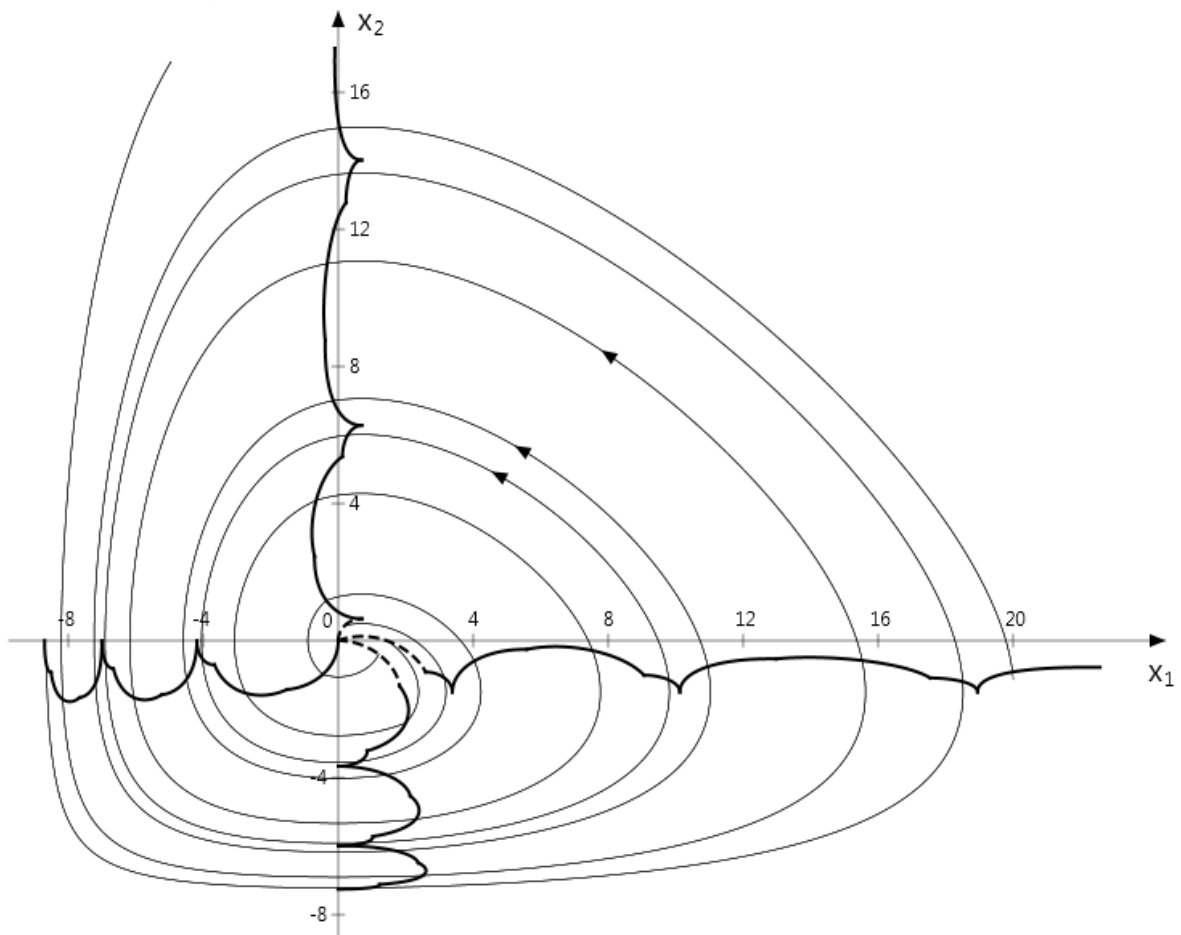


Рис. 3. Оптимальні траєкторії керованої системи Лотки-Вольтерри

Висновки

В роботі розглянуто задачу про оптимальну швидкість для керованої системи диференціальних рівнянь Лотки-Вольтерри. Вимагається мінімізувати час переходу до стаціонарної точки, яка в результаті заміни змінних перетворюється на початок координат. Для всіх допустимих початкових значень побудовано оптимальне керування та оптимальну траєкторію руху у фазовому просторі. Оптимальні керування являють собою кусково-постійні функції від часу, а оптимальні траєкторії мають вигляд спіралей, що ведуть до початку координат.

Література

1. Vincent, Thomas L. Pest management programs via optimal control theory. *Biometrics*. 1975. 31. P. 1–10.
2. Albrecht, Felix, et al. On the control of certain interacting populations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1976. 53.3. P. 578–603.
3. Yosida, Setuzô. An optimal control problem of the prey-predator system. *Funck. Ekvacioj*. 1982. 25. P. 283–293.
4. Колмановский В.Б., Спивак А.К. Об управлении по быстрдействию системой «хищник–жертва». *Прикладная математика и механика*. 1990. 54.3. С. 502–506.
5. Михайлова Е.В. Оптимальное управление в системе Лотки–Вольтерры «хищник–жертва». Труды 3-й Всерос. науч. конф., 29–31 мая 2006 г. *Математическое моделирование и краевые задачи*. 2006. С. 123–126.
6. Apreutesei, Narcisa C. An optimal control problem for a prey–predator system with a general functional response. *Applied mathematics letters*. 2009. 22.7. P. 1062–1065.
7. Sadiq, AL-Nassir. The Dynamics and Optimal Control of a Prey-Predator System. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. 13.9. P. 5287–5298.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука. 1969. 384 с.
9. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Ижевская республиканская типография. 2000. 367 с.
10. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука. 1969. 408 с.

References

1. Vincent, Thomas L. Pest management programs via optimal control theory. *Biometrics*. 1975. 31. P. 1–10.
2. Albrecht, Felix, et al. On the control of certain interacting populations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1976. 53.3. P. 578–603.
3. Yosida, Setuzô. An optimal control problem of the prey-predator system. *Funck. Ekvacioj*. 1982. 25. P. 283–293.
4. Kolmanovskii V.B., Spivak A.K. On the performance management of the predator – prey system. *Applied mathematics and mechanics*. 1990. 54.3. P. 502–506. (in Russian).
5. Mihailova E.V. Optimal control in the Lotka – Volterra system “predator – prey”. *Mathematical modeling and boundary value problems*. 2006. P. 123–126. (in Russian).
6. Apreutesei, Narcisa C. An optimal control problem for a prey–predator system with a general functional response. *Applied mathematics letters*. 2009. 22.7. P. 1062–1065.
7. Sadiq, AL-Nassir. The Dynamics and Optimal Control of a Prey-Predator System. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2017. 13.9. P. 5287–5298.
8. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. The mathematical theory of optimal processes. Moscow: Nauka. 1969. (in Russian).
9. Arnold V.I. Ordinary differential equations. Izhevsk: Izhevsk Republican Printing House. 2000. (in Russian).
10. Boltyanskii V.G. Mathematical methods of optimal control. Moscow: Nauka. 1969. (in Russian).

Одержано 28.02.2020

Про автора:

Пашко Сергій Володимирович,

доктор фізико-математичних наук, провідний науковий співробітник.

Кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 30.

Кількість наукових публікацій в зарубіжних виданнях – 2.

Індекс Гірша в SCOPUS – 3.

<http://orcid.org/0000-0002-0453-4128>.

Місце роботи автора:

Інститут програмних систем

НАН України,

03187, Київ-187,

проспект Академіка Глушкова, 40.

Факс: (38)(044) 526-62-63

Тел.: (38)(044) 526 60 25, 068-385-34-66(моб.)

E-mail: pashko55@yahoo.com