УДК 681.3 http://doi.org/10.15407/pp2024.02-03.069

О.І. Лисенко, В.Л. Шевченко, О.М. Тачиніна, С.О. Пономаренко, О.Г. Гуйда

СТРУКТУРА АЛГОРИТМУ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО РУХУ СКЛАДЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Робота присвячена розробці структури алгоритму моделювання оптимального руху складеної динамічної систем (СДС) по розгалуженій траєкторії. Складеними називають системи, що складаються з окремих підсистем, траєкторії польоту яких відрізняються та отримали назву розгалужених. Розгалужені траєкторії мають складаються із ділянок траєкторії, перші з яких будуть спільними для всієї СДС, а інші гілки траєкторії будуть відрізнятись, оскільки кожна підсистема рухається до своєї цілі по своїй ділянці траєкторії. Запропонований алгоритм дозволяє в реальному часі оптимізувати такі траєкторії та здійснювати оперативну корекцію траєкторій СДС при виникненні непередбачуваних факторів впливу. Відомо, що ефективність функціонування СДС між структурними перетвореннями залежить від координат взаємного розташування і швидкості кожної підсистеми та вибору оптимальних моментів часу для структурних перетворень. Принципово важливим є оперативність визначення цих параметрів в процесі польоту. Знайдено необхідні умови оптимальності траєкторії руху СДС, які є універсальними для задач з будь-яким кінцевим числом гілок траєкторії. Реалізація запропонованих умов дозволить зменшити кількість обчислювальних процедур при розрахунках керування в умовах невизначеності початкових умов. Ці умови є методологічною основою для розроблення обчислювальних алгоритмів моделювання оптимальних траєкторій руху СДС. Необхідні умови оптимальності мають чіткий фізичний зміст і є технологічними та зручними для використання. Результати досліджень, що представлені в статті, є важливими і актуальними для побудови законів траєкторного керування існуючими і перспективними СДС.

Ключові слова: оптимальне керування, складена динамічна системи, розгалужені траєкторії, математичне моделювання, алгоритмічне забезпечення.

O. I. Lysenko, V. L. Shevchenko, O. M. Tachynina, S. O. Ponomarenko, O. H. Guida

STRUCTURE OF THE ALGORITHM FOR MODELING OPTIMAL MOVEMENT OF A COMPOUND DYNAMIC SYSTEM

The work is devoted to the development of the structure of the algorithm for modeling the optimal movement of complex dynamic systems (SDS) along a branched trajectory. Complex systems are called systems consisting of separate subsystems, the flight trajectories of which differ and are called branched. Branched trajectories should consist of trajectory segments, the first of which will be common to the entire SDS, and the other trajectory branches will be different, as each subsystem moves to its goal along its own trajectory segment. The proposed algorithm makes it possible to optimize such trajectories in real time and to carry out operational correction of SDS trajectories in the event of the occurrence of unpredictable influencing factors. It is known that the effectiveness of the SDS functioning between structural transformations depends on the coordinates of the mutual location and speed of each subsystem and the choice of optimal moments of time for structural transformations. The efficiency of determining these parameters during the flight is fundamentally important. The necessary conditions for the optimality of the trajectory of the SDS movement are found, which are universal for problems with any finite number of trajectory branches. The implementation of the proposed conditions will allow to reduce the number of computational procedures in the control calculations in conditions of uncertainty of the initial conditions. These conditions are the methodological basis for the development of computational algorithms for modeling the optimal trajectories of the SDS movement. The necessary optimality conditions have a clear physical meaning and are technological and user-friendly. The results of the research presented in the article are important and relevant for the construction of the laws of trajectory control of existing and prospective SDS.

Keywords: optimal control, complex dynamic systems, branched trajectories, mathematical modeling, algorithmic support.

Вступ

Актуальність теми. Сучасні досягнення у створенні складних механічних об’єктів, систем зв’язку і передачі даних та високопродуктивних бортових обчислювачів відкривають шлях до проєктування складних технічних систем нового покоління, здатних вирішувати єдину технічну задачу без механічного зв'язку та лише на основі інформаційного обміну між окремими підсистемами таких об'єктів.

Прикладами таких систем є складені динамічні системи (СДС). До них відносяться динамічні системи, що складаються із окремих підсистем (сукупності об’єктів), які взаємодіють між собою у польоті, а синтез керування рухом кожної підсистеми відбувається скоординовано. При цьому підсистеми можуть функціонувати спільно або окремо. Їхнє розділення відбувається за окремими командами, що подаються у строго визначеному просторовому положенні кожної підсистеми і в задані мементи часу.

Прикладами сучасних СДС є багаторазові авіаційно-космічні системи (АКС) типу «повітряний старт» та групи безпілотних літальних апаратів (БПЛА), які утворюють «літаючі сенсорні мережі», або рої (роботизовані сенсорні мережі) на основі бездротових телекомунікаційних систем.

У науковій літературі прийнято називати траєкторії складених динамічних систем розгалуженими, оскільки вони складаються із початкової ділянки спільного руху всієї системи та ділянок індивідуального руху окремих підсистем СДС окремими гілками траєкторії.

Встановлено [1, 2], що ефективність функціонування СДС між структурними перетвореннями залежить від координат взаємного розташування і швидкості кожної підсистеми та вибору оптимальних моментів часу для структурних перетворень. Принципово важливим є оперативність визначення цих параметрів у польоті.

Тому задача оперативної побудови оптимальної розгалуженої траєкторії руху СДС у польоті є ключовою та визнається у світі актуальною як з наукової, так і практичної точок зору [1, 2, 5].

Аналіз стану питання.

Для розв’язку задачі оптимального керування СДС на розгалужених траєкторіях використовується математична теорія імпульсних диференціальних рівнянь із розривною правою частиною [4]. Поняття «розривної системи» є узагальнюючим і охоплює значний клас динамічних об’єктів: із імпульсним впливом, із розривами, багатоступеневих, із релейним керуванням, із проміжними умовами, складених та ін. Математичні моделі розривних систем в основному описують диференціальними рівняннями з розривними (кусково-неперервними) правими частинами. Теорія розривних динамічних систем та методи пошуку оптимальних рішень для таких систем розроблені такими дослідниками, як Л. С. Понтрягін, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелідзе, М. М. Красовський. В. А. Троїцький, В. І. Уткін. Для конкретних різновидів розривних систем теоретичні і прикладні результати отримані в роботах В. А. Боднера, Л. Т. Ащепкова, Б. Ф. Кротова, Брайсона Хою Ши, А. М. Самойленка, Н. А. Перестюка, А. А. Асланяна, О. І. Лисенка та інших авторів.

Особливістю теоретичних результатів цих авторів є те, що вони в термінах розривних систем сформулювали постановки задач оптимального керування і запропонували оптимальні рішення для конкретних динамічних системам із наявністю головного елемента (головної підсистеми) СДС. У цих роботах для створення математичних моделей розривних систем використовувався метод довизначення, або метод лінійних часових перетворень. У такій постановці задача керування СДС формулювалася як задача керування розривною системою із виділеним пріоритетним елементом, відносно якого відбувалось застосування теорії розривних систем для окремих складових. Наслідком такої постановки задачі було збільшення розмірів вектора стану і вектора керування розривної системи. Їхня кількість збільшувалась пропорційно кількості гілок траєкторії СДС. А постановка задачі пошуку оптимальної розгалуженої траєкторії для всієї

СДС (цілісна, узагальнена постановка задачі) не розглядалася.

На сьогоднішній день теоретичні рішення, отримані попередніми дослідниками, не доведені до прикладного застосування, а проєктні рішення для синтезу траєкторій руху СДС у реальному масштабі часу відсутні. Це пояснюється складністю самих математичних моделей і методів їхнього численного розв’язку, оскільки використання абстрактно-формального опису задач оптимізації розгалужених траєкторій СДС призводить до збільшення розмірності вектора стану та розмірності вектора керування розривною системою. І ця розмірність збільшується пропорційно кількості гілок траєкторії, що призводить до неможливості практичної реалізації алгоритму оперативної оптимізації розгалужених траєкторій у бортовому комп’ютері.

Також не були проведені прикладні дослідження, які б ґрунтувались на адекватному фізичному уявленні про характер – «схему» руху СДС гілками траєкторії і пояснили б механізм побудови оптимальних розгалужених траєкторій за довільною схемою з можливістю організації обчислювальних процедур.

Як результат, на практиці вже реально існують СДС типу «повітряний старт» та «літаючі сенсорні мережі», але для керування ними застосовуються методи, що не дозволяють повністю реалізувати увесь потенціал і технічні можливості діючих СДС. Вирішення цієї проблеми вимагає побудови достатніх умов оптимальності розгалужених траєкторій руху СДС. Причому ці вимоги мають бути сформульовані у зручній для реалізації в реальному масштабі часу формі (для оперативного синтезу траєкторій).

У зв’язку з цим вирішення проблеми оперативного синтезу оптимальних розгалужених траєкторій руху та оперативної оптимізації процесу керування рухом СДС на існуючих бортових обчислювальних засобах є нагальною науково-технічною потребою. А дослідження, що виконані в даній статті, є актуальними для систем траєкторного керування сучасними та перспективними СДС [3, 5, 6].

Викладення основного матеріалу.

СДС являє собою сукупність динамічних підсистем, які в процесі руху можуть об'єднуватися в групи для спільного руху, розділятися з метою самостійного маневрування, здійснювати взаємний вплив на динаміку руху [1, 3].

Розглянемо приклад руху гіпотетичної СДС за схемою, зображеною на рис. 1.

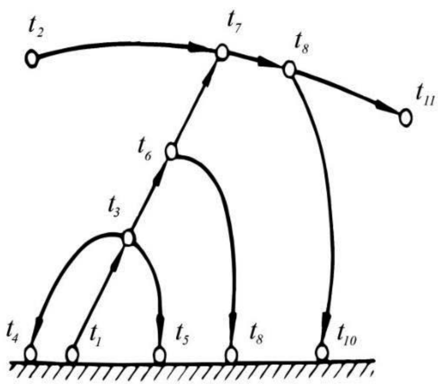

Рис. 1. Схема розгалуженої траєкторії

В момент часу t_1 чотири підсистеми в єдиному блоці починають рух, в процесі якого в момент часу t_3 відбуваються відділення від вихідного блоку двох допоміжних підсистем, які закінчують свій рух у моменти часу t_4 і t_5. У момент часу t_6 відокремлюється третя допоміжна підсистема, закінчується рух у момент часу t_8. У момент часу t_7 відбувається з'єднання четвертої підсистеми з підсистемою, що почала рух в момент часу t_2. Після закінчення спільного руху на момент часу t_9 підсистеми розстиковуються і здійснюють самостійне маневрування, що закінчується в моменти часу t_{10} і t_{11}. Траєкторія аналізованої СДС належить до класу розгалужених. Задамо критерій ефективності з урахуванням характеру руху підсистем вздовж усіх гілок траєкторії. Необхідно змоделювати оптимальну траєкторію руху СДС відповідно до заданого критерію. У вирішенні таких завдань можливі розгалужені траєкторії різної складності. Наразі сформульовані умови оптимальності тільки часткових схем розгалужених траєкторій.

Сформулюємо в термінах теорії оптимального керування достатні умови існування оптимального керування СДС довільної схеми. Розглянемо найпростіші розгалужені траєкторії, часові діаграми яких представлені на рис.2.

Рівняння, що описують рух СДС за траєкторією з розділенням (рис. 2, а), мають вигляд [3, 5]:

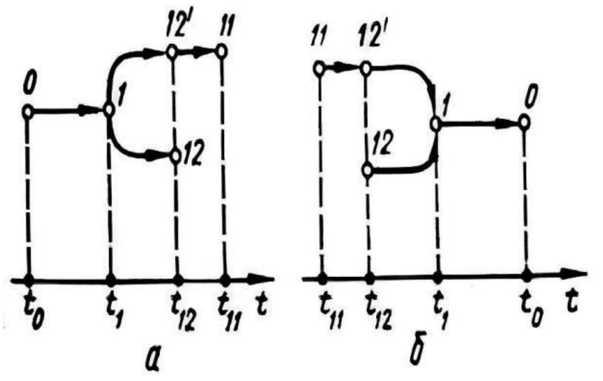

Рис. 2. Часова діаграма найпростішої розгалуженої траєкторії (а – з розділенням; 2 – з групуванням)

$$ {}_1\dot{x} = {}_1 f\left({}_1 x, {}_1 u\right),\ \ t \in \left[t_0, t_1\right]; $$

$$ {}_{11}\dot{x} = \begin{cases} {}_{11}^{12} f\left({}_{11}x, {}_{11}u; {}_{12}x, {}_{12}u\right), & t \in \left[t_1, t_{12}\right]; \\ {}_1 f\left({}_{11}x, {}_{11}u\right), & t \in \left[t_{12}, t_{11}\right]; \end{cases} \tag{1} $$

$$ {}_{11}\dot{x} = {}_{12} f\left({}_{12}x, {}_{12}u; {}_{11}x, {}_{11}u\right),\ \ t \in \left[t_0, t_{12}\right]; \tag{2} $$

де ${}_1 x\left(t\right) \in R^n$, ${}_1 u\left(t\right) \in R^{m_l}$, ${}_l u\left(t\right) \in \Omega_l$ $(l = 1,\ 11,\ 12\ )$. векторний критерій якості функціонування СДС запишемо в адаптивній формі:

$$ I = S({}_1 x(t_0), t_0; {}_1 x(t_1), t_1; {}_{11}x(t_{12}), {}_{12}x(t_{12}), t_{12}; \\ {}_{11}x(t_{11}), t_{11}) + I_1 + I_{11} + I_{12}; $$

$$ I_1 = \int_0^1 \Phi_1\left({}_1 x, {}_1 u\right) dt, $$

$$ I_{12} = \int_1^{12} \Phi_{12}\left({}_{12}x, {}_{12}u; {}_{11}x, {}_{11}u\right) dt; $$

$$ I_{11} = \int_1^{12} \Phi_{11}^{12}\left({}_{12}x, {}_{12}u; {}_{11}x, {}_{11}u\right) dt + \\ + \int_{12}^{11} \Phi_{11}\left({}_{11}x, {}_{11}u\right) dt. $$

Критерії оптимальності відповідає формі Більця, згідно з якою функція S(·) за фізичним змістом відображає вимоги до параметрів руху окремих підсистем. Такими параметрами є значення координат на початку і в кінці кожної гілки траєкторії, а також значення самих моментів часу структурних перетворень СДС. Інтегральні члени критерію ставлять вимоги до характеру руху підсистеми вздовж відповідних гілок траєкторії. Взаємний вплив підсистеми в інтервалі часу $\left[t_1, t_{12}\right]\cdot$ відображено у рівнянні (1) і (2) та в часткових інтегральних умовах I_{11}, I_{12}. Рівняння, що описують критерій і динаміку руху підсистем, які групуються (рис. 2, б), мають той же вигляд, як і для системи з поділом, і відрізняються лише тим, що $t_{11} < t_{12} < t_1 < t_0$.

Опускаючи доказ [1], сформуємо теорему з урахуванням двох систем, зображених на рис. 2. Рівняння ${}_1 u\left(t\right) t \in \left[t_0, t_1\right]$, ${}_{11}u\left(t\right) t \in \left[t_1, t_{11}\right]$, ${}_{12}u\left(t\right) t \in \left[t_1, t_{12}\right]$, вектори фазових координат ${}_1 x(t_0)$, ${}_1 x(t_1)$, ${}_{11}x(t_{12})$, ${}_{12}x(t_{12})$, ${}_{11}x(t_{11})$ і момент часу t_0, t_1, t_{11}, t_{12} слід вибирати такими, щоб функціонал I приймав найменше можливе значення.

Теорема. Нехай ${}_1 x(t)$, ${}_1 u\left(t\right)$ $t \in \left[t_0, t_1\right]$; ${}_{11}u\left(t\right)$, ${}_{12}x(t)$, ${}_{12}u\left(t\right)$ $t \in \left[t_1, t_{12}\right]$; ${}_{11}x(t_{11})$, ${}_{11}u\left(t\right)$ $t \in \left[t_{12}, t_{11}\right]$ - допустимі процеси.

Для оптимальності процесів потрібне існування рішень ${}_1\lambda\left(t\right)$ $t \in \left[t_0, t_1\right]$, ${}_{11}^{12}\lambda\left(t\right)$, ${}_{12}\lambda\left(t\right)$ $t \in \left[t_1, t_{12}\right]$, ${}_{11}\lambda\left(t\right) t \in \left[t_{12}, t_{11}\right]$, зв'язаних векторних рівнянь.

$$ {}_1\dot{\lambda} + \partial H_1 / \partial_1 x = 0, $$

$$ {}_{11}^{12}\dot{\lambda} + \partial H_{11}^{12} / \partial_{11} x + \partial H_{12} / \partial_{11} x = 0, $$

$$ {}_{12}\dot{\lambda} + \partial H_{11}^{12} / \partial_{12} x + \partial H_{12} / \partial_{12} x = 0, $$

$$ {}_{11}\dot{\lambda} + \partial H_{11} / \partial_{11} x = 0 $$

таких, що справедливі умови:

трансверсальності для пов'язаних функцій і гамільтоніанів

$$ \partial S / \partial_1 x(t_0)\big|_\Lambda - (-1)^\beta {}_1\lambda(\hat{t}_0) = 0, $$

$$ \partial S / \partial t_0\big|_\Lambda + (-1)^\beta H_1\big|_\Lambda = 0, $$

$$ \partial S / \partial_{1i} x(t_i)\big|_\Lambda - (-1)^\beta {}_{1i}\lambda(\hat{t}_{1i}) = 0\ \ (i = 1, 2), $$

$$ \partial S / \partial t_{11}\big|_\Lambda - (-1)^\beta H_{11}\big|_\Lambda = 0; $$

стрибка для сполучених функцій та гамільтоніанів

$$\partial S/\partial_1 x(t_1)\big|_\Lambda + (-1)^{\beta}\left[\,{}_1\lambda(\hat t_1) - {}^{12}_{11}\lambda(\hat t_1) - {}_{12}\lambda(\hat t_1)\right] = 0,$$

$$\partial S/\partial t_1\big|_\Lambda - (-1)^{\beta}\left(H_1\big|_\Lambda - H^{12}_{11}\big|_\Lambda - H_{12}\big|_\Lambda\right) = 0,$$

$$\partial S/\partial_{11} x(t_{12})\big|_\Lambda + (-1)^{\beta}\left[\,{}^{12}_{11}\lambda(\hat t_{12}) - {}_{11}\lambda(\hat t_{12})\right] = 0,$$

$$\partial S/\partial t_{12}\big|_\Lambda - (-1)^{\beta}\left(H^{12}_{11}\big|_\Lambda - H_{12}\big|_\Lambda - H_{11}\big|_\Lambda\right) = 0;$$

Мінімум гамільтоніанів у момент часу $t \in \left[t_h, t_1\right]$ для рівняння ${}_l u\left(t\right) \in \Omega_l$

$$H_1\big|_\Lambda = \min H_l\big|_{\Lambda.\,{}_l u(t)} \; (l = 1, h = 0; l = 11, h = 12);$$

Мінімум лінійної комбінації гамільтоніанів у моменти часу $t \in \left[t_1, t_{12}\right]$ для управління ${}_l u\left(t\right) \in \Omega_l$ (l=11,12)

$$H^{12}_{11}\big|_\Lambda + H_{12}\big|_\Lambda = \min\left(H^{12}_{11}\big|_{\Lambda.\,{}_{11}u(t),{}_{12}u(t)} + H_{12}\big|_{\Lambda.\,{}_{11}u(t),{}_{12}u(t)}\right)$$

Тут знак Λ означає оптимальність змінних та параметрів; символ $\big|_{\Lambda.\xi}$ означає, що вираз визначається за умови оптимальних величинах змінних та параметрів, крім ξ; параметр β приймає значення 1 або 2 відповідно: 1 - для схеми з поділом; 2 – для схеми з групуванням (рис. 2);

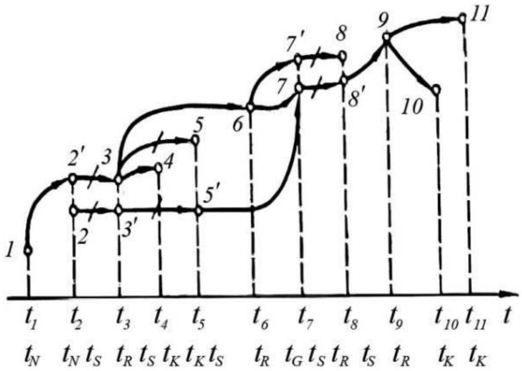

Рис. 3. Часова діаграма розгалуженої траєкторії

$$H_l(\cdot) = \Phi_l(\cdot) + {}_l\lambda^T\,{}_l f(\cdot) \;\; (l = 1,\, 11,\, 12),$$
$$H^{12}_{11}(\cdot) = \Phi^{12}_{11} + {}^{12}_{11}\lambda^T\,{}^{12}_{11}f(\cdot).$$

Зазначимо, що для механічних систем умова стрибка по n-й фазовій координаті, що позначає масу, має вигляд [4-6]

$$\xi_{11} \ge 0,\;\; \xi_{12} \ge 0,\; \xi_{11} + \xi_{12} = 1.$$

Доказ теореми можна провести за методом, викладеним у роботі [1] якщо розглядати СДС як систему зі змінною структурою та розміром вектора стану.

Відповідно до викладеної теореми, розглядаючи складну розгалужену траєкторію як сукупність простих, сформулюємо структуру алгоритму моделювання оптимального руху СДС.

Для оптимальності розгалуженої траєкторії довільної схеми необхідне існування в інтервалах часу між моментами t_N (початок руху), t_R (розділення), t_G (групування), t_K (кінця руху підсистеми) розв'язання пов’язаних векторних рівнянь

$$\dot{{}_L\lambda} + \partial H_l\,/\,\partial_L x + \sum_q^M \partial H_q\,/\,\partial_L x = 0, \quad (3)$$

де L – індекс ділянки розгалуженої траєкторії;

M, q— відповідно число підсистем, динамічні властивості яких залежать від фазових координат L-ї ділянки, і індекси ділянок розгалуженої траєкторії, якими переміщуються ці підсистеми. Для таких рівнянь справедливі умови:

1) трансверсальності в моменти $\hat t_N = \hat\tau_1$ і $\hat t_K = \hat\tau_2$

$$\partial S/\partial_L x(\tau_i)\big|_\Lambda - (-1)^i\,{}_L\lambda(\hat\tau_i) = 0 \qquad (i = 1, 2),$$
(4)

$$\partial S/\partial \tau_i\big|_\Lambda + (-1)^{\,i} H_L\big|_\Lambda + \\ + \sum_\nu^P \left(H_\nu\big|_{\Lambda,\hat\tau_i - 0} - H_{\nu'}\big|_{\Lambda,\hat\tau_i + 0}\right) = 0, \quad (5)$$

де P - кількість підсистем, динамічні властивості яких змінюються в момент початку або закінчення руху підсистеми, що переміщається по L-тій ділянці траєкторії;

ν - індекси ділянок розгалуженої траєкторії, якими переміщуються ці підсистеми;

2) стрибка в моменти $\hat t_R = \hat\tau_1$ і $\hat t_G = \hat\tau_2$ пов'язані з поділом підсистеми, що переміщається по L-тій ділянці, на r підсистем, або групуванням r-підсистем в підсистему, яка переміщується по L-тій ділянці розгалуженої траєкторії,

$$\partial S/\partial_L x_i(\tau_i)\big|_\Lambda - (-1)^i\,{}_L\lambda_j(\hat\tau_i) - \\ -(-1)^i \times \sum_{q'}^R {}_{q'}\lambda_j(\hat\tau_i) = 0 \\ (j = 1, n-1; i = 1, 2),$$

$$\partial S/\partial_L x_n(\tau_i)\big|_\Lambda + (-1)^i\,{}_L\lambda_n(\hat\tau_i) - \\ -(-1)^i \times \sum_{q'}^R \xi_{q'}\,{}_{q'}\lambda_n(\hat\tau_i) = 0, \quad (6)$$

$$\xi_{q'} \geq 0, \ \sum_{q'}^{R} \xi_{q'} = 1 \ \ (i = 1,2);$$

$$\partial S / \partial \tau_i \big|_{\Lambda} - (-1)^{\ i} H_L \big|_{\Lambda} + (-1)^i \sum_{q'}^{r} H_{q'} \big|_{\Lambda} +$$

$$+ \sum_{\nu'}^{P'} \left(H_{\nu'} \big|_{\Lambda, \hat{\tau}_i - 0} - H_{\nu'} \big|_{\Lambda, \hat{\tau}_i + 0} \right) = 0,$$

де q індекси ділянок розгалуженої траєкторії, по яких переміщаються підсистеми після поділу або перед групуванням;

P' — кількість підсистем, що не беруть участь у поділі або угрупованні, але змінюють динамічні властивості в моменти часу t_R і t_G;

ν' - індекси ділянок розгалуженої траєкторії, якими переміщуються зазначені підсистеми. Фазова координата ${}_L x_n(t)$, яка описує зміну маси.

Умова стрибка на μ-ій ділянці розгалуженої траєкторії в момент часу $\hat{t}_S$, який співпадає з моментом часу структурних перетворень у СДС, що не належать до μ-тої ділянки, але впливають на нього, має вигляд

$$\partial S / \partial_{\mu} x(t_S) \big|_{\Lambda} - {}_{\mu}\lambda(\hat{t}_S - 0) + {}_{\mu}\lambda(\hat{t}_S + 0) = 0; \quad (8)$$

3) мінімуму лінійної комбінації гамільтоніанів у моменти часу між $\hat{t}_N$, $\hat{t}_R$, $\hat{t}_G$, $\hat{t}_K$

$$\sum_{q''}^{L} H_{q''} \big|_{L} = \min_{q'' u \hat{I} W_{q''}} \sum_{q''}^{L} H_{q''} \big|_{L, q'' u}, \qquad (9)$$

де Λ — кількість підсистем, які мають взаємовпливове керування у вказаних інтервалах часу;

q'' — індекси ділянок розгалуженої траєкторії, за якими ці підсистеми переміщуються.

Сформульоване правило є методологічною основою для синтезу обчислювальних алгоритмів, які дозволяють моделювати оптимальні траєкторії руху різноманітних СДС. Програма моделювання оптимальних розгалужених траєкторій може стати частиною математичного забезпечення системи автоматизованого проєктування перспективних СДС.

Приклад складання структури алгоритму моделювання оптимального руху складової динамічної системи за гілкою траєкторії.

За заданою схемою розгалуженої траєкторії (рис. 1) складемо її часову діаграму (рис. 3), на якій в послідовному порядку розташовані моменти часу структурних перетворень на схемі руху СДС із зазначенням їхньої належності до відповідного моментам часу: t_N, t_R, t_G, t_K. Перекресленою стрілкою відмічені ділянки траєкторії, пересуваючись уздовж яких підсистеми взаємодіють.

Адитивний критерій оптимальності визначається термінальною частиною $S(\cdot)$, яка залежить від координат підсистем в моменти часу t_i $(i = \overline{1,11})$ та цих моментів часу, а також сумою часткових інтегральних критеріїв $I_i = \int_{t_a}^{t_b} \Phi_i(\cdot) dt$ $(i = \overline{1,15})$; $a \neq b$, $a = \overline{1,11}$; $b = \overline{1,11}$), записаних для кожної ділянки гілки траєкторії (див. рис. 3). який закладений між розташованими на ній сусідніми точками. Рух підсистем гілками траєкторії описується рівняннями $\dot{x} = f(\cdot)$, де $f(\cdot)$ — функція, що залежить від керувань і координат підсистеми, а також від керувань і координат взаємодіючої підсистеми. (На ділянках з перекресленими стрілками). Згідно з правилом для оптимальності траєкторії (див. рис. 3) необхідно вирішити 15 сполучених векторних рівнянь типу (3), складених за даними табл. 1, що задовольняють 39 умов типу (4)-(9), які задаються табл. 2 і 3. Як індекс гілки або її ділянки використовується послідовність цифр, відповідних початку і кінцю гілки або її ділянки (див. рис. 3).

Таблиця 1

Умова мінімізації (3)

L	M	q
1, 2′	0	—
2′, 3	1	2, 3′
2′, 3’	1	2′, 3
3, 4	0	—
3, 6	0	—
3′, 5′	1	3, 5
3, 5	1	3′, 5′
5′, 7	0	—
6, 7	0	—
6, 7′	0	—

7′, 8	1	7, 8′
7, 8'	1	7′, 8
8′, 9	0	—
9, 10	0	—
9, 11	0	—

Таблиця 2

Умова мінімізації (9)

Інтервал	Λ	q''
$[t_1, t_2]$	1	1, 2′
$[t_2, t_3]$	2	2′, 3; 2, 3′
$[t_3, t_4]$	1	3, 4
$[t_3, t_5]$	2	3, 5; 3′, 5′
$[t_3, t_6]$	1	3, 6
$[t_5, t_7]$	1	5′, 7
$[t_6, t_7]$	1	6, 7
$[t_6, t_7]$	1	6, 7′
$[t_7, t_8]$	2	7′, 8; 7, 8′
$[t_8, t_9]$	1	8′, 9
$[t_9, t_{10}]$	1	9, 10
$[t_9, t_{11}]$	1	9, 11

Для завершення розв'язання задачі моделювання оптимальної розгалуженої траєкторії необхідно доповнити перераховані диференціальні рівняння і алгебраїчні диференціальні рівняння руху підсистем гілками траєкторії. Дані таблиці 1-3 є вихідною інформацією, яка дозволяє перейти до застосування стандартних підпрограм вирішення звичайних диференціальних рівнянь і алгебраїчних рівнянь і тим самим практично завершити рішення задачі моделювання оптимальної траєкторії СДС.

Зазначимо, що послідовність моментів часу $t_1 < t_2 < ... < t_{11}$ у задачі з вільним часом задається, виходячи з фізичних міркувань, і є наближеною. Якщо в результаті розв'язання задачі вона порушується (зміна послідовності розгалужень траєкторії допустимо фізичним змістом завдання), необхідно повторити розрахунки для нової уточненої послідовності моментів часу.

Таблиця 3

Умова трансверсальності стрибка в момент часу t_i

Рівняння	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}
(4)	L=1, 2′; i=1	L=2, 3′; i=1	—	L=3, 4; i=2	L=3, 5; i=2	—	—	L=7′, 8; i=2	—	L=9, 10; i=2	L=9, 11; i=2
(5)	L=1, 2′; i=1; P=0	L=2, 3′; i=1; P=1; v=1, 3	—	L=3, 4; i=2; P=0	L=3, 5; i=2; P=1; v=3′, 7	—	—	L=7′, 8; P=1 v=7, 9	—	L=9, 10; i=2	L=9, 11; i=2
(6)	—	—	L=2, 3′; i=1; r=3; q′=3,6; 3,4; 3, 5	—	—	L=3, 6; i=1; r=2; q′=6, 7′; 6, 7	L=7, 8′; i=2; r=2; q′=6, 7; 5′, 7	—	L=8′, 9; i=1; r=2; q`=9, 10; 9, 11	—	—
(7)	—	—	L=2′, 3; i=1; r=3; q′=3, 6; 3, 5; 3, 4; P′=1; v′=2, 5′	—	—	L=3, 6; i=1; r=2; q′=6, 7′; 6, 7	L=7, 8′; i=2; r=2; q′=6, 7; 5′, 7; P′=1; v=6, 8	—	L=8′, 9; i=1; r=2; q′=9, 10; 9, 11; P′=0	—	—
(8)	—	μ=1, 3	μ=2, 5′	—	μ=3′, 7	—	μ=6, 8	μ=7, 9	—	—	—

На закінчення зазначимо, що завдання оптимізації розгалуженої траєкторії з різними формами обмежень за допомогою відомих методів [3] може бути приведене до виду, розглянутого в даній статті.

Висновки

1. Розроблена структура алгоритму моделювання оптимального руху складеної динамічної систем розгалуженою траєкторією. Алгоритм дозволяє в реальному часі оптимізувати розгалужені траєкторії руху для реалізації цільового призначення СДС та виконувати оперативну корекцію траєкторій руху підсистем при виникненні непередбачуваних на попередньому етапі критичних факторів впливу.

2. Розроблені достатні умови оптимальності є універсальними для планування траєкторій із будь-яким обмеженим числом гілок траєкторії та різноманітними математичними моделями складених систем. Це дозволяє суттєво знизити обчислювальні затрати під час розрахунків оптимального керування в умовах невизначеності початкових умов для структурних перетворень СДС і зшивання траєкторій.

3. Необхідні умови оптимальності мають чіткий фізичний зміст і є технологічними та зручними для використання.

4. Результати досліджень є важливими і актуальними для побудови законів траєкторного керування існуючими і перспективними СДС.

Література

1. Теорія оптимальних розгалужених траєкторій: монографія / О. І. Лисенко, О. М. Тачиніна, С. О. Пономаренко, О. Г. Гуйда. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 260 с. URI: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52094.
2. Tachinina O., Lysenko O. Methods for the Synthesis of Optimal Control of Deterministic Compound Dynamical Systems With Branch. Handbook of Research on Artificial Intelligence Applications in the Aviation and Aerospace Industries. 2020. P. 323–351. URL: https://doi.org/10.4018/978-1-7998-1415-3.ch014
3. Using Krotov's Functions for the Prompt Synthesis Trajectory of Intelligent Info-communication Robot / O. Tachinina et al. Studies in Systems, Decision and Control. Cham, 2023. P. 255–283. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-43579-9_6
4. Імпульсні диференціальні рівняння з багатозначною та розривною правою частиною: монографія / Н.А. Перестюк, В.А. Плотніков, А.М. Самойленка, Н.В. Скрипник. - К., 2007. - 427 с.
5. Alekseeva I. V., Lysenko O. I., Tachinina O. M. Necessary optimality conditions of control of stochastic compound dynamic system in case of full in-formation about state vector. Mathematical machines and systems. 2020. Vol. 4. P. 136–147. URL: https://doi.org/10.34121/1028-9763-2020-4-136-147
6. Lysenko O. I., Tachinina O. M., Alekseeva I. V. ALGORITHM OF OPTIMAL CONTROL OF UAV GROUP. Electronics and Control Systems. 2018. Vol. 2, no. 56. URL: https://doi.org/10.18372/1990-5548.56.12945
7. GIUNTI M., MAZZOLA C. DYNAMICAL SYSTEMS ON MONOIDS: TOWARD A GENERAL THEORY OF DETERMINISTIC SYSTEMS AND MOTION. Methods, Models, Simulations And Approaches Towards A General Theory Of Change. 2012. P. 173–185. URL: https://doi.org/10.1142/9789814383332_0012.

References

1. Lysenko O. I., Tachynina O. M., Ponomarenko S. O. & Guida O. G. (2023) Theory of optimal branched trajectories: monograph. Kyiv: KPI Igor Sikorskyi, 2023. 260 p. URI: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52094 [in Ukrainian]
2. Tachinina, O. & Lysenko, O., (2020). Methods for the Synthesis of Optimal Control of Deterministic Compound Dynamical Systems With Branch. У: Handbook of Research on Artificial Intelligence Applications in the Aviation and Aerospace Industries. IGI Global. p. 323–351. URI: doi.org/10.4018/978-1-7998-1415-3.ch014
3. Tachinina, O., Lysenko, O., Romanchenko, I., Novikov, V. & Sushyn, I., (2023). Using Krotov's Functions for the Prompt Synthesis Trajectory of Intelligent Info-communication Robot. У: Studies in Systems, Decision and Control. Cham: Springer Nature Switzerland. p. 255–283. URI: doi.org/10.1007/978-3-031-43579-9_6
4. Impulse differential equations with multi-valued and discontinuous right-hand side:

Monograph / N.A. Perestyuk, V.A. Plotnikov, A.M. Samoilenko, N.V. Violinist - K., 2007. - 427 p.
5. Alekseeva, I. V., Lysenko, O. I. & Tachinina, O. M., (2020). Necessary optimality conditions of control of stochastic compound dynamic system in case of full in-formation about state vector. Mathematical machines and systems. 4, 136–147. URI: doi.org/10.34121/1028-9763-2020-4-136-147
6. Lysenko, O. I., Tachinina, O. M. & Alekseeva, I. V., (2018). Algorithm of Optimal Control of UAV Group. Electronics and Control Systems. 2(56). URI: doi.org/10.18372/1990-5548.56.12945
7. GiuntI, M. & Mazzola, C., (2012). Dynamical Systems on Monoids: Toward a General Theory of Deterministic Systems and Motion: Methods, Models, Simulations And Approaches Towards A General Theory of Change.World Scientific. p. 173-185. URI: doi.org/10.1142/9789814383332_0012

Одержано: 10.04.2024
Внутрішня рецензія отримана: 16.04.2024
Зовнішня рецензія отримана: 25.04.2024

Про авторів:

[1]*Лисенко Олександр Іванович,*
Доктор технічних наук, професор.
https://orcid.org/0000-0002-7276-9279.

[2]*Шевченко Віктор Леонідович,*
доктор технічних наук, професор.
https://orcid.org/0000-0002-9457-7454.

[3]*Тачиніна Олена Миколаївна,*
Доктор технічних наук, професор.
https://orcid.org/0000-0001-7081-0576.

[1]*Пономаренко Сергій Олексійович,*
Кандидат технічних наук,
старший науковий співробітник.
https://orcid.org/0000-0001-5512-3778

[4]*Гуйда Олександр Григорович,*
кандидат наук з державного управління, доцент.
https://orcid.org/0000-0002-2019-2615

Місце роботи авторів:

[1]Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
Тел.: +38-044-204-94-94
E-mail: mail@kpi.ua
https://kpi.ua/

[2]Інститут програмних систем
НАН України,
тел. +38-044-522-62-42
E-mail: iss@isofts.kiev.ua
https://iss.nas.gov.ua/

[3]Національний авіаційний університет
Тел: +38-044-406-79-01
E-mail: post@nau.edu.ua
https://nau.edu.ua/

[4]Таврійський національний університет імені В.І.Вернадського,
Тел.: +38-044-529-05-16
E-mail: crimea.tnu@gmail.com
http://tnu.edu.ua/