УДК 519.168; 519.854.3 http://doi.org/10.15407/pp2024.02-03.053

В.О. Васянін

ЗАДАЧА РОЗПОДІЛУ І ОБ'ЄДНАННЯ ДИСКРЕТНИХ ПОТОКІВ КОРЕСПОНДЕНЦІЙ В ОКРЕМИХ ЗОНАХ ІЄРАРХІЧНОЇ КОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ

Стаття присвячена дослідженню підзадачі розподілу і об'єднання потоків кореспонденцій в окремих зонах магістральної мережі, яка виникає під час розв'язання загальної задачі оптимізації ієрархічної структури багатопродуктової комунікаційної мережі з дискретними потоками і параметрами. У багатопродуктовій мережі кожен вузол може обмінюватися кореспонденціями (продуктами, товарами, вантажами, повідомленнями) з іншими вузлами. Кореспонденція характеризується вузлом-джерелом, вузлом-стоком та величиною, яка для транспортних мереж задається кількістю тарно-штучних вантажів в упаковці уніфікованого розміру, а для мереж передачі даних – кількістю байт, кілобайт і т.п. У магістральній мережі всі кореспонденції транспортуються у транспортних засобах у транспортних блоках заданого розміру (ємності, обсягу), або передаються каналами зв'язку. Розмір транспортного блоку вимірюється кількістю одиниць кореспонденцій, що вміщуються в нього (наприклад, 40 тарно-штучних вантажів, 100 гігабайт). Усі магістральні вузли є сортувальними центрами, в яких кореспонденції спочатку сортуються за адресами (вузлами) призначення, а потім пакуються як збірні кореспонденції в транспортні блоки. Оскільки величина окремих кореспонденцій значно менша за розмір транспортного блоку, вони у процесі сортування можуть кілька разів і в різних вузлах об'єднуватися (упаковуватися) з кореспонденціями, що мають інші адреси призначення. У мережі виділено три рівня ієрархії – магістральний, зональний і внутрішній та чотири типи вузлів – магістральні вузли першого, другого і третього типу, що утворюють магістральний і зональний рівні мережі і вузли четвертого типу, підлеглі кожному магістральному вузлу і утворюють внутрішні рівні мережі. Типи вузлів відрізняються один від одного функціональними можливостями. Основним завданням дослідження є розробка математичної моделі і алгоритмів вирішення підзадачі оптимізації розподілу і об'єднанню (сортуванню) потоків кореспонденцій на зональних рівнях мережі. Показано, що вона може бути сформульована як задача лінійного програмування з блоковою структурою обмежень і для її вирішення може бути застосовано метод декомпозиції Данцига-Вулфа й інші методи цілочислового програмування. Для вирішення задачі на реальних мережах запропоновані наближені алгоритми, що базуються на побудові найкоротших шляхів.

Ключові слова: ієрархічні комунікаційні мережі, дискретні потоки і параметри, задачі оптимізації, комп'ютерне моделювання

V. Vasyanin

THE PROBLEM OF DISTRIBUTION AND MERGING OF DISCRETE CORRESPONDENCE FLOWS IN INDIVIDUAL ZONES OF A HIERARCHICAL COMMUNICATION NETWORK

The article is devoted to the study of the subproblem of distribution and merging of correspondence flows in separate zones of the backbone network, which arises when solving the general problem of optimizing the hierarchical structure of a multicommodity communication network with discrete flows and parameters. In a multicommodity network, each node can exchange correspondence (products, goods, cargo, messages) with other nodes. Correspondence is characterized by a source node, a drain node and a value, which for transport networks is given by the number of packaged goods in a package of a unified size, and for data transmission networks – by the number of bytes, kilobytes, etc. In the backbone network, all correspondence is transported in vehicles in transport units of a given size (capacity, volume) or transmitted via communication channels. The size of a transport block is measured by the number of units of correspondence that fit into it (for example, 40 packaged goods, 100 gigabytes). All trunk nodes are sorting centers in which correspondence is first sorted by destination addresses (nodes) and then packed as consolidated correspondence into transport blocks. Since the size of individual correspondence is much smaller than the size of the transport block, they can be combined (packed) with correspondence with other destination addresses several times and in different nodes during sorting. There are three levels of hierarchy in the network – backbone,zonal and internal

and four types of nodes – trunk nodes of the first, second and third types, forming the backbone and zonal levels of the network and nodes of the fourth type, which are subordinate to each trunk node and form internal levels of the network. Node types differ from each other in functionality.
The main task of the study is to develop a mathematical model and algorithms for solving the subproblem of optimizing the distribution and merging (sorting) of correspondence flows at the zonal levels of the network. It is shown that it can be formulated as a linear programming problem with a block structure of constraints and the Danzig-Wolf decomposition method and other methods of integer programming can be used to solve it. To solve the problem on real networks, approximate algorithms based on the construction of the shortest paths are proposed.
Keywords: hierarchical communication networks, discrete flows and parameters, optimization problems, computer modeling

Вступ

У більшості випадків існуючі і проєктовані територіально-розподілені комунікаційні мережі – транспортні, інформаційно-обчислювальні, паливно-енергетичні, поштові, телеграфні, телефонні тощо. є багаторівневими і складаються із децентралізованої розподіленої мережі (магістральної) і низових фрагментарних мереж (зональних і внутрішніх) на нижніх рівнях ієрархії. У цій роботі розглядаються багатопродуктові транспортні мережі і мережі передачі даних, для яких характерна наявність множини джерел і стоків потоків кореспонденцій (продуктів або вимог). Під кореспонденцією розуміється пара різних вузлів мережі, між якими є спрямований (адресний) дискретний потік елементів (наприклад, неділимих вантажів уніфікованого розміру, біт або символів) заданої величини. У багатопродуктовій мережі усі потоки кореспонденцій підлягають одночасній передачі з джерел у стоки. У загальному випадку на мережі може бути задана деяка множина видів (категорій) кореспонденцій, що відрізняються вагою, габаритами і іншими характеристиками, але мають загальні джерела і стоки.

У мережі виділено три рівні ієрархії – магістральний, зональний, внутрішній та чотири типи вузлів – вузли першого, другого, третього та четвертого типів. Вузли першого, другого і третього типу, що знаходяться на транспортних магістралях транспортної мережі або мережі передачі даних, а також - з'єднують їх ділянки маршрутів транспортних засобів або каналів зв'язку, становлять магістральну мережу. Усі магістральні вузли мають зони обслуговування, які утворюють зональні рівні магістральної мережі. Вузли четвертого типу знаходяться у внутрішній зоні обслуговування будь-якого магістрального вузла і разом із ним утворюють внутрішню мережу.

На рис. 1 показані фрагменти ієрархічної мережі, де i, j, k – магістральні вузли зі своїми магістральними зонами обслуговування (ЗОВ), m – вузли доставки та збору кореспонденцій у внутрішній зоні обслуговування кожного магістрального вузла (внутрішні мережі).

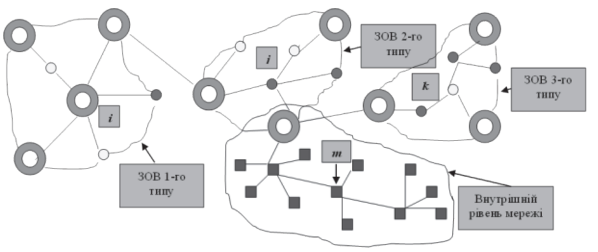

Рис. 1. Фрагменти ієрархічної мережі

Магістральні вузли різного типу різняться між собою функціональними можливостями, рівнем технічної оснащеності, кількістю обслуговуючого персоналу та ін. Деякі з них можуть сортувати потоки до всіх магістральних вузлів, інші – тільки до магістральних вузлів у зоні свого обслуговування. В окремих магістральних вузлах може бути заборонено сортування транзитних потоків кореспонденцій та обробка транзитних потоків транспортних блоків. У вузлах четвертого типу потоки не сортуються, а безпосередньо вирушають у відповідний магістральний вузол.

Структура магістральної мережі може бути відома, наприклад, спочатку задана досвідченими диспетчерами транспортної мережі, адміністраторами мережі передачі даних або визначена в результаті розв'язання задачі вибору структури мережі.

У [1] розглядається узагальнена задача упаковки та розподілу потоків кореспонденцій в ієрархічній мережі, розв'язання якої здійснюється в кілька етапів. На першому етапі розв'язується задача вибору ієрархічної структури магістральної мережі та схеми сортування кореспонденцій у вузлах мережі та пакування їх у транспортні блоки [2]. На другому етапі постає задача розподілу та маршрутизації потоків транспортних блоків зі збірними кореспонденціями, які були сформовані у процесі розв'язання першої задачі [3]. Під збірними кореспонденціями розуміються об'єднані в один транспортний блок тарно-штучні вантажі або повідомлення (потоки даних) з різними адресами призначення, які можуть не збігатися з адресою призначення транспортного блоку. Збірні кореспонденції утворюються для концентрації потоків у вузлах і ділянках маршрутів і максимального скорочення кількості транспортних блоків, необхідних для їх упаковки та транспортування або передачі у магістральній мережі.

Розв'язання задачі оптимізації структури мережі дає можливість отримати схему сортування потоків у вузлах мережі і витрати на їх сортування, а також витрати на навантаження-розвантаження вихідних і вхідних транспортних блоків.

У задачі вибору ієрархічної структури магістральної мережі виникає підзадача розподілу і об'єднання потоків кореспонденцій із вузлів другого і третього типу в зональних мережах. Згідно з принципами зонально-вузлового сортування вихідні потоки кореспонденцій з вузлів другого і третього типу розсортовуються у вузли першого типу, що лежать на межі зон їх обслуговування. Аналогічно у відповідних вузлах першого типу обробляються і потоки, що входять у вузли другого і третього типу, які надходять від вузлів з інших зон обслуговування.

У статті розглядається математична модель підзадачі розподілу і об'єднання потоків кореспонденцій із вузлів другого і третього типу в зональних мережах і алгоритми її вирішення. Показано, що структурні особливості такої підзадачі дозволяють використати для її вирішення метод декомпозиції Данцига-Вулфа [4] і отримати нижні оцінки розв'язку. Враховуючи, що реальні мережеві структури завжди функціонують в умовах невизначеності, дії випадкових чинників, дефіциту ресурсів, що динамічно змінюються з часом, а також за недостатньо точної початкової інформації, для практичного вирішення поставленої підзадачі запропоновані наближені алгоритми, що ґрунтуються на методах побудови найкоротших шляхів.

1. Постановка задачі

Нехай $G(N,P)$ – ієрархічна магістральна мережа з множиною неорієнтованих топологічних дуг P, $p=|P|$, множиною вузлів N, $n=|N|$ і $N=N_1\cup N_2\cup N_3$, де N_1,N_2,N_3 – множини вузлів першого, другого і третього типу відповідно. Під топологічною дугою розуміється фізичний відрізок лінії зв'язку, що сполучає два будь-які вузли з множини N так, що між даними вузлами на цьому відрізку немає більше жодного вузла з N. Вузли мережі відповідають пунктам відправлення, отримання і перевантаження потоків. На мережі задана цілочислова матриця потоків $A=\| a_{ij} \|_{n\times n}$, у якій потоки a_{ii} $i=\overline{1,n}$ представляють внутрішні потоки між вузлами четвертого типу в зоні обслуговування i-го вузла. Вони не підлягають розподілу по магістральній мережі, але повинні враховуватися у процесі розрахунку витрат на сортування дискретних потоків у вузлах першого, другого і третього типу (передбачається, що число вузлів четвертого типу у внутрішній зоні кожного i-го вузла першого, другого і третього типу відомо). Потоки a_{ij} з джерел i у стоки j, $i,j=\overline{1,n}$ повинні транспортуватися в транспортних блоках (контейнерах) об'єму $\omega >> a_{ij}$ і кожен потік може бути упакований у транспортний блок тільки цілком.

Перетворення потокової матриці A повинно враховувати принципи напряму потоків для вузлів другого і третього типу, згідно з якими вихідний потік із цих вузлів спрямовується (розсортовується) у вузли першого типу, що лежать на межі зон їх обслуговування. Нехай $Y = \| y_\xi \|_n$ – вектор, в якому підсумовуються додаткові об'єми обробки від перетворених потоків вузлів другого і третього типів (спочатку $Y = 0$); Z_i – зона обслуговування (ЗО), побудована на мережі G для i-го вузла; l, k – вузли першого типу в ЗО j-го і i-го вузлів, обслуговуючі відповідно $j \in N_2 \cup N_3$, $i \in N_2 \cup N_3$; S – множина пар ij, що кореспондуються. Тоді змістовна постановка задачі розподілу і упаковки потоків для вузлів другого і третього типу в зональних мережах полягає в перетворенні матриці A. Виконується наступним чином:

1. $\forall ij \in S$, $i, j \in N_1$ відповідні потоки a_{ij} не змінюються;
2. $\forall ij \in S$, $i \in N_1$, $j \in N_2 \cup N_3$, $l \neq i$ виконати:
$a_{il} \leftarrow a_{il} + a_{ij}$, $a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}$, $y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$, $a_{ij} \leftarrow 0$;
3. $\forall ij \in S$, $i \in N_2 \cup N_3$, $j \in N_1$, $k \neq j$ виконати:
$a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}$, $a_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}$, $y_k \leftarrow y_k + a_{ij}$, $a_{ij} \leftarrow 0$;
4. $\forall ij \in S$, $i, j \in N_2 \cup N_3$, $k \neq l$ виконати:
$a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}$, $a_{kl} \leftarrow a_{kl} + a_{ij}$, $a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}$, $y_k \leftarrow y_k + a_{ij}$, $y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$, $a_{ij} \leftarrow 0$;
5. $\forall ij \in S$, $i, j \in N_2 \cup N_3$, $k = l$, $j \notin Z_i$ виконати п. 3;
6. $\forall ij \in S$, $i, j \in N_2 \cup N_3$, $k = l$, $j \in Z_i$ перетворення a_{ij} не виконується.

Як видно з постановки задачі для усіх кореспонденцій, потоки яких підлягають операції перетворення, необхідно вказати вузли k і l. Покажемо, що задача визначення цих вузлів може бути зведена до задачі лінійного програмування без урахування обмежень на пропускні здібності дуг.

2. Математична модель і алгоритми вирішення задачі

Транспортування або передача потоків із вузлів другого і третього типу до обслуговуючих їх вузлів першого типу і навпаки повинна виконуватися транспортними засобами магістрального рівня або магістральними каналами зв'язку, тому для таких потоків обмеження на пропускні здібності дуг будуть враховані в магістральних моделях у процесі розподілу потоків між усіма типами вузлів у мережі. Найбільш суттєвими чинниками, що визначають якість схеми розподілу потоків вузлів другого і третього типу, є витрати на їх транспортування або передачу від вузла-джерела до вузла-споживача і можливості обробки потоків цих вузлів у вузлах першого типу. Оскільки в даній задачі здійснюється тільки адресація потоків з вузлів другого і третього типу в деякі вузли першого типу (що лежать на межі зон), а фактичний розподіл потоків з урахуванням їхніх обсягів та інших обмежень здійснюється при вирішенні задачі розподілу потоків на магістральному рівні, то транспортні витрати можна вважати не залежними від обсягу потоків і прийняти лінійними від відстані. Приймемо також, що витрати на додаткову обробку (пересортовування) одиниці потоку з вузлів другого і третього типу в обслуговуючих їх вузлах першого типу однакові в усіх вузлах.

Нехай $R = \| r_{ij} \|_{n \times n}$ – топологічна матриця, де

$$r_{ij} = \begin{cases} \text{довжині дуги, якщо } p_{ij} \in P, \\ \infty, \text{ якщо дуги } p_{ij} \text{ не існує.} \end{cases}$$

Розглянемо мережу $G_D(N, P_D)$ отриману з $G(N, P)$ таким чином. Визначимо на мережі G_D використовуючи матрицю R найкоротші шляхи від усіх вузлів $i \in N_2 \cup N_3$ до вузлів першого типу, що знаходяться в ЗО i-го вузла і найкоротші шляхи між усіма вузлами першого типу. В результаті отримаємо матрицю

$D = \| d_{ij} \|_{n \times n}$ в якій елементи нерівні нескінченності представляють множину дуг P_D мережі G_D.

Твердження 1. Нехай виконується одна з умов :

$$(i, j \in N_1 \wedge d_{ij} \neq \infty) \vee ((i \in N_1, j \in N_2 \cup N_3) \wedge$$
$$\wedge d_{ij} \neq \infty) \vee ((i \in N_2 \cup N_3, j \in N_1) \wedge d_{ij} \neq \infty \quad (1)$$

$$(i \in N_1, j \in N_2 \cup N_3) \wedge d_{ij} = \infty \quad (2)$$

$$(i \in N_2 \cup N_3, j \in N_1) \wedge d_{ij} = \infty \quad (3)$$

$$(i, j \in N_2 \cup N_3) \wedge d_{ij} = \infty \wedge j \notin Z_i \quad (4)$$

тоді: 1) найкоротший шлях між будь-якими вузлами, для яких виконується умова (1), складається з однієї дуги і співпадає з найкоротшим шляхом між цими вузлами, побудованими на мережі G; 2) найкоротший шлях між вузлами, для яких виконується (2) або (3) складається з двох дуг; 3) найкоротший шлях між вузлами, що задовольняють умові (4) складається з двох або трьох дуг.

Доведення. Для доведення 1) покажемо, що довжина будь-якого шляху, побудованого на мережі G_D між вузлами $i, j \in N_1$ і що містить більше за одну дугу не менша, ніж довжина шляху, що складається з однієї дуги. Припустимо, що знайдений найкоротший шлях π_{ij} від i до j, що містить понад одну дугу. Нехай π_{ij} заданий перерахуванням вузлів $\pi_{ij} = (i, k_1, k_2, ..., k_\xi, j)$. Тоді довжина будь-якої дуги (i, k_1), $(k_1, k_2), ..., (k_\xi, j)$ у мережі G_D визначається сумою довжин певної підмножини топологічних дуг мережі G. Якщо усі топологічні дуги, що становлять відрізки $(i, k_1), ..., (k_\xi, j)$ є підмножиною множини топологічних дуг, що входять в шлях π^*_{ij}, побудований на мережі G і представлений в мережі G_D однією дугою, то довжини шляхів π_{ij} і π^*_{ij} співпадають. У разі невиконання останньої умови, довжина шляху π_{ij} не може бути менше довжини π^*_{ij}, оскільки тоді шлях π^*_{ij} не був би найкоротшим. Отримане протиріччя і той факт, що в алгоритмі побудови найкоротших шляхів, серед декількох можливих найкоротших шляхів між заданими вузлами, першим завжди буде визначений шлях, що складається з меншого числа дуг, доводить твердження 1). Доведення 2) і 3) виходить з правил формування ЗО для вузлів, побудови мережі G_D, а також з міркувань, аналогічних наведеним для доведення твердження 1).

Слід зазначити, що для випадків (2)-(4) довжини найкоротших шляхів між вузлами i і j, побудованих в мережі G і G_D, можуть не співпадати. У разі (4), коли $j \in Z_i$ мають місце внутрішньо-зональні кореспонденції, потоки яких не піддаються додатковій переробці у вузлах першого типу, тому вони не розглядаються під час формування матриці A.

Далі вважатимемо, що кожна неорієнтована дуга $p \in P_D$ замінена на дві дуги з протилежною орієнтацією і p_D означає число усіх орієнтованих дуг в G_D.

Нехай $X^i = \| x^i_j \|^T$, $j = \overline{1, p_D}$, $i = \overline{1, n}$ – вектор-стовпець, що визначає потоки кореспонденцій, які виходять з вузла i по усіх дугах мережі G_D; $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$ – матриця потоків, в якій збережені тільки ті елементи a_{ij}, для індексів яких справедлива одна з умов (2)-(4). Інші елементи в матриці A замінені на нулі. Позначимо через $C^i = \| c^i_j \|$, $j = \overline{1, p_D}$, $i = \overline{1, n}$ вектор-рядок витрат на транспортування одиниці потоку кореспонденцій з i по дугах мережі G_D. Побудуємо для G_D матрицю інцидентності $E = \| e_{ij} \|_{n \times p_D}$ вузли-дуги і визначимо матриці $W^\xi = \| w^\xi_{ij} \|_{n \times p_D}$, $\xi = \overline{1, n}$; вектори-стовпці $V^i = \| v^i_j \|^T$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$; вектор-стовпець пропускних здатностей вузлів $H^W = \| h_i \|^T$, $i = \overline{1, n}$. Знак «^{T}» означає транспонування. Де відповідно:

$$e_{ij}=\begin{cases}1, \text{ якщо дуга } j \text{ спрямована до вузла } i,\\ -1, \text{ якщо дуга } j \text{ спрямована від вузла } i,\\ 0 \text{ в іншому випадку;}\end{cases}$$

$$w_{ij}^{\xi}=\begin{cases}1, \text{ якщо } e_{ij}=1,\\ 1, \text{ якщо } e_{ij}=-1 \text{ і } i=\xi,\\ 0 \text{ в іншому випадку;}\end{cases}$$

$$v_j^i=\begin{cases}-\sum_{\xi=1}^{n} a_{ij}, \text{ якщо } j=i,\\ a_{ij}, \text{ якщо } j=\xi.\end{cases}$$

Розв'язання задачі розподілу потоків у зональних мережах шукатимемо в класі задач лінійного програмування виду:

$$Min\ Z=C^1[p_D]X^1[p_D]+\ldots+ +C^n[p_D]X^n[p_D], \quad (5)$$

$$W^1[n,p_D]X^1[p_D]+\ldots+ +W^n[n,p_D]X^n[p_D]\le H^w[n], \quad (6)$$

$$\begin{aligned}&E[n,p_D]X^1[p_D]=V^1[n],\\ &\ldots\\ &E[n,p_D]X^n[p_D]=V^n[n],\end{aligned} \quad (7)$$

$$X^i[p_D]\ge 0 \text{ і цілі } i=\overline{1,n}. \quad (8)$$

Розглянемо особливості сформульованої задачі. Із Твердження 1 ясно, що для вирішення блокових задач, можна використати ефективні алгоритми побудови найкоротших шляхів за одним критерієм – мінімумом довжини шляху. Це витікає з того, що будь-який шлях для кореспонденцій з класу (2) або (3) складатиметься з двох дуг, а для кореспонденцій класу (4) – з двох або трьох дуг. Тому вибір оптимального шляху завжди робитиметься серед шляхів, що містять однакове число дуг, тобто усі шляхи еквівалентні з точки зору числа транзитних вузлів. Інша особливість задачі (5)-(8) полягає в тому, що обмеження на пропускні здатності вузлів необхідно враховувати тільки для вузлів першого типу, пов'язаних з вузлами другого і третього типів в мережі G_D хоча би однією дугою. Верхня межа числа обмежень (6), що враховуються, дорівнює величині n_1 – числу вузлів в множині N_1. Остання обставина забезпечує відносно невисоку розмірність задачі (5)-(8) і дозволяє використати для отримання нижніх оцінок її вирішення метод декомпозиції Данцига-Вулфа й інші методи цілочислового програмування [4, 5].

Підкреслемо, що у разі неврахування обмеження (6), отримане вирішення у процесі використання методу Данцига-Вулфа буде завжди цілочисловим, оскільки матриці обмежень у приведеній моделі є цілком унімодулярними, а праві частини обмежень цілочисловими векторами і вибір оптимального розв'язку здійснюється на многограннику з цілочисловими вершинами.

Оскільки реальні мережі функціонують з ресурсами, що динамічно змінюються з часом, і недостатньо точною початковою інформацією, для практичного вирішення задачі можна відмовитися від точних методів і використати алгоритми, засновані на методах побудови найкоротших шляхів. Приведемо алгоритми, що дозволяють вирішити задачу у випадках заданих і невідомих зон обслуговування вузлів.

Нехай $C^*=\| c_{ij}^* \|_{n\times n}$ – довідкова матриця найкоротших шляхів, побудована для мережі G_D, де

$$c_{ij}^*=\begin{cases}0, \text{ якщо } (i=j)\vee\\ \vee(i,j\in N_2\cup \mathrm{N}_3 \wedge j\in Z_i),\\ i, \text{ якщо } i \text{ і } j\\ \text{пов'язані однією дугою,}\\ k, \text{ якщо шлях від } i \text{ до}\\ j \text{ містить більше однієї дуги,}\end{cases} \quad (9)$$

де k – передостанній вузол на найкоротшому шляху від i до j; B_i^1 – множина вузлів першого типу в Z_i; $\{\alpha\mid\beta\}$ – множина α для яких вірне твердження β.

Відомо, що для побудованих найкоротших шляхів справедливе твердження $\forall i\in N\ \exists\ \{\pi_{ij}\mid j\in N\setminus i\}$ таке, що в $\forall j$ входить не більше за одну дугу, яка належить будь-якому найкоротшому шляху π_{ij}. Таким чином, найкоротші шляхи π_{ij} побудовані від вузла i є деревом з коренем в i, яке може бути однозначно описане рядком довідкової матриці C^*.

Алгоритм 1. Розподіл потоків в умовах заданих ЗОВ

1. Використовуючи матрицю R побудувати в мережі G найкоротші шляхи від $\forall i \in N_2 \cup N_3$ до $\forall j \in B_i^1$ і між усіма вузлами з множини N_1.

2. Використовуючи матрицю D, побудовану в п. 1, знайти найкоротші шляхи в мережі G_D. У процесі побудови шляхів сформувати довідкову матрицю C^* відповідно до (9).

3. $C \leftarrow 0$; $Y \leftarrow 0$. *** C – довідкова матриця об'єднання потоків

4. Для $\{i, j \mid (c_{ij}^* = i \vee c_{ij}^* = 0) \wedge i \neq j,\ \ i, j = \overline{1, n}\}$ виконати $c_{ij} \leftarrow i$.

5. Для $\{i, j \mid c_{ij}^* \neq i \vee c_{ij}^* \neq 0,\ \ i, j = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 6-12.

6. $\xi \leftarrow j$; $l \leftarrow 0$; $k \leftarrow 0$.

7. Поки $c_{i\xi}^* \neq i$ виконати пп. 8-10.

8. Якщо $l = 0$, то $l \leftarrow c_{i\xi}^*$.

9. $k \leftarrow c_{i\xi}^*$.

10. $\xi \leftarrow c_{i\xi}^*$. Перейти до п. 7.

11. Якщо $k = l$, то виконати перетворення $a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}$, $a_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}$, $y_k \leftarrow y_k + a_{ij}$, $a_{ij} \leftarrow 0$, інакше виконати перетворення $a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}$ $a_{kl} \leftarrow a_{kl} + a_{ij}$ $a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}$ $y_k \leftarrow y_k + a_{ij}$ $y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$, $a_{ij} \leftarrow 0$.

12. $c_{ij} \leftarrow k$. Перейти до п. 5.

13. Стоп.

Запис в рядках 4 і 5 вираження $i, j = \overline{1, n}$ означає циклічну зміну індексів, причому другий індекс змінюється швидше за перший. Такий запис аналогічний організації внутрішнього циклу по j і зовнішнього по i, коли обидва індекси змінюються від одиниці до n з одиничним кроком.

У результаті роботи Алгоритму 1 формуються матриці A, C і вектор Y. У векторі Y підсумовуються додаткові обсяги обробки від перетворених потоків вузлів другого і третього типу (спочатку $C = 0$ і $Y = 0$). Елементи довідкової матриці об'єднання (сортування) потоків $C = \| c_{ij} \|_{n \times n}$ визначаються таким чином:

$$c_{ij} = \begin{cases} i, \text{ якщо потік } a_{ij} \text{ адресується в вузол } j, \\ k, \text{ якщо потік } a_{ij} \text{ адресується в вузол } k, \\ 0, \text{ якщо } i = j. \end{cases}$$

Матриця C використовується для запам'ятовування схеми адресації (сортування) потоків у вузлах другого і третього типів.

Для роботи Алгоритму 1 необхідно знати множини B_i^1, $i \in N_2 \cup N_3$. Раніше відмічалося, що множини B_i^1 визначаються методом експертного аналізу із залученням досвідчених фахівців або автоматизованим способом після вирішення задачі вибору структури мережі. У випадку, якщо процедура уточнення структури мережі експертами з будь-яких причин виконана не була, може виявитися, що зони обслуговування для вузлів другого і третього типу точно не відомі. Тому доцільно мати алгоритм розподілу потоків у зональних мережах, якщо заданий тільки вектор $\theta = \|\theta_i\|_n$ що визначає типи вузлів, де $\theta_i = 1$, якщо $i \in N_1$ і $\theta_i = 0$, якщо $i \in N_2 \cup N_3$.

Алгоритм 2. Розподіл потоків за невідомих ЗОВ

1. Використовуючи матрицю R побудувати на мережі G найкоротші шляхи між усіма вузлами з одночасним формуванням довідкової матриці C^* згідно (9).

2. $C \leftarrow 0$; $Y \leftarrow 0$. *** C – довідкова матриця об'єднання потоків

3. Для $\{i \mid i = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 4-23.

4. Для $\{j \mid j = \overline{1, n}\}$ виконати пп. 5-22.

5. Якщо $i \neq j$ перейти до п. 6, інакше перейти до п. 22.

6. Якщо $\theta_i = 1 \wedge \theta_j = 1$ виконати $c_{ij} \leftarrow i$; перейти до п. 22.

7. $\xi \leftarrow j$; $l \leftarrow 0$; $k \leftarrow 0$.

8. Поки $c_{i\xi}^* \neq i$ виконати пп. 9-12.

9. Якщо $\theta_{c_{i\xi}^*} = 1$ виконати пп. 10-11, інакше перейти до п. 12.

10. Якщо $l = 0$, то $l \leftarrow c_{i\xi}^*$.

11. $k \leftarrow c^{*}_{i\xi}$.

12. $\xi \leftarrow c^{*}_{i\xi}$. Перейти до п. 8.

13. Якщо $\theta_i = 0$, то перейти до п. 14, інакше до п. 21.

14. Якщо $\theta_j = 0$, то перейти до п. 15, інакше до п. 19.

15. Якщо $l \neq 0$, то перейти до п. 16, інакше $c_{ij} \leftarrow i$ і перейти до п. 22.

16. Якщо $l \neq k$, то виконати п. 17, інакше перейти до п. 18.

17. $a_{kl} \leftarrow a_{kl} + a_{ij}$, $a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}$,

$y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$,

L1: $a_{ik} \leftarrow a_{ik} + a_{ij}$ $y_k \leftarrow y_k + a_{ij}$ $c_{ij} \leftarrow k$,

L2: $a_{ij} \leftarrow 0$ перейти до п. 22.

18. Виконати

L3: $a_{il} \leftarrow a_{il} + a_{ij}$ $a_{lj} \leftarrow a_{lj} + a_{ij}$ $y_l \leftarrow y_l + a_{ij}$ $c_{ij} \leftarrow l$ перейти до L2.

19. Якщо $k = 0$, то $c_{ij} \leftarrow i$ перейти до п. 22.

20. $a_{kj} \leftarrow a_{kj} + a_{ij}$. Перейти до L1.

21. Якщо $l = 0$, то $c_{ij} \leftarrow i$, інакше перейти до L3.

22. Перейти до п. 4. *** кінець циклу по j

23. Перейти до п. 3. *** кінець циклу по i

24. Стоп.

У Алгоритмі 2 покажчики k і l визначають відповідно перший і останній вузли першого типу, що знаходяться на найкоротшому шляху між i і j. Якщо між вузлами i і j немає вузлів першого типу, або немає взагалі ніяких вузлів, значення $k = l = 0$.

В результаті роботи Алгоритмів 1 і 2 формуються: перетворена матриця потоків кореспонденцій $A = \| a_{ij} \|_{n \times n}$; елементи довідкової матриці об'єднання потоків для вузлів другого і третього типу (матриця C). У рядках і стовпцях перетвореної матриці A для вузлів другого і третього типу ненульові значення будуть присутніми тільки для вузлів першого типу, які перебувають у зоні обслуговування вузлів другого і третього типу, а в потоках між вузлами першого типу будуть враховані усі потоки вузлів другого і третього типу.

Порівнюючи трудомісткість Алгоритмів 1 і 2 з трудомісткістю вирішення задачі (5)-(8) відзначимо, що використання простих процедур, що ґрунтуються на побудові найкоротших шляхів дозволяє вказати верхню межу асимптотичної трудомісткості – $O(n^3)$, тоді як точне вирішення цілочислової задачі (5)-(8) може мати експоненціальну оцінку [6].

Висновки

Резюмуючи обговорення задачі розподілу потоків в зональних мережах, відзначимо, що вона може бути сформульована як задача лінійного програмування з блоковою структурою обмежень і для її вирішення застосуємо метод декомпозиції Данцига-Вулфа й інші методи цілочислового програмування. Для вирішення задачі на реальних мережах запропоновані наближені алгоритми, засновані на побудові найкоротших шляхів. Верхня межа часової складності наближених алгоритмів складає $O(n^3)$, тоді як точне вирішення цілочислової задачі може мати експоненціальну оцінку. Тому перевагу у вирішенні загальної задачі вибору ієрархічної структури магістральної мережі слід віддати наближеним алгоритмам з огляду на їхню простоту, невелику трудомісткість і, як показали практичні дослідження [2], прийнятну точність розв'язку.

Література

1. O.M. Trofymchuk, V.A. Vasyanin, Simulation of Packing, Distribution and Routing of Small-Size Discrete Flows in a Multicommodity Network, *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015. **47**(7). P. 15-30.

   https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.30.

2. А.Н. Трофимчук, В.А. Васянин, Компьютерное моделирование иерархической структуры коммуникационной сети с дискретными многопродуктовыми потоками, *УСиМ*, 2016. № 2. С. 48-57.

https://doi.org/10.15407/usim.2016.02.048.

3. В.А. Васянин, Компьютерное моделирование распределения и маршрутизации дискретных многопродуктовых потоков в коммуникационной сети, *УСиМ*, 2016. № 3. С. 43-53. https://doi.org/10.15407/usim.2016.03.043.
4. G.B. Dantzig, Ph. Wolfe, Decomposition Algorithm for linear programming, *Econometrica*, 1961. Vol. 29. N. 4. P. 767-778.
5. C. Barnhart, N. Krishnan, P.H. Vange, Multicommodity Flow Problems, In Encyclopedia of Optimization: Second Edition, C.A. Floudas and P.M. Pardalos (Eds.). Springer, New York, 2009. P. 2354-2362.
6. М. Гэри, Д. Джонсон, Вычислительные машины и труднорешаемые задачи, М.: Мир, 1982. 416 с.

Одержано: 10.04.2024
Внутрішня рецензія отримана: 15.04.2024
Зовнішня рецензія отримана: 15.04.2024

Про автора:

Васянін Володимир Олександрович,
Доктор технічних наук,
Старший науковий співробітник
https://orcid.org/0000-0003-4046-5243

Місце роботи автора:

Завідувач відділу прикладної інформатики Інституту телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України, м. Київ,
E-mail: archukr@meta.ua
Сайт: https://itgip.org/