УДК 004.652, 539.3

Б.Е. Панченко

ВЫСОКОТОЧНОЕ КЛАСТЕРНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН СДВИГА НА СИСТЕМЕ ОТВЕРСТИЙ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ЗАЩЕМЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

Предложен параллельный алгоритм численного решения стационарной динамической задачи теории упругости о взаимодействии SH-волн с системой отверстий произвольного поперечного сечения, находящейся в полупространстве с защемленной границей. Краевая задача сведена к системе интегральных уравнений, которая решается численно. Схема параллельных вычислений позволила исследовать ситуации с большим числом отражающих отверстий. Приведены новые численные результаты.

Введение

Анализ взаимодействия стационарных волн перемещений и напряжений в упругой среде с системой отверстий [1] позволяет оценить ресурсы конструкций, содержащих большое число таких неоднородностей. Поэтому такие исследования являются актуальными. Учитывая то, что моделирование динамических взаимодействий упругих волн и систем неоднородностей требует привлечения больших объемов вычислений и значительных ресурсов цифровой памяти, особое значение приобретают эффективные параллельные алгоритмы [2]. Тем более, что такие задачи являются все еще малоисследованными.

Среди аналитических методов решения плоских и антиплоских задач теории дифракции на отражающих неоднородностях произвольной формы особую роль в разработке кластерных алгоритмов играет метод интегральных уравнений [3, 4]. Важным преимуществом этого метода является сокращение числа пространственных переменных [3]. В настоящей работе исследуется алгоритм кластерного решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, возникающего при исследовании модельной задачи дифракции волн сдвига на системе цилиндрических полостей произвольного поперечного сечения в полубесконечной среде с защемленной границей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим упругое полупространство $y \geq 0$ с защемленной границей $y = 0$, содержащее m туннельных вдоль оси Oz полостей, поперечные сечения которых ограничены замкнутыми (без общих точек) контурами L_j, $j = \overline{1,m}$ типа Ляпунова. Пусть L – совокупность указанных контуров и положительное направление выбрано так, что при движении вдоль L область D остается слева (рис. 1).

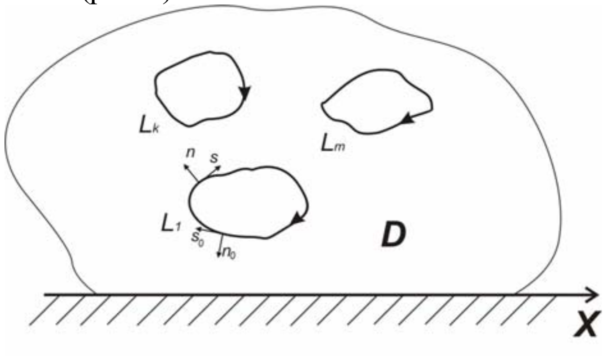


Рис. 1

Предположим, что источники внешнего поля перемещений W_0 размещены в области D. В качестве такого источника может быть набегающая на цилиндры из бесконечности монохроматическая SH-волна, нормаль к фронту которой составляет угол ψ с осью OX (τ = const),

$$W_0 = \tau e^{-i\gamma_2(x\cos\psi + y\sin\psi)},\ \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2} \qquad (1)$$

или гармонический источник интенсивности P, сосредоточенный в точке $M_0(x_0,y_0)$ и порождающий поле перемещений:

$$W_0 = -\frac{P}{\mu}\frac{1}{4i}H_0^{(1)}(\gamma_2 r),\ r = |\ z - z_0\ |,$$

$$z = x + iy,\quad z_0 = x_0 + iy_0. \qquad (2)$$

Здесь c_2 – скорость волны сдвига, ω – частота колебаний, μ – модуль сдвига, i – мнимая единица $(i^2 = -1)$, $H_n^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля первого рода n-го порядка, зависимость от времени выражается множителем $e^{-i\omega t}$.

В результате взаимодействия падающей и отраженной от границы $y = 0$ волн с отверстиями возникает дифрагированное волновое поле. Обозначим W_1 амплитуду отраженной от защемленной границы $y = 0$ волны сдвига. Тогда суммарное поле амплитуд перемещений представимо в виде $W=W_0+W_2-W_1$.

В случае набегающей из бесконечности волны сдвига (1) отраженная от границы волна имеет вид [5]:

$$W_1 = \tau e^{-i\gamma_2(x\cos\psi - y\sin\psi)},\ \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}.$$

А в случае гармонического источника (2):

$$W_1 = -\frac{P}{\mu}\frac{1}{4i}H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1),\ r_1 = |\ z - \bar{z}_0\ |,$$

$$\bar{z}_0 = x_0 - iy_0. \qquad (3)$$

Неизвестная функция W_2 должна удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца в области D с волновым числом γ_2:

$$\Delta W_2 + \gamma_2^2 W_2 = 0,\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad (4)$$

а также условием излучения на бесконечности типа Зоммерфельда [3].

На границе отверстий L нас будут интересовать касательные напряжения $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$, $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$. В случае антиплоской деформации

$$\tau_s = \mu\frac{\partial W}{\partial s},\ \tau_n = \mu\frac{\partial W}{\partial n}, \qquad (5)$$

где s – положительная касательная, n – нормаль в точке $\zeta = \xi + i\eta \in L$ (рис. 1).

Пусть $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ – точка L, в которой будем удовлетворять граничные условия. Так как L – граница отверстий, то, очевидно,

$$\frac{\partial}{\partial n_0}(W_0 - W_1 + W_2)\big|_L = 0, \qquad (6)$$

где n_0 – нормаль к L в точке $\zeta_0 \in L$.

Таким образом, задача дифракции волны сдвига (1) или (2) на системе отверстий в изотропном полупространстве с защемленной границе сводится к решению краевой задачи (4), (6) при выполнении дополнительных условий излучения на бесконечности.

2. Метод решения

Следуя [5, 6], запишем функцию $W_2(x,y)$, характеризующую рассеянную отверстиями волну перемещений в области D, следующим образом:

$$W_2(x,y) = \int_L f(s)G(x,y,\xi,\eta)ds,$$

$$G = \frac{1}{4i}\left(H_0^{(1)}(\gamma_2 r) - H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1)\right),\ r = |z - \zeta|,$$

$$r_1 = |z - \bar{\zeta}|,\ z = x + iy,\ \bar{\zeta} = \xi - i\eta. \qquad (7)$$

Здесь L – совокупность контуров $L_j,\ j = \overline{1,m}$ (рис. 1); $f(s)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая на L условию Гельдера.

Интегральное представление (7) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (4) в области D и обеспечивает выполнение условий излучения на бесконечности. Остается выполнить граничное условие (6). Для осуществления предельного перехода в (6) при $z \to \zeta_0 \in L$ частные производные $\frac{\partial W}{\partial s_0}$ и $\frac{\partial W}{\partial n_0}$ будем понимать следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial s_0}\Big|_L = \left(e^{i\varphi_0}\frac{\partial W}{\partial z} + e^{-i\varphi_0}\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}\right)_{z\to\zeta_0},$$

$$\frac{\partial W}{\partial n_0}\Big|_L = -i\left(e^{i\varphi_0}\frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\varphi_0}\frac{\partial W}{\partial \bar{z}}\right)_{z\to\zeta_0},$$

$$e^{i\varphi_0} = \frac{d\zeta_0}{ds_0}, \; \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L. \qquad (8)$$

Воспользуемся также известными соотношениями [4, 5]:

$$\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{i\alpha} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

$$H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1(\gamma r), \; z - \zeta = re^{i\alpha}, \qquad (9)$$

где $H_1(x)$ – непрерывная функция в точке $x = 0$.

Привлечение формулы Сохоцкого – Племеля [3] для вычисления предельных значений интегралов типа Коши, возникающих при удовлетворении граничного условия (6) с учетом соотношений (7) – (9), приводит к искомому интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f(s)$:

$$\frac{1}{2} f(s_0) + \int_L f(s) E(s, s_0) ds = K_n(s_0), \; n = 1,2$$

$$E(s, s_0) = \gamma_2 \Big(H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \varphi_0) - - H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \sin(\alpha_{10} - \varphi_0) \Big),$$

$$\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \; \zeta_0 - \bar{\zeta} = r_{10} e^{i\alpha_{10}},$$

$$K_1(s_0) = i\gamma_2 \big(W_0(s_0) \sin(\psi - \varphi_0) - - W_1(s_0) \sin(\psi + \varphi_0) \big),$$

$$K_2(s_0) = -\frac{P}{\mu} \gamma_2 \Big(H_1^{(1)}(\gamma_2 \rho_0) \sin(\psi_0 - \varphi_0) - - H_1^{(1)}(\gamma_2 \rho_{10}) \sin(\psi_{10} - \varphi_0) \Big),$$

$$\zeta_0 - z_0 = \rho_0 e^{i\psi_0}, \; \zeta_0 - \bar{z}_0 = \rho_{10} e^{i\psi_{10}}. \qquad (10)$$

Здесь функции $K_1(s_0)$ и $K_2(s_0)$ отвечают случаям (1) и (2) соответственно.

Представим ядро $E(s, s_0)$, учитывая (9), в виде:

$$E(s, s_0) = \frac{2}{\pi i} \mathrm{Im} \left\{ \frac{e^{i\varphi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right\} + + \gamma_2 \Big(H_1^{*}(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \varphi_0) - - H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \sin(\alpha_{10} - \varphi_0) \Big). \qquad (11)$$

Теперь нетрудно убедиться [3], что функция $E(s, s_0)$ непрерывна на L. Следовательно, интегральное уравнение (10) является уравнением Фредгольма второго рода, которое, как известно, разрешимо и имеет единственное решение в классе функций, непрерывных по Гельдеру.

3. Дискретизация задачи

Представим неизвестную плотность $f(s)$ интегрального уравнения (9) как совокупность функций $f_j(s_j)$, определенных на контурах L_j, $j = \overline{1,m}$. Тогда (10) превращается в систему интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода

$$\frac{1}{2} f_k(s_{k0}) + \sum_{j=1}^{m} \int_L f_j(s_j) E(s_j, s_{k0}) ds_j = K_n(s_{k0}),$$

$$k = \overline{1,m}, \; n = 1,2. \qquad (12)$$

Здесь дуговые координаты s_j и s_{k0} относятся к точкам $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in L_j$ и $\zeta_{k0} = \xi_{k0} + i\eta_{k0} \in L_k$ соответственно.

Численная реализация интегральных уравнений (12) проводилась методом механических квадратур [3]. Вводилась параметризация контура L_j с помощью соотношений:

$$\zeta_j = \zeta_j(\beta), \; \zeta_{j0} = \zeta_{j0}(\beta_0), \; 0 \le \beta, \beta_0 < 2\pi, \qquad (13)$$

причем $\zeta_j(0) = \zeta_j(2\pi)$. Интегральное уравнение, соответствующее контуру L_k, удовлетворялось в узлах вида $\beta_l = \pi(2l-1)/n_k$, $(l = \overline{1,n_k})$ и сводилось к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $f_j(\beta)$ в узлах вида $\beta_p = \pi(2p-1)/n_j$, $(p = \overline{1,n_j})$, где n_j – число точек разбиения контура L_j. Внеинтегральные значения $f_k(\beta_l)$ выражались с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа через искомые значения $f_k(\beta_p)$. Для нечетных n_k имеем следующие выражение [6]:

$$f_k(\beta_l) = \frac{1}{n_k} \sum_{p=1}^{n_k} (-1)^{n_k+p} f_k(\beta_p) ctg \frac{\beta_l - \beta_p}{2}. \qquad (14)$$

Таким образом, при численной реализации системы интегральных уравнений (12) задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с $N = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ неизвестными.

4. Схема вычислений

Пусть система интегральных уравнений сведена к системе линейных алгебраических уравнений, все элементы матрицы которой являются результатом дискретизации контуров. Очевидно, что размер матрицы пропорционален числу отверстий. Для исследования описанного метода при большом числе отверстий, а также для получения высокоточных результатов с погрешностью вычислений до 10^{-10} и проверки сходимости решений при большом числе точек коллокации потребуются существенные вычислительные ресурсы. Применим распараллеливание алгоритма. Из системы уравнений (12) следует, что каждый элемент матрицы определяется координатами узлов дискретизации.

Как показано на рис. 2, данный метод в вычислительном смысле сводится к обходу каждого контура по точкам коллокации внеинтегральной переменной ζ_{k0} и одновременному же обходу каждого контура по аналогичным либо иным узлам переменной интегрирования ζ_k.

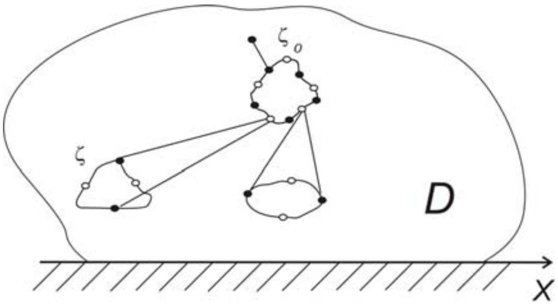


Рис. 2

Важной особенностью алгоритма такого обхода является то, что результирующая матрица формально является результатом Декартова произведения этих множеств. Это означает, что все элементы матрицы независимы один от другого, что не строго доказывает возможность применения параллельного вычисления.

Таким образом, переменная ζ_{k0} формирует строки матрицы СЛАУ, а переменная ζ_k – ее столбцы. Диагональные элементы матрицы соответствуют коэффициентам системы, вычисленным в узлах общих для ζ_{k0} и ζ_k отверстий. Иные коэффициенты вычисляются так, что значения ζ_{k0} принадлежат множеству точек коллокации с одних контуров, а значения переменных интегрирования ζ_k – с других.

Параллельно-конвейерная схема вычислений показана на рис. 3. Тут приведена пропорция интервалов времени вычислений на: синтез массивов исходных данных (время t_0 при количестве процессов P_1), синтез матрицы СЛАУ (время t_1 при количестве процессов P_1), решение СЛАУ методом Гаусса (t_2 – оптимальное время вычислений при оптимальном числе процессов P_0), синтез массивов итоговых решений (время t_3). Первый, второй и четвертый этапы макроконвейера не требуют пересылок данных, что означает независимость вычислений. На третьем этапе для решения СЛАУ существует оптимальное число процессов, определяемое спецификой матрицы. Это означает, что для 1, 2 и 4 этапов алгоритма оптимальным является число процессов, соответствующих числу коэффициентов СЛАУ. А для решения СЛАУ число оптимальных процессов значительно меньше. Такой несимметричный алгоритм поддерживает операционная система MPI-2 посредством процедуры spawn («икрометание»). Но в настоящих исследованиях кластер такой мощности не применялся.

Для алгоритма решения СЛАУ искомого интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода оптимальным числом оказалось 200 – 250 процессов при заданной точности 10^{-10}.

Рис. 3

На рис. 4 показан график зависимости общего времени кластерных вычислений массива контурных напряжений на ромбическом отверстии от числа процессов для одного варианта нагрузки. По графику видно, что весь алгоритм хорошо масштабируется и имеет условно-оптимальное число процессов.

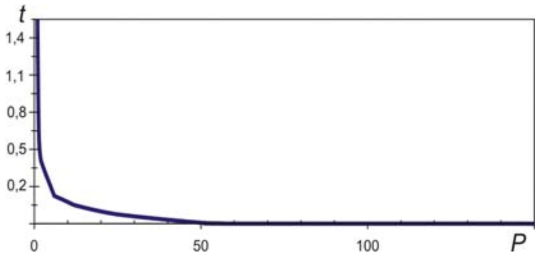


Рис. 4

Так как для данной методики решения краевой задачи основная операция при вычислении каждого элемента матрицы – это определение разностного аргумента цилиндрических функций Ханкеля, заданного на множестве значений параметрических координат отверстий, а также вычисление самих этих функций и коэффициентов при них, то на следующем шаге на каждом клоне хоста запускаются цикл процедур определения указанных коэффициентов. При этом синхронизация каждого процесса не требуется, так как итоговая матрица собирается по факту завершения последнего.

Вычислительный процесс решения СЛАУ также распараллеливается согласно [6]. Параллельное вычисление итоговых искомых характеристик осуществляется путем подстановки массивов значений неизвестных функций $f_k(\beta_p)$ в представление (7) аналогично процедурам формирования матрицы СЛАУ.

5. Численные результаты

В исследовании достигалась точность вычислений порядка 10^{-10}. Такая точность обеспечена следующим: высокая сходимость самого алгоритма, разрешающая способность компиляторов языков высокого уровня и разрешающая способность операционных сред. Метод интегральных уравнений обеспечивает быструю сходимость решения, а также функциональную зависимость стабилизации знаков результирующих данных от увеличения числа точек коллокации. Для описанных задач достаточно 2500–3000 точек коллокации каждого контура для вычисления контурных напряжений с указанной точностью – 10^{-10}.

С целью исследования сходимости построенного алгоритма рассмотрим случай нормального падения ($\psi = \pi/2$) волны сдвига (1) на систему эллиптических или ромбических отверстий, расположенных вдоль одной линии на одинаковом расстоянии d один от другого (рис. 5).

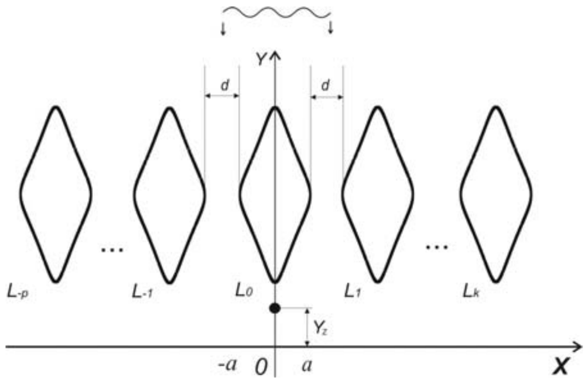


Рис. 5

Используем известные [7] параметрические уравнения для задания основного контура L_0:

$$\xi(\beta) = b\sin\beta - \nu\sin 3\beta,$$

$$\eta(\beta) = a\cos\beta + \nu\cos 3\beta, \quad 0 \le \beta \le 2\pi, \quad (15)$$

где при ν = 0.14036 контур имеет вид ромба со скругленными точками возврата. А в случае $\nu = 0$ контур имеет эллиптическую форму. Остальные контура для простоты будем располагать симметрично относительно оси Y. В этом случае рассматриваемая дифракционная задача обладает свойством симметрии, что позволяет осуществлять первичное самотестирование получаемых результатов.

В ходе численной реализации вычислялись безразмерные контурные напряжения $\sigma_\beta = \tau_s / \mu$. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях N. Проводилось также сравнение полученных результатов с результатами, приведенными в [5, 6] как для случая одиночного эллиптического отверстия, так и для бесконечной среды.

Проведено параметрическое исследование контурных напряжений на системе эллиптических или ромбических (со скруглениями) отверстий в полубесконечной среде с защемленной границей. Применение метода параллельных вычислений, проведенного на кластере «Инпарком–256», позволило исследовать сходимость до 10^{-10} порядка. Обнаружено, что сходимость решения интегрального уравнения практически не зависит от числа отражателей.

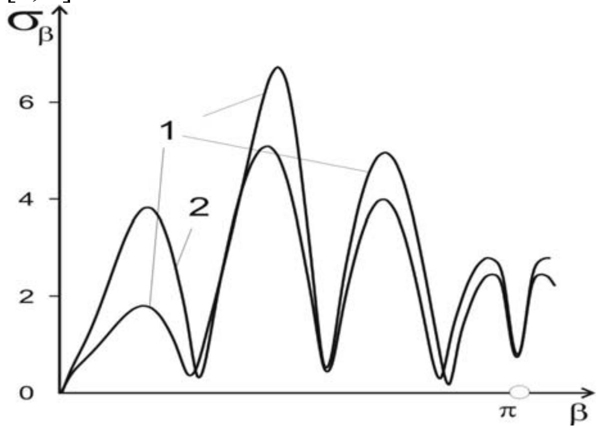
Численное исследование показало, что в полубесконечном случае с защемленной границей в системе отверстий наблюдается такой же эффект насыщения, как и в [6, 8]. При линейном и симметричном относительно нагрузки расположении отверстий вдоль границы для исследования достаточно не более 9 отверстий. Дальнейшее увеличение числа отверстий не приводит к изменению характеристик стационарного волнового поля.

Для построенного алгоритма обнаружена MIMD-пропорция, свидетельствующая лишь об условно-оптимальном числе процессов. Для системы из 3–9 отверстий условно оптимальным является 200-250 параллельных процессов, что совпадает с результатом аналогичного исследования СЛАУ [9] . Увеличение числа процессов приводит лишь к незначительному снижению суммарного времени вычислений за счет части алгоритма без пересылок, а также и к приросту вычислительных расходов на балансировку загрузки процессоров при решении СЛАУ методом Гаусса.

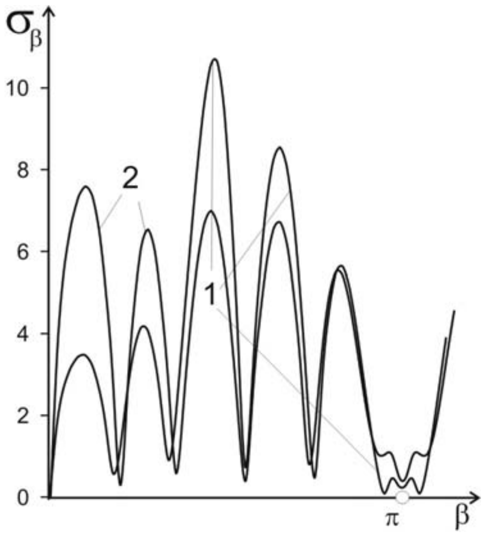
Причем при фиксированной размерности матриц СЛАУ число отверстий не влияет на оптимальное число процессов, поскольку в интегральном уравнении каждый контур отверстия является частью суммарного контура интегрирования. Поэтому при прочих равных условиях свойства систем линейных уравнений, полученных и для одного отверстия, и для девяти, не изменяются. Как и в случае [6, 8], от числа отверстий не зависит также сходимость алгоритма.

В работе проводились вычисления контурных напряжений σ_β вдоль контуров центрального L_0 и крайнего L_k отверстий (рис. 2) в случае решетки, состоящей из нечетного числа отверстий ($p = k$). Отсчет угла β ведется от нуля (теневая точка) до π (лобовая точка) для центрального отверстия (учитывается симметрия в случае нормального распределения волны сдвига) и от 0 до 2π – для крайних отверстий (в силу симметрии распределения напряжений на контурах L_k и L_{-k} зеркальны). Рассматривается случай ромбов, вытянутых вдоль набегающей волны. При этом $b/a = 2.5$.

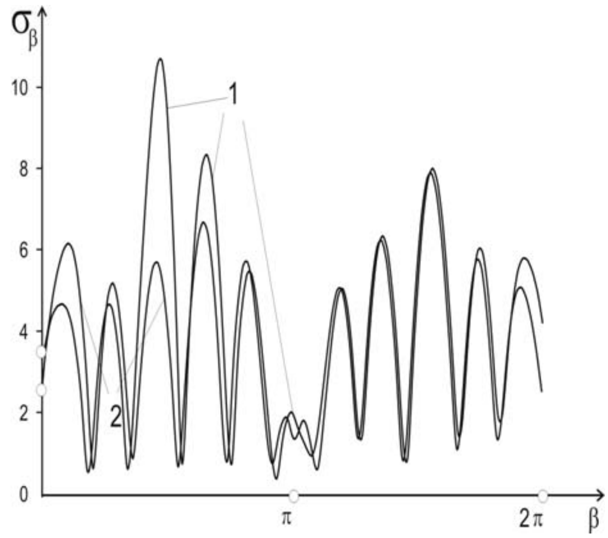
На рис. 6 показаны распределения σ_β вдоль контура центрального отверстия L_0 в случае решетки, состоящей из трех ромбов. Воздействие – волна из бесконечности. Значения безразмерного волнового числа на рис. 6, а – $\gamma_2 a = 1.7$, и б – $\gamma_2 a = 2.5$. Кривая 1 показывает распределение напряжений для центрального отверстия в случае решетки, где $d = 0{,}5a$. Кривая 2 – для решетки с $d = 2a$. Результаты показывают, что чем ближе отверстия друг к другу, тем выше контурные напряжения. Если в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках $\sigma_\beta = 0$, то в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ число локальных максимумов σ_β также увеличивается, причем растет и максимальное значение σ_β. Такой вывод полностью совпадает с результатами работ [5, 6].



а



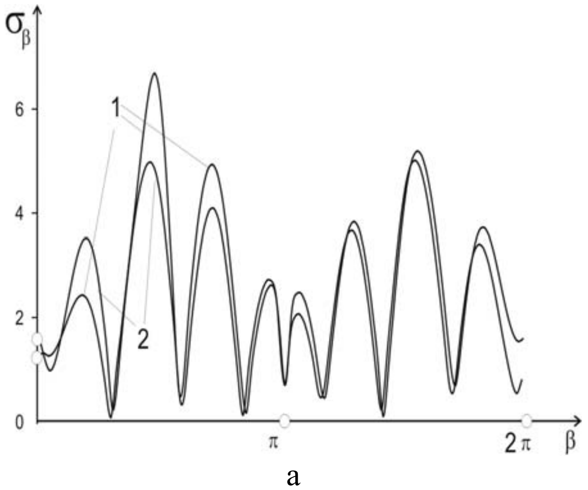
б
Рис. 6



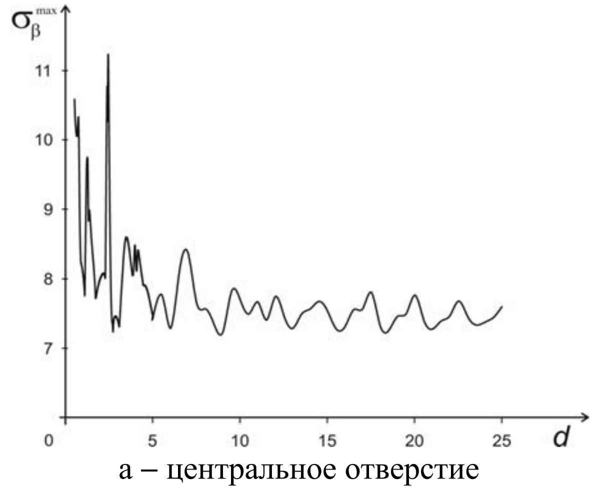
б
Рис. 7

На рис. 7 показано аналогичное распределение σ_β вдоль контура отверстия, крайнего слева. Нумерация кривых имеет тот же смысл. Здесь наблюдаются локальные минимумы в теневой ($\beta = 0$) и лобовой ($\beta = \pi$) точках. Число локальных максимумов в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ также увеличивается. Максимальное значение σ_β, как и на рис. 3, растет с уменьшением периода решетки и с увеличением $\gamma_2 a$. Причем наблюдается две различных по интенсивности зоны соскальзывания – внутренняя и внешняя. Как следует из приведенных графиков, при относительно близком расположении объектов во внутренней зоне соскальзывания наблюдается значительный рост контурных SH-напряжений по сравнению с внешней зоной.

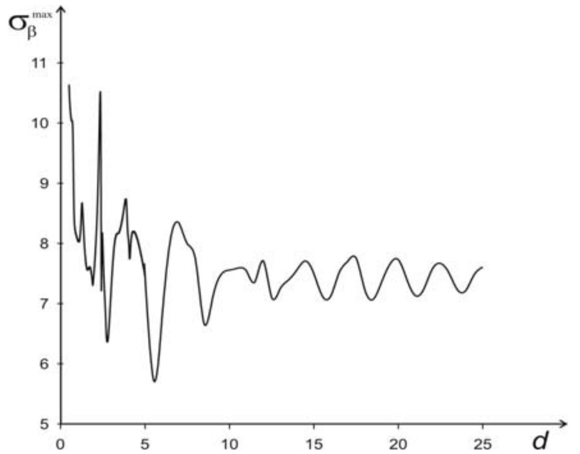
Рис. 8 иллюстрируют динамику снижения амплитуды максимального значения σ_β на контуре центрального (рис. 8, а) и крайнего слева (рис. 8, б) отверстий в зависимости от увеличения параметра решетки d (рис. 2) при $b/a = 2.5$, $\gamma_2 a = 2.5$ в случае симметричного нагружения SH-волной (1). Как и в [6], растягивание решетки приводит к уменьшению значений σ_β. И стабилизации пульсаций этих значений при достаточно больших d. Причём с увеличением волнового числа $\gamma_2 a$ стабилизация пульсаций σ_β достигается при бóльших значениях параметра решётки d.



а

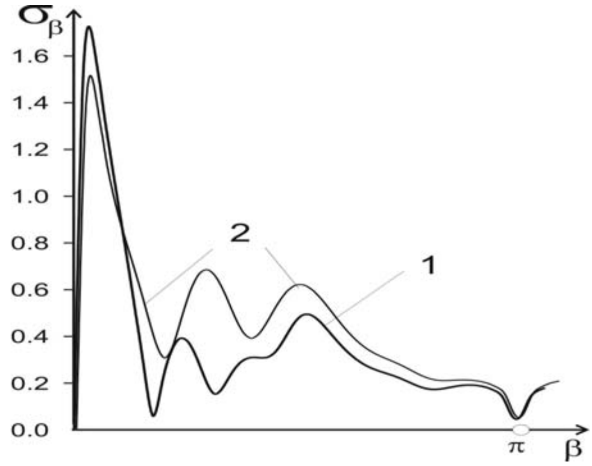


а – центральное отверстие



б – отверстие, крайнее слева

Рис. 8



б

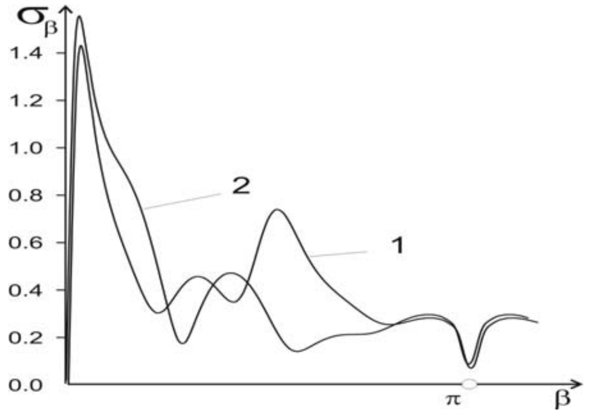
Рис. 9

На рис. 9 показаны распределения σ_β вдоль контура центрального отверстия L_0 в случае решетки, состоящей из трех ромбов. Воздействие – точечный источник, находящийся на оси Y на расстоянии a от границы. Значения безразмерного волнового числа: а – $\gamma_2 a$ = 1.7 и б – $\gamma_2 a$ = 2.5. Кривая 1 показывает распределение напряжений для центрального отверстия в случае решетки, где d = 0,5a. Кривая 2 – для решетки с d = 2a.

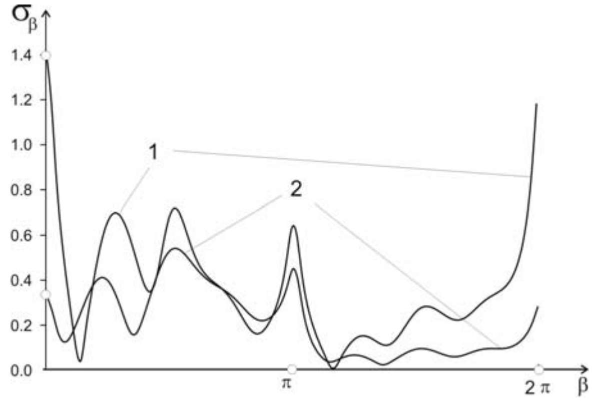
Результаты показывают, что характер зависимостей несколько меняется. Наблюдаются явные пульсации зависимости σ_β от d . То есть, для некоторых значений d пик напряжения наблюдается на кривых 2 . А для иных d – как и в случае воздействия волны из бесконечности, для кривых 1: чем ближе отверстия друг к другу, тем выше контурные напряжения. При этом очевидно, что чем выше $\gamma_2 a$, тем чаще чередуются такие отрезки d . Эта зависимость особенно наглядно будет видна на рис. 11.

Однако общая тенденция наблюдается – если в теневой (β = 0) и лобовой (β= = π) точках σ_β = 0, то в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ число локальных максимумов σ_β также увеличивается, причем растет и максимальное значение σ_β .

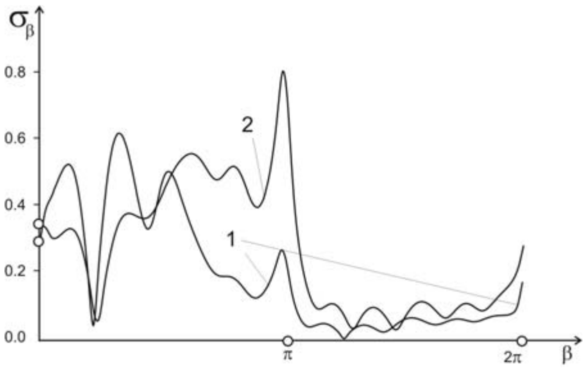
На рис. 10 показано аналогичное распределение σ_β вдоль контура отверстия, крайнего слева. Нумерация кривых имеет тот же смысл. Здесь наблюдаются локальные минимумы в теневой (β = 0) и лобовой (β = π) точках. Число локальных максимумов в зоне соскальзывания с увеличением $\gamma_2 a$ также увеличивается. В окрестности d = 2a максимальное значение σ_β (как и на рис. 11, б) растет с увеличением периода решетки и с увеличением $\gamma_2 a$. Причем наблюдается две различных по интенсивности зоны соскальзывания – внутренняя и внешняя.



а



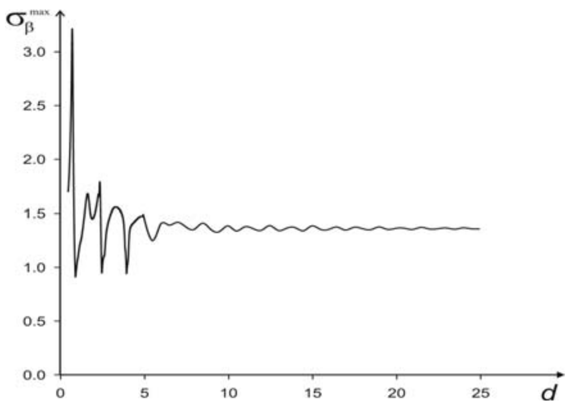
а



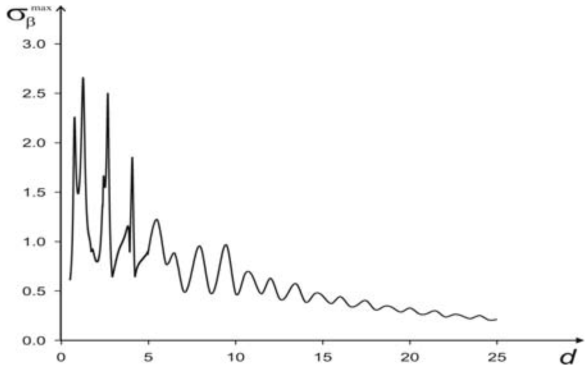
б
Рис. 10

Как следует из приведенных графиков, при относительно близком расположении объектов во внутренней зоне соскальзывания наблюдается значительный рост контурных SH-напряжений по сравнению с внешней зоной.

Рис. 11 так же, как и в случае воздействия волны из бесконечности, иллюстрируют динамику снижение амплитуды максимального значения σ_β на контуре центрального (рис. 11, а) и крайнего слева (рис. 11, б) отверстий. Увеличивается параметр решетки *d* (рис. 2) при *b/a* = 2.5, $\gamma_2 a$ = 2.5 в случае симметричного нагружения. Как и в [6], растягивание решетки приводит к уменьшению значений σ_β и стабилизации пульсаций этих значений при достаточно больших *d.* Причём с увеличением волнового числа $\gamma_2 a$ стабилизация пульсаций σ_β достигается при бóльших значениях параметра решётки *d*.



а – центральное отверстие



б – отверстие, крайнее слева
Рис. 11

Известно [6, 7], что для установившихся колебаний при сколь угодно больших значениях расстояния между объектами, вблизи объектов все же наблюдается незначительное влияние решетки. Графики, показанные на рис. 11, иллюстрируют наличие слабых пульсаций значений σ_β вблизи константы – значения максимума напряжения σ_β на контуре соответствующего одиночного отверстия. Этим также подтверждается достоверность используемого алгоритма.

Разработанная схема численного эксперимента позволила сформировать уникальную таблицу высокоточных значений (до 10^{-10}) максимумов касательных напряжений и соответствующих угловых координат на контуре эллиптического или ромбического центрального или крайних отверстий (в системе от 3 до 9 объектов). Воздействие – волна из бесконечности или расположенный вблизи точечный источник гармонических SH-волн для фиксированных геометрических соотношений отверстий и большинства волновых чисел. По мнению автора, такая таблица сформирована впервые.

В таблице приводится фрагмент этого результата в случае распространяющейся SH-волны (из бесконечности или от точечного источника), воздействующей на систему из трех эллиптических или ромбических отверстий с соотношением осей *b/a* = 2.5, параметром решетки $d = 2a$ и волновыми числами $\gamma_2 a$ равными 1,7 и 2.5 соответственно.

Таблица. Высокоточные значения максимумов касательных напряжений

Источник	Тип контура	$\gamma_2 a$	Расположение отверстия	Угол β в радианах	Максимум σ_β
Волна из/б	Эллипс	1,7	Центральное	0,5686600035	5,0464229428
Волна из/б	Эллипс	1,7	Крайнее справа	0,5797843285	4,5949148212
Волна из/б	Ромбик	1,7	Центральное	4,8685519838	5,1334723570
Волна из/б	Ромбик	1,7	Крайнее справа	1,4244175805	5,2176856614
Точ. источ.	Эллипс	1,7	Центральное	5,8846155724	1,0479724809
Точ. источ.	Эллипс	1,7	Крайнее справа	4,2344860978	0,6106355182
Точ. источ.	Ромбик	1,7	Центральное	0,1037147043	1,5277278346
Точ. источ.	Ромбик	1,7	Крайнее справа	4,6676274005	0,5141003888
Волна из/б	Эллипс	2,5	Центральное	5,2962455795	6,4732441454
Волна из/б	Эллипс	2,5	Крайнее справа	5,3087099723	6,6419534735
Волна из/б	Ромбик	2,5	Центральное	5,9680209910	7.6035515628
Волна из/б	Ромбик	2,5	Крайнее справа	1,4345722234	8.0431884160
Точ. источ.	Эллипс	2,5	Центральное	0,2345264692	0,5365214007
Точ. источ.	Эллипс	2,5	Крайнее справа	6,1775312385	0,3499206999
Точ. источ.	Ромбик	2,5	Центральное	0,1014049544	1,4957191164
Точ. источ.	Ромбик	2,5	Крайнее справа	3,1592925412	0,8071252579

Заключение

Таким образом, для задачи дифракции сдвиговых волн на системе отверстий некруговой формы в полубесконечной упругой среде параллельные алгоритмы позволяют значительно сократить время вычислений и более детально проанализировать характеристики волнового поля. Это очень важно, так как получение точных величин резонансных максимумов контурных напряжений вплоть до 10-го знака, а также точных координат их дислокации позволяет избежать разрушений конструкций, работающих в условиях динамических нагрузок.

Сочетание метода интегральных уравнений, позволяющего на единицу снизить размерность задачи, и процедур распараллеливания, приводящих к значительной экономии времени вычислений, существенно увеличивает эффективность предложенного алгоритма.

1. *Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л., Сизова Н.Д.* Исследование дифракции упругих волн на пластинах, ослабленных двумя отверстиями произвольной формы // ДАН. Математическая физика. – 1996. – 349, № 2. – С. 175 – 179.
2. *Вертгайм И.И., Терпигуров В.Н.* Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ.: Учебное пособие. – Пермь, 2007. – 84 с.
3. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.
4. *Фильштинский Л.А.* Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119 –127.
5. *Назаренко А.М.* Дифракция волн сдвига на цилиндрических включениях и полостях в упругом полупространстве // Проблемы прочности. – 1990. – № 11. – С. 90 – 94.
6. *Назаренко А.М., Панченко Б.Е.* Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной упругой среде // Проблемы программирования. – 2010. – № 2-3. – С. 604 – 610.
7. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплош-

ных сред. – Киев, 1989. – 352 с.
8. *Кюркчан А.Г., Скородумова Е.А.* Решение трехмерной задачи дифракции волн на группе объектов // Акустический журнал. – 2007. – 53, № 1. – С. 5 – 14.
9. *Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В.* Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD-компьютера «Инпарком». – Киев, 2007. – 220 с.

Получено 11.08.2011

Об авторе:

Панченко Борис Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник.

***Место работы автора*:**

Институт кибернетики имени
В.М. Глушкова НАН Украины,
проспект Академика Глушкова, 40.
(044) 526 3603, pr-bob@ukr.net