УДК 510.64 http://doi.org/10.15407/pp2024.02-03.019

О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк

МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ ЧАСТКОВИХ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ З РІВНІСТЮ ТА СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ЦИХ ЛОГІК

Робота присвячена дослідженню нових класів програмно-орієнтованих логічних формалізмів модального типу – чистих першопорядкових модальних логік часткових квазіарних предикатів зі знятою умовою монотонності та збагачених предикатами рівності. Апарат модальних логік використовується для опису й моделювання різноманітних предметних областей, систем штучного інтелекту, інформаційних та програмних систем. Обмеження класичної логіки предикатів, на якій базуються традиційні модальні логіки, зумовлюють актуальність проблеми побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки, які синтезують можливості традиційних модальних логік і логік часткових квазіарних предикатів. Важливим їх класом є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), які відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. Чисті першопорядкові ТМЛ названо TML^{Q}. В роботі запропоновано два різновиди TML^{Q} з рівністю: з предикатами строгої рівності $\equiv_{xy}$, їх названо TML$^{Q\equiv}$, та слабкої рівності $=_{xy}$, їх названо TML$^{Q=}$. Для елімінації кванторів в логіках немонотонних предикатів потрібні спеціальні предикати-індикатори наявності у вхідних даних компоненти з відповідним предметним іменем. Використання цих предикатів є характерною особливістю TML$^{Q\equiv}$ та TML$^{Q=}$. Тотальні предикати-індикатори визначають наявність чи відсутність компоненти з певним іменем, а часткові предикати-індикатори визначають лише наявність такої компоненти. Тотальні предикати-індикатори *Ez* фігурують в TML$^{Q\equiv}$ як спеціальні 0-арні композиції, часткові предикати-індикатори вже присутні в TML$^{Q=}$ як предикати $=_{xx}$. Ще одна особливість TML$^{Q\equiv}$ та TML$^{Q=}$ – використання композицій розширеної реномінації. В роботі описано семантичні моделі та мови TML$^{Q\equiv}$ та TML$^{Q=}$. Увагу акцентовано на властивостях, пов'язаних з предикатами рівності, описано особливості заміни рівних в TML$^{Q\equiv}$ та в TML$^{Q=}$. Для цих логік визначено низку відношень логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій семантичній основі для досліджених логік запропоновано відповідні числення секвенційного типу.
Ключові слова: модальна логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення

O.S. Shkilniak, S.S. Shkilniak

MODAL LOGICS OF PARTIAL QUASIARY PREDICATES WITH EQUALITY AND SEQUENT CALCULI OF THESE LOGICS

The aim of the work is to study new classes of program-oriented logical formalisms of the modal type – pure first-order modal logics of partial quasiary predicates without monotonicity condition and enriched with equality predicates. Modal logics can be used to describe and model various subject areas, artificial intelligence systems, information and software systems. The limitations of the classical predicate logic on which traditional modal logics are based determine the relevance of the problem of introducing new program-oriented logical formalisms. Such are composition-nominative modal logics, which synthesize facilities of traditional modal logics and logics of partial quasiary predicates. One of their important classes are transitional modal logics (TML), they reflect the aspect of change and evolution of subject areas. We denote pure first-order TML by TML^{Q}. In this paper two types of TML^{Q} with equality are considered: TML$^{Q\equiv}$ (with strong equality predicates $\equiv_{xy}$), and TML$^{Q=}$ (with weak equality predicates $=_{xy}$). For quantifier elimination in logics of non-monotonic predicates special predicates which indicate whether a component with a corresponding name has a value in the input data are required. The use of these predicates is a characteristic feature of both TML$^{Q\equiv}$ and TML$^{Q=}$. Total indicator predicates determine the presence or absence of a component with a certain name, while partial indicator predicates signalize only the presence of such a component. Thus, total indicator predicates are introduced as special parametric 0-ary compositions *Ez* in TML$^{Q\equiv}$, and partial indicator predicates are represented in TML$^{Q=}$ as predicates $=_{xx}$. Another feature of TML$^{Q\equiv}$ and TML$^{Q=}$ is the use of the extended renomination compositions. In this paper we describe semantic models and languages of TML$^{Q\equiv}$ and TML$^{Q=}$. Particular attention is paid to the properties related to equality predicates, substitution of equals in TML$^{Q\equiv}$ and TML$^{Q=}$ is described. A number of logical consequence relations for these logics are defined on sets of formulas specified with states. On this semantic basis, the corresponding sequent type calculi are proposed for the investigated logics.
Key words: modal logic, predicate, logical consequence, sequent calculus

Вступ

Апарат модальних логік успішно використовується для опису й моделювання різноманітних предметних областей, систем штучного інтелекту, інформаційних та програмних систем (див., напр., [1, 2]). Темпоральні логіки застосовуються для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм [2–4], на базі цих логік розроблено низку систем і мов специфікацій. Епістемічні логіки з великим успіхом використовуються для опису систем штучного інтелекту, інформаційних та експертних систем. Водночас обмеження класичної логіки предикатів, яка лежить в основі традиційних модальних логік, роблять вельми актуальною задачу побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів модального типу. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ), які поєднують можливості традиційних модальних логік [3] і композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів [5–8]. Найважливішим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), які відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. Такі логіки вивчались, зокрема, в [9, 10]. Традиційні модальні логіки природним чином розглядаються в межах ТМЛ.

Метою пропонованої роботи є дослідження нових класів програмно-орієнтованих модальних логік – чистих першопорядкових ТМЛ часткових квазіарних предикатів зі знятою умовою монотонності (еквітонності) та збагачені предикатами рівності. Виділено [8] два різновиди таких предикатів: слабкої рівності $=_{xy}$ та строгої рівності $\equiv_{xy}$. Чисті першопорядкові ТМЛ зі знятою умовою монотонності назвемо $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$. $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$ з предикатами строгої рівності назвемо $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}\equiv}$, а $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$ з предикатами слабкої рівності назвемо $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}=}$. $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$ без предикатів рівності досліджено в [9, 10]. $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}\equiv}$ та $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}=}$ вивчаються в цій роботі.

Для елімінації кванторів в логіках немонотонних предикатів потрібні спеціальні предикати-індикатори наявності у вхідних даних компоненти з відповідним предметним іменем. Використання предикатів-індикаторів є характерною особливістю $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$. Тотальні предикати-індикатори визначають наявність чи відсутність компоненти з певним іменем, а часткові предикати-індикатори визначають лише наявність компоненти з певним іменем. Тотальні предикати-індикатори Ez фігурують, зокрема, в [5–7, 9]. Предикати Ez можна виразити як $\exists y \equiv_{xy}$, проте доцільніше задати їх явно як спеціальні 0-арні композиції, як зроблено в $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}\equiv}$ Водночас часткові предикати-індикатори вже присутні в $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}=}$, такими є предикати $=_{xx}$.

В роботі описано семантичні моделі та мови $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$, описано особливості заміни рівних в $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}\equiv}$ та $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}=}$, визначено низку відношень логічного наслідку для множин специфікованих станами формул та наведено їх властивості, На цій семантичній основі для $\mathrm{TML}^{\mathrm{Q}}$ з рівністю запропоновано низку числень секвенційного типу.

Поняття, які в цій роботі не визначаються, тлумачитимо в сенсі [5–9].

1. Транзиційні модальні системи

Центральним для КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). Такі системи є моделями світів розгляду модальних логік. КНМС – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Ds, Im)$. Тут:

– Cms – композиційна модальна система, задає семантичні аспекти світу;

– Ds – дескриптивна система, вона визначає стандартні дескрипції; зазвичай це множина Fm формул мови КНМЛ;

– Dns – денотаційна система, вона визначає значення стандартних дескрипцій на семантичних моделях; зазвичай для цього використовується відображення Im інтерпретації формул на станах світу.

Композиційна модальна система – це об’єкт вигляду $Cms = (St, \boldsymbol{R}, Pr, C)$, де:

– St – множина станів світу;

– $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на St вигляду $\mathrm{R} \subseteq St \times St^n$;

– Pr – множина предикатів на St;

– C – множина композицій на Pr.

КНМС далі будемо трактувати як об'єкти вигляду $\boldsymbol{M} = ((St, \boldsymbol{R}, Pr, C), Fm, Im)$.

Для чистих першопорядкових КНМС множину St конкретизуємо як множину алгебраїчних систем (структур) вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де A_α – множина базових даних стану α, Pr_α – множина квазіарних предикатів ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$, названих *предикатами стану* α.

Предикати вигляду ${}^{V}A \to \{T, F\}$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$, назвемо *глобальними*.

Важливим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), вони відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей, описуючи переходи від одного стану світу до іншого. В основі ТМЛ лежить поняття транзиційної модальної системи (ТМС), такі системи є найважливішим класом КНМС. Чисті першопорядкові ТМС назвемо TMS^{Q}.

ТМС – це КНМС, у яких множина $\boldsymbol{R}$ складається з відношень вигляду $R \subseteq St \times St$. Ці відношення трактуємо як відношення переходу на станах.

Окремими випадками ТМС є загальні транзиційні, темпоральні, мультимодальні системи (див. [9, 10]).

ТМС, в яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\rhd$, а базовою модальною композицією є $\Box$ ("необхідно"), названо *загальними* (GMS).

ТМС, в яких $\boldsymbol{R}$ складається з єдиного бінарного відношення $\rhd$, а базовими модальними композиціями є $\Box\!\uparrow$ ("завжди буде") і $\Box\!\downarrow$ ("завжди було"), названо *темпоральними* (TmMS).

ТМС із множиною відношень $\boldsymbol{R} = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ і базовими модальними композиціями M_i, $i \in I$, в яких кожному $\rhd_i \in \boldsymbol{R}$ зіставлено відповідну композицію M_i, названо *мультимодальними* (MMS). В MMS дія кожної M_i аналогічна дії $\Box$, але тільки щодо свого відношення $\rhd_i$, $i \in I$.

Для GMS традиційно задають похідну композицію $\Diamond$ ("можливо"): $\Diamond P$ означає $\neg\Box\neg P$. Для TmMS задають похідні композиції $\Diamond\!\uparrow$ ("колись буде") та $\Diamond\!\downarrow$ ("колись було"): $\Diamond\!\uparrow P$ означає $\neg\Box\!\uparrow\neg P$, а $\Diamond\!\downarrow P$ означає $\neg\Box\!\downarrow\neg P$.

Базовими загальнологічними композиціями для TMS^{Q} вважаємо логічні зв'язки $\neg$ та $\vee$, композиції реномінації $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ та квантифікації $\exists x$. Для TMS^{Q} з рівністю до них додаємо спеціальні 0-арні композиції – предикати рівності. TMS^{Q} з предикатами строгої рівності $\equiv_{xy}$ назвемо TMS$^{Q\equiv}$, а TMS^{Q} з предикатами слабкої строгої рівності $=_{xy}$ назвемо TMS$^{Q=}$.

Нагадаємо, що V-A-квазіарним предикатом називаємо [5] часткову функцію вигляду $Q : {}^{V}A \to \{T, F\}$. Тут ${}^{V}A$ – множина всіх V-A-іменних множин $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень. V і A трактуємо як множини предметних імен (змінних) і предметних значень.

V-A-іменну множину (V-A-ІМ) визначають [5] як однозначну функцію вигляду $V \to A$. Подаємо V-A-ІМ у вигляді $[v_i \mapsto a_i]_{i \in I}$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для V-A-ІМ вводимо операції $\|_{-Z}$, де $Z \subseteq V$, накладення ∇, реномінації та розширеної реномінації (див. [5, 7, 8]).

Кожний V-A-квазіарний предикат Q задаємо двома множинами: область *істинності* $T(Q) = \{d \mid Q(d) = T\}$ та область *хибності* $F(Q) = \{d \mid Q(d) = F\}$.

Предикат Q *однозначний*, або *P-предикат*, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$;

Q неспростовний, якщо $F(Q) = \varnothing$;

Q виконуваний, якщо $T(Q) \neq \varnothing$.

Далі розглядаємо саме однозначні V-A-квазіарні предикати.

В класі P-предикатів маємо 3 константних:

– *Q тотожно істинний* (позн. T), якщо $F(Q) = \varnothing$ та $T(Q) = {}^{V}A$;

– *Q тотожно хибний* (позн F), якщо $T(Q) = \varnothing$ та $F(Q) = {}^{V}A$;

– *Q тотально невизначений* (позн. $\perp$, якщо $T(Q) = F(Q) = \varnothing$.

P-предикат *Q еквітонний*, якщо ($Q(d)\!\downarrow$ та $d \subseteq d'$) $\Rightarrow Q(d')\!\downarrow = Q(d)$.

$x \in V$ *неістотне* для предиката Q, якщо $d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x} \Rightarrow Q(d_1) = Q(d_2)$.

Визначення базових загальнологічних композицій $\neg$, $\vee$, $\exists x$, $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ квазіарних предикатів наведено в [7]

Предикати рівності трактуємо як спеціальні 0-арні композиції, беручи до уваги їх загальнологічний статус. Виділено

[6] два різновиди цих предикатів: слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{\{x,y\}}$ та строгої (точної) рівності $\equiv_{\{x,y\}}$.

Задаємо $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$ так:

$T(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\}$,

$F(=_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) \neq d(y)\}$;

$T(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow,\ d(y)\downarrow$ та $d(x) = d(y)\} \cup$
$\cup \{d \mid d(x)\uparrow$ та $d(y)\uparrow\}$,

$F(\equiv_{\{x,y\}}) = \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\downarrow, d(x) \neq d(y)\} \cup$
$\cup \{d \mid d(x)\downarrow, d(y)\uparrow$ або $d(x)\uparrow, d(y)\downarrow\}$.

Окремим випадком $=_{\{x,y\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$, якщо x та y збігаються, є $=_{\{x\}}$ та $\equiv_{\{x\}}$.

Предикати $=_{\{x,y\}}$, $=_{\{x\}}$ та $\equiv_{\{x,y\}}$, $\equiv_{\{x\}}$ більш звично позначаємо $=_{xy}$, $=_{xx}$ та $\equiv_{xy}$, $\equiv_{xx}$. Отже, $=_{xy}$ та $=_{yx}$ – це один і той же предикат, $\equiv_{xy}$ та $\equiv_{yx}$ – теж один і той же предикат.

Предикати $\equiv_{xy}$ та $\equiv_{xx}$ тотальні немонотонні; $=_{xy}$ та $=_{xx}$ часткові еквітонні.

Спеціальні 0-арні композиції – предикати-індикатори – визначають наявність у вхідних даних компоненти зі вказаним іменем. Тотальні предикати-індикатори встановлюють *наявність* чи *відсутність* такої компоненти, часткові предикати-індикатори встановлюють лише *наявність* цієї компоненти.

Тотальні предикати-індикатори Ez немонотонні, їх задаємо (див. [7]) так:

$T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\}$;

$F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}$.

Частковими предикатами-індикаторами в TMS$^{Q=}$ є еквітонні предикати $=_{zz}$. Справді, маємо $T(=_{zz}) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = T(Ez)$ та $F(=_{zz}) = \{d \mid d(z)\downarrow$ та $d(z) \neq d(z)\} = \varnothing$.

Таким чином, маємо такі різновиди TMS^{Q} з рівністю: GMS$^{Q\equiv}$, TmMS $^{Q\equiv}$, MMS $^{Q\equiv}$ для TMS$^{Q\equiv}$ та GMS$^{Q=}$, TmMS $^{Q=}$, MMS $^{Q=}$ для TMS$^{Q=}$.

Опишемо мову GMS$^{Q\equiv}$. Алфавіт мови: множина V предметних імен (змінних); множина Ps предикатних символів; множина $\{\neg, \vee, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}, \exists x, \equiv_{xy}, Ex\}$ символів базових загальнологічних композицій; множина $Ms = \{\Box\}$ символів базових модальних композицій. Множина Fr формул мови визначається так:

Fa) $Ps \subseteq Fr$;

F≡) $\{Ex \mid x \in V\} \subseteq Fr$ та $\{\equiv_{xy} \mid x, y \in V\} \subseteq Fr$;

Fp) $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi \in Fr$ та $\vee\Phi\Psi \in Fr$;

FR) $\Phi \in Fr \Rightarrow R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}\Phi \in Fr$;

F∃) $\Phi \in Fr \Rightarrow \exists x\Phi \in Fr$;

F□) $\Phi \in Fr \Rightarrow \Box\Phi \in Fr$.

Формули вигляду $p \in Ps$, Ex, $\equiv_{xy}$ назвемо атомарними.

Множини гарантовано неістотних для формул імен задаємо функцією $\nu : Fr \to 2^V$ (див. [7, 9]).

Тип GMS$^{Q\equiv}$ визначається розширеною сигнатурою $\sigma = (Ps, \nu)$ та властивостями відношення $\rhd$.

Задамо відображення інтерпретації Im формул на станах світу. Спочатку задаємо $Im : Ps \times St \to Pr$, водночас має бути $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$ (базові предикати є предикатами станів). Символи композицій (зокрема, символи Ex та $\equiv_{xy}$) інтерпретуються як відповідні композиції (зокрема, відповідні предикати-індикатори та предикати рівності). Продовжимо таке Im до відображення $Fm \times St \to Pr$ наступним чином:

Ip) $Im(\neg, \alpha) = \neg(Im(\Phi, \alpha))$;

$Im(\vee\Phi\Psi, \alpha) =$
$\vee(Im(\Phi, \alpha), Im(\Psi, \alpha))$;

IR) $Im(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi), \alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(Im(\Phi, \alpha))$;

I∃) $Im(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо існує } a \in A_\alpha : Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T, \\ F, \text{ якщо } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \quad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

I□) $Im(\Box\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S : \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S : \alpha \rhd \delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \quad \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для $\alpha \in S$ не існує β: $\alpha \rhd \beta$, то $Im(\Box\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d \in {}^V\!A$.

Предикати, які є значеннями немодалізованих формул (при їх побудові не використовуються символи MS), належать до предикатів станів.

Предикати, які є значеннями модалізованих формул, належать до глобальних.

TMS записуємо як $\boldsymbol{M} = (St, \boldsymbol{R}, A, Im)$.

Наступні визначення даються однаково для всіх описаних різновидів TMS^{Q}.

Предикат $Im(\Phi, \alpha)$ – значення формули Φ у стані α – позначаємо Φ_α.

Формула Φ *неспростовна в стані* α (позначаємо $\alpha \models \Phi$), якщо Φ_α – неспростовний предикат.

Формула Φ *неспростовна в* TMS $\boldsymbol{M}$ (позн.$\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо для всіх $\alpha \in St$ предикат Φ_α є неспростовним.

Нехай $\mathcal{M}$ – клас TMS певного типу.

Формула Φ *$\mathcal{M}$-неспростовна* (позн. $^{\mathcal{M}}\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх TMS $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}$.

Залежно від умов, накладених на відношення $\rhd$, можна визначати різні класи GMS $^{Q\equiv}$. Традиційними є випадки, коли $\rhd$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним. Тоді в назві GMS$^{Q\equiv}$ пишемо символ *R*, *T* чи *S*. Отримуємо такі класи: *R*-GMS$^{Q\equiv}$, *T*-GMS$^{Q\equiv}$, *S*-GMS$^{Q\equiv}$, *RT*-GMS$^{Q\equiv}$, *RS*-GMS$^{Q\equiv}$, *TS*-GMS$^{Q\equiv}$, *RTS*-GMS$^{Q\equiv}$.

Мова GMS$^{Q=}$ визначається аналогічно мові GMS$^{Q\equiv}$ з такими відмінностями. Множина символів базових загальнологічних композицій – це $\{\neg, \vee, R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}, \exists x, =_{xy}\}$. У визначенні множини формул замість п. F≡ маємо $\{=_{xy} \mid x, y \in V\} \subseteq Fr$. Відповідно визначається відображення інтерпретації.

Опишемо мову TmMS$^{Q\equiv}$. Алфавіт мови – це алфавіт мови GMS$^{Q\equiv}$ із тією відмінністю, що множина символів базових модальних композицій $Ms = \{\Box\uparrow, \Box\downarrow\}$. Множину *Fm* формул мови задаємо за пп. Fa, F≡, Fp, FR, F∃ для мови GMS$^{Q\equiv}$, а замість п. F□ маємо:

F□↑↓) $\Phi \in Fr \Rightarrow \Box\uparrow\Phi \in Fr$ та $\Box\downarrow\Phi \in Fr$.

Визначаючи відображення *Im* замість I□ записуємо I□↑↓ (див. [9, 10]).

Мова TmMS$^{Q=}$ визначається подібно до мови TmMS$^{Q\equiv}$ з такими відмінностями, які має мова GMS$^{Q=}$ щодо мови GMS$^{Q\equiv}$.

Залежно від умов, накладених на $\rhd$, визначаємо різні класи GMS$^{Q=}$, TmMS$^{Q\equiv}$, TmMS$^{Q=}$ так, як це зроблено для GMS$^{Q\equiv}$.

У такий спосіб визначаємо і мови MMS$^{Q\equiv}$ та MMS$^{Q=}$.

Залежно від того, як задається значення $\Phi_\delta(d)$ за умови $d \notin {}^V A_\delta$, виділено [10]) два різновиди TMS: із *сильною* умовою визначеності на станах та із *загальною* умовою визначеності на станах. Сильна умова є занадто обмежувальною, вона також порушує [10] еквітонність предикатів при дії модальної композиції. Загальна умова набагато природніша, вона задається так:

$\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$ для всіх $d \in {}^V A$ та $\delta \in St$

Тут d_δ – це позначення для ІМ $[v \mapsto a \in d \mid a \in A_\delta]$.

За умови $d \notin {}^V A_\delta$ маємо $\Phi_\delta(d) = \Phi_\delta(d_\delta)$. Це означає,що предикати стану δ "відчувають" лише компоненти $v \mapsto a$ з базовими даними $a \in A_\delta$.

Взаємодія модальних композицій із реномінаціями та кванторами досліджена в [10]. Стисло опишемо її для GMS^Q.

Теорема 1. Для всіх $\Phi \in Fr$, $d \in {}^V A$ маємо $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Box\Phi)(d) = \Box(R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi))(d)$.

Отже, символи *Ms* можна проносити через символи реномінації.

Теорема 2. Формули вигляду $\exists x\Box\Phi \to \Box\exists x\Phi$, $\Box\forall x\Phi \to \forall x\Box\Phi$, $\Diamond\forall x\Phi \to \forall x\Diamond\Phi$, $\exists x\Diamond\Phi \to \Diamond\exists x\Phi$ спростовуються в GMS^Q, водночас вони неспростовні в GMS^Q еквітонних предикатів;

2) формули вигляду $\Box\exists x\Phi \to \exists x\Box\Phi$, $\forall x\Diamond\Phi \to \Diamond\forall x\Phi$, $\forall x\Box\Phi \to \Box\forall x\Phi$, $\Diamond\exists x\Phi \to \exists x\Diamond\Phi$ спростовні в GMS^Q еквітонних предикатів.

Теореми 1 та 2 відповідним чином формулюються для TmMS^Q та MMS^Q.

Розглянемо специфічні властивості GMS^Q, пов'язані з предикатами рівності. В TmMS^Q і MMS^Q ці властивості формулюються аналогічно.

Твердження 1. 1) для кожної GMS$^{Q\equiv}$ $\boldsymbol{M}$ маємо $\boldsymbol{M} \models \equiv_{xx}$ та $\boldsymbol{M} \models \Box\equiv_{xx}$;

2) для кожної GMS$^{Q=}$ $\boldsymbol{M}$ маємо $\boldsymbol{M} \models =_{xx}$ та $\boldsymbol{M} \models \Box=_{xx}$.

Справді, $F(\equiv_{xx}) = \varnothing$ та $F(=_{xx}) = \varnothing$.

Теорема 3. Формули $=_{xy} \to \Box=_{xy}$ та $\Box=_{xy} \to =_{xy}$ неспростовні в GMS$^{Q=}$.

Зокрема, $=_{xx} \to \Box=_{xx}$ та $\Box=_{xx} \to =_{xx}$ неспростовні в GMS$^{Q=}$. Водночас

Теорема 4. 1) Формули $\equiv_{xy} \to \Box\equiv_{xy}$ та $\Box\equiv_{xy} \to \equiv_{xy}$ спростовні в GMS$^{Q\equiv}$;

2) формули $Ex \to \Box Ex$ та $\Box Ex \to Ex$ спростовні в GMS$^{Q\equiv}$.

Теореми 3 та 4 засвідчують істотні відмінності $GMS^{Q\equiv}$ та $GMS^{Q=}$. Ще одним підтвердженням цього є

Теорема 5. 1) Формула $=_{xy} \,\&\, \Box=_{xz} \to \Box=_{yz}$ неспростовна в $GMS^{Q=}$;

2) формула $\equiv_{xy} \,\&\, \Box\equiv_{xz} \to \Box\equiv_{yz}$ спростовна в $GMS^{Q\equiv}$.

2. Відношення логічного наслідку

Відношення логічного наслідку в TMS задаємо на множині формул, специфікованих (відмічених) іменами станів, або специфікованих станами формул.

Специфікована іменем стану формула має вигляд Φ^{α}, де Φ – формула мови, $\alpha \in S$ – її специфікація, S – певна множина імен станів світу. Специфікація вказує на стан світу, в якому розглядається формула.

Множина специфікованих станами формул Σ із множиною специфікацій S *узгоджена* із TMS $M = (St, \boldsymbol{R}, A, Im)$, якщо задана ін'єкція S у St.

На множині специфікованих станами формул введемо відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку, або логічного *IR*-наслідку, *T*-наслідку, *F*-наслідку, *TF*-наслідку. Такі відношення відповідають однойменним відношенням в логіках квазіарних предикатів (див. [5–7]).

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул. Надалі запис вигляду $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{*}\Delta$ за умовчанням передбачає узгодженість Γ та Δ із TMS M.

Δ є *IR*-наслідком Γ в узгодженій із ними TMS $\boldsymbol{M}$ (позн. $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{IR}\Delta$), якщо для всіх $d \in {}^{V}\!A$ маємо: $\Phi_{\alpha}(d) = T$ для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$ $\Rightarrow \Psi_{\beta}(d) \neq F$ для деякого $\Psi^{\beta} \in \Delta$.

Δ є *логічним IR-наслідком* Γ відносно TMS певного типу $\mathcal{M}$ (позн. $\Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{IR}\Delta$), якщо $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{IR}\Delta$ для всіх $M \in \mathcal{M}$.

Δ є *T*-наслідком Γ в узгодженій із ними TMS $\boldsymbol{M}$ (позн. $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{T}\Delta$), якщо для всіх $d \in {}^{V}\!A$ маємо: $\Phi_{\alpha}(d) = T$ для всіх $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$ $\Rightarrow \Psi_{\beta}(d) = T$ для деякого $\Psi^{\beta} \in \Delta$.

Δ є *логічним T-наслідком* Γ відносно TMS певного типу $\mathcal{M}$ (позн. $\Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{T}\Delta$), якщо $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{T}\Delta$ для всіх $M \in \mathcal{M}$.

Δ є *F*-наслідком Γ в узгодженій із ними TMS $\boldsymbol{M}$ (позн. $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{F}\Delta$), якщо для всіх $d \in {}^{V}\!A$ маємо: $\Psi_{\beta}(d) = F$ для всіх $\Psi^{\beta} \in \Delta$ $\Rightarrow \Phi_{\alpha}(d) = F$ для деякого $\Phi^{\alpha} \in \Gamma$.

Δ є *логічним T-наслідком* Γ відносно TMS певного типу $\mathcal{M}$ (позн. $\Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{F}\Delta$), якщо $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{F}\Delta$ для всіх $M \in \mathcal{M}$.

Δ є *TF*-наслідком Γ в узгодженій із ними TMS M (позн. $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{TF}\Delta$), якщо $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{T}\Delta$ та $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{F}\Delta$.

Δ є *логічним TF-наслідком* Γ відносно TMS певного типу $\mathcal{M}$ (позн. $\Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{TF}\Delta$), якщо $\Gamma\ {}_M|\!\!=_{TF}\Delta$ для всіх $M \in \mathcal{M}$.

Тоді маємо: $\Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{TF}\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{T}\Delta$ та $\Gamma\ {}^{\mathcal{M}}|\!\!=_{F}\Delta$.

Немодальні властивості цих відношень повторюють відповідні властивості однойменних відношень для множин формул традиційної логіки квазіарних предикатів (див. [5–8]). Це такі властивості.

1) Властивості декомпозиції формул $\neg\neg_L$, $\neg\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$, $\neg\vee_L$, $\neg\vee_R$, а також властивості $\neg_L$, $\neg_R$ для $|\!\!=_{IR}$ (див. [5]).

2) Властивості спрощення та еквівалентних перетворень, пов'язані з реномінаціями; вони отримуються на основі властивостей R, $R_{\perp}I$, $R_{\perp}U$, $R_{\perp}R$, $R_{\perp}\neg$, $R_{\perp}\vee$, $R\uparrow$ для предикатів предикатів (див. [7, 8]).

3) Властивості, пов'язані з елімінацією кванторів; для $GMS^{Q\equiv}$ вони повторюють властивості $\exists R_{\perp L}$, $\neg\exists R_{\perp R}$, $\exists R_{\perp vR}$, $\neg\exists R_{\perp vL}$ (див. [8]), в $GMS^{Q=}$ маємо аналогічні властивості $\exists R_{\perp L=}$, $\neg\exists R_{\perp R=}$, $\exists R_{\perp vR=}$, $\neg\exists R_{\perp vL=}$, де замість Ez пишемо $=_{zz}$; до них в $GMS^{Q\equiv}$ додаємо властивості *E*-розподілу Ed та первісного означення Ev (див. [8]), а в $GMS^{Q=}$ додаємо аналогічні властивості $\downarrow_{=}$d та $\downarrow_{=}$v, де замість Ez пишемо $=_{zz}$.

4) Властивості спрощення, пов'язані з предикатами-індикаторами в $GMS^{Q\equiv}$; це властивості, індуковані властивостями предикатів $R_{\perp E}$, $R_{\perp Ev}$ та властивість El_{RE}.

5) Властивості, пов'язані з предикатами $\equiv_{xy}$ в $GMS^{Q\equiv}$; це властивості спрощення, індуковані властивостями предикатів $R_{\perp}\equiv_{xx}$, $R_{\perp}\equiv_{0}$, $R_{\perp}\equiv_{1}$, $R_{\perp}\equiv_{2}$, $R_{\perp}\equiv_{1E}$, $R_{\perp}\equiv_{2E}$; властивості елімінації константних

формул $El_{\equiv}$ та $ElR_{\equiv}$; властивості транзитивності $Tr\equiv$ та заміни рівних $\equiv R_{\perp}r_{L}$, $\equiv\neg R_{\perp}r_{L}$, $\equiv R_{\perp}r_{R}$, $\equiv\neg R_{\perp}r_{R}$.

6) Допоміжні властивості в $GMS^{Q\equiv}$: зняття $\neg$ при перенесенні $\neg\Phi$ з лівої частини відношення наслідку у праву і навпаки для символів Ez, $\equiv_{xy}$ та їхніх реномінацій.

7) Властивості, пов'язані з предикатами $=_{xy}$ та $=_{xx}$ в $GMS^{Q=}$; це властивості спрощення, індуковані властивостями предикатів $R_{\perp}=_{zz}$, $R_{\perp}=_{zz0}$ $R_{\perp}=_{0}$, $R_{\perp}=_{1}$, $R_{\perp}=_{2}$; властивості $El_{R=L}$, $El_{R=R}$ елімінації $_{\perp}$-формул та властивість $El_{=L}$ елімінації $_{pT}$-формул $=_{zz}$; властивості транзитивності $Tr=$ та заміни рівних $=R_{\perp}r_{L}$, $=R_{\perp}r_{R}$.

Наведемо умови гарантованої наявності відповідного відношення $\Gamma \models_{*} \Delta$.

Відношення $\models_{IR}$ в $GMS^{Q=}$:
$C \vee C_{Rf=} \vee C\perp_{L} \vee C\perp_{R}$.

Відношення $\models_{IR}$ в $GMS^{Q\equiv}$:
$C \vee CF \vee C_{Rf\equiv} \vee C_{E\equiv L} \vee C_{E\equiv R} \vee CT_{\equiv}$.

Відношення $\models_{T}$ в $GMS^{Q\equiv}$:
$C \vee CL \vee CF \vee C_{Rf\equiv} \vee C_{E\equiv L} \vee C_{E\equiv R} \vee CT_{\equiv}$.

Відношення $\models_{F}$ в $GMS^{Q\equiv}$:
$C \vee CR \vee CF \vee C_{Rf\equiv} \vee C_{E\equiv L} \vee C_{E\equiv R} \vee CT_{\equiv}$.

Відношення $\models_{TF}$ в $GMS^{Q\equiv}$:
$C \vee CLR \vee CF \vee C_{Rf\equiv} \vee C_{E\equiv L} \vee C_{E\equiv R} \vee CT_{\equiv}$.

Зазначені окремі умови вигляду C* означають таке для відношення $\Gamma \models_{*} \Delta$:

C) існує формула Φ: $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$;

C) існує формула Φ: $\Phi \in \Gamma$ та $\Phi \in \Delta$;

CL) існує формула Φ: $\Phi \in \Gamma$ та $\neg\Phi \in \Gamma$;

CR) існує формула Φ: $\Phi \in \Delta$ та $\neg\Phi \in \Delta$;

CLR) існують формули Φ, Ψ:
$\Phi, \neg\Phi \in \Gamma$ та $\Psi, \neg\Psi \in \Delta$;

CF) існує формула $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(Ez) \in \Gamma$;

$C_{Rf\equiv}$) існує формула $\equiv_{xx} \in \Delta$;

$C_{E\equiv L}$) існують формули $\equiv_{xy}, Ex, Ey$:
$\equiv_{xy}, Ex \in \Gamma$ та $Ey \in \Delta$;

$C_{E\equiv R}$) існують формули $\equiv_{xy}, Ex, Ey$:
$\equiv_{xy}, Ex, Ey \in \Delta$;

$CT_{\equiv}$) існує формула $R^{\bar{v},\bar{u},x,z}_{\bar{x},\perp,\perp,\perp}(\equiv_{xz}) \in \Delta$;

$C_{Rf=}$) існує формула $=_{xx} \in \Delta$;

$C\perp_{L}$) існує формула $R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(=_{xy}) \in \Gamma$;

$C\perp_{R}$) існує формула $R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(=_{xy}) \in \Delta$.

3. Секвенційні числення

Семантичною основою побудови для ТМЛ числень секвенційного типу є властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Специфікації мають вигляд α|– чи α–|, де α – ім'я стану Секвенції трактуємо як множини таких формул. Виділяючи $_{|-}$-формули та $_{-|}$-формули, секвенції позначаємо $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$.

Секвенції збагачуємо збудованими на момент виведення множинами відношень на станах. Нехай M – схема моделі світу, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів. Збагачені секвенції записуємо Σ // M.

Ми пропонуємо секвенційні числення, які формалізують відношення $_{M=}\models_{IR}$ в $GMS^{Q=}$ та відношення $_{M}\models_{IR}$, $_{M}\models_{T}$, $_{M}\models_{F}$, $_{M}\models_{TF}$ в $GMS^{Q\equiv}$. Числення для відношення $_{M=}\models_{IR}$ в $GMS^{Q=}$ назвемо $C^{GQ=IR}$, а числення для $_{M}\models_{IR}$, $_{M}\models_{T}$, $_{M}\models_{F}$, $_{M}\models_{TF}$ в $GMS^{Q\equiv}$ назвемо $C^{GQ\equiv IR}$, $C^{GQ\equiv T}$, $C^{GQ\equiv F}$, $C^{GQ\equiv TF}$.

Секвенційне числення задається базовими секвенційними формами і умовами замкненості секвенції.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Правилами виведення секвенційних числень є секвенційні форми, вони індукуються властивостями відношень логічного наслідку. Аксіомами секвенційного числення є замкнені секвенції. Для замкненої секвенції $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ має виконуватись умова $\Gamma \models \Delta$. Секвенційне дерево замкнене, якщо кожний його лист – замкнена секвенція. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ, таке дерево – виведення секвенції Σ.

Умови замкненості секвенції $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ задаються наведеними вище.умовами гарантованої наявності відповідного відношення логічного наслідку $\Gamma \models_{*} \Delta$.

Охарактеризуємо детальніше числення $C^{GQ\equiv T}$, $C^{GQ\equiv F}$, $C^{GQ\equiv TF}$. Вони мають однакові базові секвенційні форми, відрізняються різними умовами замкненості секвенції. Ці форми можна розбити на групи.

Секвенційні форми, які не пов'язані з модальностями, є аналогами відповідних секвенційних форм в численнях логік квазіарних предикатів $C_{\perp}^{Q\equiv T}$, $C_{\perp}^{Q\equiv F}$, $C_{\perp}^{Q\equiv TF}$ (див. [7]). Ці форми індукуються властивостями декомпозиції формул; властивостями, пов'язаними з елімінацією кванторів; властивостями спрощення та еквівалентних перетворень, пов'язаними з реномінаціями; властивостями спрощення, пов'язаними з предикатами-індикаторами; властивостями, пов'язаними з предикатами $\equiv_{xy}$.

Наведемо для прикладу форми, які є аналогами форм $_{|-}\neg\vee$, $_{-|}\mathrm{R}_{\perp}\vee$, $_{|-}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{EV}-|}$ та $\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}$

$$_{|-}\neg\vee \quad \frac{_{\alpha|-}\neg\Phi,\ _{|-}\neg\Psi,\Sigma\ \ //M}{_{\alpha|-}\neg(\Phi\vee\Psi),\Sigma\ \ //M};$$

$$_{-|}\mathrm{R}_{\perp}\vee \quad \frac{_{\alpha-|}R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi)\vee R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Psi),\Sigma\ \ //\ M}{_{\alpha-|}R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi\vee\Psi),\Sigma\ \ //\ M};$$

$$_{|-}\mathrm{R}_{\perp\mathrm{EV}} \quad \frac{_{\alpha|-}Ey,\Sigma\ \ //M}{_{|\alpha-}R_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(Ez),\Sigma\ \ //M};$$

$_{-|}\equiv\mathrm{R}_{\perp}\mathrm{r}$

$$\frac{_{\alpha|-}\equiv_{xy},\ _{\alpha-|}R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p),\ _{\alpha-|}R_{\bar{w},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(p),\Sigma\ \ //M}{_{\alpha|-}\equiv_{xy},\ _{-|}R_{\bar{w},\perp,x}^{\bar{v},\bar{u},z}(p),\Sigma\ \ //M}.$$

До цих форм додаються секвенційні форми, пов'язані з модальностями. Це форми пронесення модальності через реномінацію $_{|-}\mathrm{R}_{\perp}\Box$, $_{-|}\mathrm{R}_{\perp}\Box$, $_{|-}\neg\mathrm{R}_{\perp}\Box$, $_{-|}\neg\mathrm{R}_{\perp}\Box$, та форми елімінації модальних операторів (детально описані в [8]). Для прикладу:

$$_{|-}\mathrm{R}\Box \quad \frac{_{\alpha|-}\Box R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Sigma\ \ //M}{_{\alpha|-}R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Box\Phi),\Sigma\ \ //M};$$

$$_{-|}\neg\mathrm{R}\Box \quad \frac{_{\alpha-|}\neg\Box R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Phi),\Sigma\ \ //M}{_{\alpha-|}\neg R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\Box\Phi),\Sigma\ \ //M}.$$

Для пропонованих модальних секвенційних числень справджуються теореми коректності та повноти. Доведення теорем повноти базується на теоремах про побудову контрмоделі за незамкненим шляхом у секвенційному дереві.

Теорема повноти формулюється однотипно для кожного з розглянутих числень. У цьому формулюванні відношенням $_{M=}|\!=_{IR}$, $_{M}|\!=_{IR}$, $_{M}|\!=_{T}$, $_{M}|\!=_{F}$, $_{M}|\!=_{TF}$ відповідають секвенційні числення $C^{GQ=IR}$, $C^{GQ\equiv IR}$, $C^{GQ\equiv T}$, $C^{GQ\equiv F}$, $C^{GQ\equiv TF}$.

Теорема 6 (коректності та повноти). $\Gamma\ |\!=_{*}\ \Delta \Leftrightarrow$ секвенція $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна в численні C*.

Детальний опис пропонованих секвенційних числень буде зроблено в наступних роботах.

Висновки

Досліджено програмно-орієнтовані логічні формалізми модального типу – чисті першопорядкові модальні логіки часткових немонотонних квазіарних предикатів. Запропоновано різновиди таких логік з предикатами строгої рівності та слабкої рівності. Описано семантичні моделі та мови цих логік. Увагу акцентовано на властивостях, пов'язаних із предикатами рівності, описано особливості заміни рівних. Визначено низку відношень логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій семантичній основі для досліджених логік запропоновано відповідні числення секвенційного типу.

Література

1. S. Abramsky, D.M. Gabbay, and T.S.E. Maibaum (eds), Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 1–5, Oxford University Press, 1993–2000.
2. D. Bjorner, M.C. Henson (eds), Logics of Specification Languages, EATCS Series, Monograph in Theoretical Computer Sciens, Springer, 2008.
3. V. Goranko, Temporal Logics, Cambridge University Press, 2023.
4. F. Kröger, S. Merz. Temporal logic and state systems, Springer Science & Business Media, 2008, 436 p.
5. М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк, Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів, Проблеми програмування, 2016, № 2–3, С. 73–86.
6. С.С. Шкільняк, Першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами слабкої та строгої рівності, Проблеми програмування. 2019, № 3, С. 28–44.

7. O. Shkilniak, S. Shkilniak. First-Order Sequent Calculi of Logics of Quasiary Predicates with Extended Renominations and Equality, UkrPROG′2022, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), 2023, pp. 3–18.
8. М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк, Секвенційні числення першопорядкових логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями та композицією предикатного доповнення, Проблеми програмування, 2020, № 2–3, С. 182–197.
9. О.С. Шкільняк. Модальні логіки немонотонних часткових предикатів. Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. 2015. Вип. 3. С. 141–147.
10. О.С. Шкільняк. Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів. Комп'ютерна математика. 2014, В. 2. С. 99–110.

References

1. S. Abramsky, D.M. Gabbay, and T.S.E. Maibaum (eds), Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 1–5, Oxford University Press, 1993–2000.
2. D. Bjorner, M.C. Henson (eds), Logics of Specification Languages, EATCS Series, Monograph in Theoretical Computer Sciens, Springer, 2008.
3. V. Goranko, Temporal Logics, Cambridge University Press, 2023.
4. F. Kröger, S. Merz. Temporal logic and state systems, Springer Science & Business Media, 2008.
5. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak, Pure first-order logics of quasiary predicates, in Problems in Progamming, 2016, No 2–3. pp. 73–86.
6. S. Shkilniak, First-order composition-nominative logics with predicates of weak equality and of strong equality, in Problems in Progamming, 2019, No 3, pp. 28–44.
7. O. Shkilniak, S. Shkilniak. First-Order Sequent Calculi of Logics of Quasiary Predicates with Extended Renominations and Equality, UkrPROG′2022, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), 2023, pp. 3–18.
8. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak, Sequent calculi of first-order logics of partial predicates with extended renominations and composition of predicate complement, in Problems in Progamming, 2020, No 2–3, pp. 182–197.
9. O. Shkilniak, Modal logics of non-monotone partial predicates, in Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv, Series Physics & Mathematics, 2015, **3**, pp. 141–147.
10. O. Shkilniak, Transitional modal logics of non-monotone quasiary predicates, in Computer Mathematics, 2014, **2**, pp. 99–110.

Одержано: 10.04.2024
Внутрішня рецензія отримана: 21.04.2024
Зовнішня рецензія отримана: 29.04.2024

Про авторів:

[1]*Шкільняк Оксана Степанівна*,
к.ф.-м.н., доцент.
http://orcid.org/0000-0003-4139-2525.

[2]*Шкільняк Степан Степанович*,
д. ф.-м. н., професор
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

Місце роботи авторів:

[1]Київський національний
університет імені
Тараса Шевченка,
тел. (+38) (044) 259-05-11
E-mail: oksana.sh@knu.ua
Сайт: http://csc.knu.ua

[2]Київський національний
університет імені
Тараса Шевченка,
Тел. (+38) (044) 521-33-45
E-mail: ss.sh@knu.ua,
Сайт: http://csc.knu.ua