УДК 004.42:510.64 http://doi.org/10.15407/pp2024.04.023

С.С. Шкільняк

ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЛОГІКИ З ЧАСТКОВИМИ ПРЕДИКАТАМИ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ОЗНАЧЕНОСТІ ЗМІННОЇ

В роботі досліджено нові класи програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки часткових квазіарних предикатів без обмеження монотонності. Їхньою характерною особливістю є наявність спеціальних 0-арних композицій – часткових предикатів, які визначають наявність у вхідних даних компоненти з відповідним предметним іменем (змінною), тобто з'ясовують означеність цього імені. Такі предикати-індикатори необхідні для елімінації кванторів у логіках немонотонних предикатів. Запропоновано два різновиди логік із частковими предикатами-індикаторами: $L_{\downarrow}{}^{Q}$ (із традиційними реномінаціями) та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ (із розширеними реномінаціями). Описано композиційні алгебри та мови цих логік, досліджено відношення логічного наслідку. Розглянуто умови гарантованої наявності цих відношень, наведено їхні основні властивості. Увагу акцентовано на властивостях, пов'язаних із предикатами-індикаторами та з елімінацією кванторів. Властивості відношень логічного наслідку є семантичною основою побудови для пропонованих логік відповідних числень секвенційного типу, що буде зроблено в наступних роботах.

Ключові слова: логіка, семантика, частковий предикат, логічний наслідок

Shkilniak S. S.

FIRST-ORDER LOGICS WITH PARTIAL PREDICATS FOR CHECKING VARIABLE DEFINEDNESS

We study semantic properties of new classes of program-oriented logics of partial quasiary predicates without monotonicity restriction. A feature of these logics is the use of special 0-ary parametric compositions – partial predicates which checks whether a subject name (variable) has a value in a given data. Such predicates-indicators are needed for quantifier elimination: from formulas of the form $\exists x\Phi$ we come to formulas of the form $R_z^x(\Phi)$. To perform such elimination in logics of non-monotonic predicates, the condition of definedness of a name z is needed, meaning a component with the name z is contained in the input data. We propose two types of pure first-order logics with partial predicates-indicators: $L_{\downarrow}{}^{Q}$ and $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$. Logics $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ use extended renominations, while $L_{\downarrow}{}^{Q}$ use traditional renominations. In this paper we describe composition algebras and languages of these logics, and introduce and investigate logical consequence relations for formulas and sets of formulas of the language: irrefutability (*IR*), truth (*T*), falsity (*F*) and strong (*TF*) logical consequences. Conditions that guarantee the logical consequence relation are considered, and their main properties are specified. Special attention is paid to the properties related to predicates-indicators and quantifier elimination. Logical consequence relations' properties are the semantic basis for sequent calculi's construction. Basic properties of a given logical consequence relation induce respective sequent forms for the corresponding calculus; properties that guarantee the logical consequence relation induce closedness conditions for sequents in this calculus. Construction of such sequent calculi is planned in the future works.

Keywords: logic, semantics, partial predicate, logical consequence.

Вступ

Апарат математичної логіки успішно використовується для опису й моделювання різноманітних предметних областей, систем штучного інтелекту, інформаційних та програмних систем (див., напр., [1]). Водночас обмеження класичної логіки предикатів, роблять вельми актуальною задачу побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів.

Метою пропонованої роботи є дослідження нових класів програмно-орієнтованих логік – чистих першопорядкових композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів (ЧКНЛ) зі знятою умовою монотонності (еквітонності). У побудові виведень в секвенційних численнях таких логік необхідно робити елімінацію кванторів. Це означає еквівалентний перехід у секвенційних формах від формул вигляду $\exists x\Phi$ до їхніх прикладів – формул вигляду $R_z^x(\Phi)$. В логіках немонотонних предикатів це можливо за умови означеності предметного імені (змінної) z, тобто наявності у вхідних даних компоненти з іменем z. Тому для елімінації кванторів у логіках немонотонних предикатів потрібні спеціальні предикати-індикатори наявності у вхідних даних компоненти з відповідним предметним іменем. Можна виділити два їхніх різновиди: тотальні предикати-індикатори Ez, які визначають *наявність чи відсутність* компоненти з іменем z, та часткові, які визначають лише *наявність* такої компоненти.

Низку ЧКНЛ з тотальними предикатами-індикаторами Ez описано, зокрема, в роботах [2–5]. В даній роботі ми пропонуємо логіки з частковими предикатами-індикаторами $\downarrow z$.

Залежно від використання традиційних [2, 3] чи розширених [4, 5] реномінацій виділимо два різновиди ЧКНЛ з частковими предикатами-індикаторами: $L_{\downarrow}{}^{Q}$ (із традиційними реномінаціями) та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ (із розширеними реномінаціями). Традиційні реномінації є окремим випадком розширених реномінацій, тому логіки $L_{\downarrow}{}^{Q}$ є окремим випадком логік $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$.

Описані в [3] ЧКНЛ, збагачені предикатами слабкої рівності $=_{xy}$ та строгої рівності $\equiv_{xy}$, використовують предикати Ez. Водночас в ЧКНЛ зі слабкою рівністю окремі предикати-індикатори не потрібні, адже $\downarrow z$, та $=_{zz}$ – це один і той же предикат!

В даній роботі досліджено семантичні властивості $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow}{}^{Q}$. Описано мови цих логік, досліджено відношення логічного наслідку. Розглянуто умови гарантованої наявності цих відношень, наведено їхні основні властивості. Особливу увагу приділено властивостям, пов'язаним з предикатами $\downarrow z$ та з елімінацією кванторів. Такі властивості є семантичною основою побудови для $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow}{}^{Q}$ відповідних числень секвенційного типу.

1. Композиційні предикатні алгебри логік $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow}{}^{Q}$

Для полегшення читання наведемо необхідні для подальшого викладу визначення. Поняття, які тут не визначені, тлумачимо в сенсі робіт [2, 5].

V-*A*-квазіарний предикат – це часткова неоднозначна, взагалі кажучи, функція $Q: {}^{V}A \to \{T, F\}$, ${}^{V}A$ – множина всіх *V*-*A*-іменних множин (*V*-*A*-ІМ), $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень, V та A – множини предметних імен (змінних) та предметних значень (базових даних). *V*-*A*-ІМ формально визначають [2] як однозначну функцію $d: V \to A$. Подаємо *V*-*A*-ІМ у вигляді $[v_i \mapsto a_i]_{i\in I}$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Для *V*-*A*-ІМ вводимо (див. [5]) операції $\|_{-Z}$, де $Z \subseteq V$, та (розширеної) реномінації $\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n,\perp,\ldots,\perp}^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m}$, де $v_i, x_i, u_j \in V$, а символ $\perp \notin V$ означає відсутність значення:

$$\|_{-Z}(d) = \{\, v \mapsto a \in d \mid v \notin Z\};$$

$$\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n,\perp,\ldots,\perp}^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m}(d) =$$

$$= [v_1 \mapsto d(x_1),\ldots,v_n \mapsto d(x_n)] \cup d\,\|_{-v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m}.$$

Порядок пар імен у цьому позначенні неістотний. Наприклад, $\mathrm{r}_{x,z,\perp}^{v,y,u}$ та $\mathrm{r}_{x,\perp,z}^{v,u,y}$ – це позначення однієї й тієї ж операції. Замість $\mathrm{r}_{x_1,\ldots,x_n,\perp,\ldots,\perp}^{v_1,\ldots,v_n,u_1,\ldots,u_m}$ стисло пишемо $\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$.

Кожний *R*-предикат Q однозначно задається парою таких множин:
– область істинності $T(Q) = \{d \mid T \in Q[d]\}$;
– область хибності $F(Q) = \{d \mid F \in Q[d]\}$.

V-*A*-квазіарний *R*-предикат Q:

– частковий однозначний, або *P*-предикат, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$;

– тотальний, або *T*-предикат, якщо $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}A$;

– *TS*-предикат, якщо $T(Q) \cap F(Q) = \varnothing$ та $T(Q) \cup F(Q) = {}^{V}A$;

– неспростовний, якщо $F(Q) = \varnothing$;

– виконуваний, якщо $T(Q) \neq \varnothing$;

– тотожно істинний (позн. T), якщо $F(Q) = \varnothing$ та $T(Q) = {}^{V}A$;

– тотожно хибний (позн. F), якщо $T(Q) = \varnothing$ та $F(Q) = {}^{V}A$;

– тотально невизначений (позн. $\curlywedge$), якщо $T(Q) = F(Q) = \varnothing$;

– тотально амбівалентний (позн. Υ), якщо $T(P) = F(P) = {}^{V}A$;

– монотонний: $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \subseteq Q[d_2]$;

– антитонний: $d_1 \subseteq d_2 \Rightarrow Q[d_1] \supseteq Q[d_2]$.

Для P-предикатів монотонність стає еквітонністю: Q *еквітонний*, якщо з умови $Q(d)\downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $Q(d')\downarrow = Q(d)$.

Класи V-A-квазіарних R-, P-, T-, TS-предикатів позначатимемо $PrR^{V\text{–}A}$, $PrP^{V\text{–}A}$, $PrT^{V\text{–}A}$, $PrTS^{\ V\text{–}A}$. Усі TS-предикати, окрім константних T та F, немонотонні.

Монотонні R-предикати, антитонні R-предикати, еквітонні P-предикати, антитонні T-предикати названо RM-, RA-, PE-, TA-предикатами. Класи V-A-квазіарних RM-, RA-, PE-, TA-предикатів позначають $PrRM^{V\text{–}A}$, $PrRA^{V\text{–}A}$, $PrPE^{V\text{–}A}$, $PrTA^{V\text{–}A}$.

Ім'я $x \in V$ неістотне для R-предиката Q, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^VA$ маємо:

$$d_1 \|_{-x} = d_2 \|_{-x} \Rightarrow Q[d_1] = Q[d_2].$$

Опишемо базові композиції $L_{\downarrow\perp}{}^Q$.

Пропозиційні композиції (логічні зв'язки) $\neg$ і $\vee$ та композицію квантифікації (квантор) $\exists x$ задамо так:

$$T(\neg P) = F(P);\ \ F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q);\ \ F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q);$$

$$T(\exists xP) = \bigcup_{a \in A} \{d \mid d\|_{-x} \cup x \mapsto a \in T(P)\};$$

$$F(\exists xP) = \bigcap_{a \in A} \{d \mid d\|_{-x} \cup x \mapsto a \in F(P)\}.$$

Композицію реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ задамо через відповідну операцію реномінації:

$$\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(Q)[d] = Q\,[\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(d)].$$

Традиційні [2, 3] операція реномінації $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та композиція реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ є окремими випадками $\mathrm{r}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$ та $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}$.

Спеціальні 0-арні композиції – часткові предикати-індикатори $\downarrow z$ – задамо так:

$$T(\downarrow z) = \{d \mid d(z)\downarrow\};\ \ F(\downarrow z) = \varnothing.$$

Предикати $\downarrow z$ еквітонні. Усі $x \in V$ такі, що $x \neq z$, неістотні для $\downarrow z$.

Отримуємо такі множини базових композицій для $L_{\mathrm{I}\downarrow}{}^Q$ та $L_{\mathrm{I}\downarrow}{}^Q$:

– $C_{\downarrow\perp Q} = \{\neg, \vee,\ \mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}, \exists x, \downarrow z\}$ для $L_{\mathrm{I}\downarrow}{}^Q$;

– $C_{\downarrow Q} = \{\neg, \vee,\ \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \downarrow z\}$ для $L_{\mathrm{I}\downarrow}{}^Q$.

Нагадаємо, що для тотальних предикатів-індикаторів Ez маємо (див. [2, 5]): $T(Ez) = \{d \mid d(z)\downarrow\}$ та $F(Ez) = \{d \mid d(z)\uparrow\}$.

Звідси $T(\downarrow z) = T(Ez)$.

Зауважимо, що в ЧКНЛ зі слабкою рівністю [3] предикати-індикатори вже є: $T(=_{\underline{zz}}) = \{d \mid d(z)\downarrow\} = T(\downarrow z)$, $F(=_{\underline{zz}}) = \varnothing = F(\downarrow z)$. Це означає: предикати $\downarrow z$ та $=_{zz}$ збігаються.

Асиметрія предикатів $\downarrow x$ щодо істинності та хибності індукує таку асиметрію в логіках $L_{\downarrow\perp}{}^Q$ та $L_{\downarrow}{}^Q$. Це надає логікам $L_{\downarrow\perp}{}^Q$ та $L_{\downarrow}{}^Q$ певних ознак девіантності.

Властивості пропозиційних композицій та кванторів, не пов'язані з реномінаціями, аналогічні властивостям класичних логічних зв'язок та кванторів [6]. Маємо [4, 5] такі базові властивості, пов'язані з композицією реномінації: Ren, R, R⊥I, R⊥U, R↑1, R↑2, R⊥¬, R⊥∨, R⊥R, R⊥∃s, R⊥∃. Для традиційної реномінації маємо (див. [2]) Ren, R, RI, RU, R¬, R∨, RR, R∃s, R∃.

Властивості предикатів $\downarrow z$, пов'язані з логічними зв'язками та кванторами:

– $\neg\downarrow z \vee \downarrow z = \downarrow z \to \downarrow z = \downarrow z \leftrightarrow \downarrow z = \downarrow z$;

– $\neg\downarrow z \,\&\, \downarrow z = \neg\downarrow z$;

– $\exists x \downarrow x = \forall x \downarrow x = \mathrm{T}$,

– $\exists x \neg\downarrow x = \forall x \neg\downarrow x = \mathrm{F}$;

– $\exists y \downarrow x = \forall y \downarrow x = \downarrow x$ за умови $x \neq y$;

– $\exists y \neg\downarrow x = \forall y \neg\downarrow x = \neg\downarrow x$ за умови $x \neq y$.

Властивості реномінації предикатів-індикаторів $\downarrow z$:

R⊥↓⊥) $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp,\perp}^{\bar{v},\bar{u},z}(\downarrow z) = ⅄$;

R⊥↓v) $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\downarrow z) = \downarrow y$;

R⊥↓t) $\mathrm{R}_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\downarrow z) = \downarrow z$ за умови $z \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$.

Для традиційної реномінації маємо:

R↓v) $\mathrm{R}_{\bar{x},y}^{\bar{v},z}(\downarrow z) = \downarrow y$;

R↓t) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\downarrow z) = \downarrow z$ за умови $z \notin \{\bar{v}\}$.

Маємо $T(\downarrow z) = T(Ez)$, тому наведені в [4, 5]). властивості, на яких базується елімінація кванторів, можна переформулювати із використанням предикатів $\downarrow z$.

$$T(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(P)) \cap T(\downarrow y) \subseteq T(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists xP)) \qquad (\exists_{\mathrm{T}\downarrow})$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists xP)) \cap T(\downarrow y) \subseteq F(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(P)) \qquad (\exists_{\mathrm{F}\downarrow})$$

Ці співвідношення переформулюємо, записуючи $F(\neg\downarrow y)$ замість $T(\downarrow y)$:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(P)) \cap F(\neg\downarrow y) \subseteq T(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists xP)) \quad (\exists_{\mathrm{T}\neg\downarrow})$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp}^{\bar{u},\bar{w}}(\exists xP)) \cap F(\neg\downarrow y) \subseteq F(\mathrm{R}_{\bar{v},\perp,y}^{\bar{u},\bar{w},x}(P)) \quad (\exists_{\mathrm{F}\neg\downarrow})$$

Семантичними моделями певного класу ЧКНЛ є композиційні предикатні системи вигляду $({}^VA, Pr^{V\text{–}A}, C_B)$, де C_B – множина базових композицій, $Pr^{V\text{–}A}$ – клас квазіарних предикатів. Кожна така система задає дві алгебри: алгебру (структуру) даних $({}^{V}A, Pr^{V-A})$ та композиційну алгебру предикатів (Pr^{V-A}, C_B). Для $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ і $L_{\downarrow}{}^{Q}$ отримуємо композиційні системи R-предикатів $({}^{V}A, PrR^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$ і $({}^{V}A, PrR^{V-A}, C_{\downarrow Q})$ та композиційні алгебри предикатів $A^{\downarrow\perp Q} = (PrR^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$ і $A^{\downarrow Q} = (PrR^{V-A}, C_{\downarrow Q})$.

Необхідна умова того, що певний клас квазіарних предикатів утворює алгебру – його замкненість щодо операцій алгебри. 0-арні композиції – предикати $\downarrow z$ – однозначні й монотонні (еквітонні), а це означає незамкненість класів T-, TS-, RA-, TA-предикатів щодо композицій $C_{\downarrow\perp Q}$ та $C_{\downarrow Q}$. Водночас щодо композицій $C_{\downarrow\perp Q}$ та $C_{\downarrow Q}$ замкнені класи P-предикатів, а також RM- та PE-предикатів. Тому можна виділити такі підалгебри алгебр $A^{\downarrow\perp Q}$ та $A^{\downarrow Q}$:

$A^{\downarrow\perp QP} = (PrP^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$, $A^{\downarrow QP} = (PrP^{V-A}, C_{\downarrow Q})$;

$A^{\downarrow\perp QM} = (PrRM^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$, $A^{\downarrow QM} = (PrRM^{V-A}, C_{\downarrow Q})$;

$A^{\downarrow\perp QPE} = (PrPE^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$, $A^{\downarrow QPE} = (PrPE^{V-A}, C_{\downarrow Q})$.

Логіки монотонних та еквітонних предикатів тут не розглядаємо, тому зосередимо увагу на алгебрах R-предикатів $A^{\downarrow\perp Q}$ і $A^{\downarrow Q}$ та P-предикатів $A^{\downarrow\perp QP}$ і $A^{\downarrow QP}$.

2. Мови логік $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow}{}^{Q}$

Терми композиційної алгебри предикатів трактуємо як формули мови.

При зафіксованій множині базових композицій мови ЧКНЛ відрізняються множинами імен базових предикатів (сигнатурою) і способами запису формул.

Опишемо мову $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$. Використовуємо префіксну форму запису формул.

Алфавіт мови:

– множина V предметних імен (змінних),

– множина Ps предикатних символів,

– множина $Cs = \{\neg, \vee, R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}, \exists x, \downarrow z\}$ символів базових композицій.

Дамо індуктивне визначення множини Fr формул мови:

Fa) $Ps \subseteq Fr$;

F↓) $\{\downarrow z \mid z \in V\} \subseteq Fr$;

Fp) $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi \in Fr, \vee\Phi\Psi \in Fr$;

FR⊥) $\Phi \in Fr \Rightarrow R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}\Phi \in Fr$;

F∃) $\Phi \in Fr \Rightarrow \exists x\Phi \in Fr$.

Формули $p \in Ps$ та $\downarrow z$ – атомарні.

В мовах ЧКНЛ задаємо множину $V_T \subseteq V$ імен, неістотних для всіх $p \in Ps$ – тотально неістотних [2] імен.

Для визначення множин *гарантовано неістотних* для формул мови $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ імен задамо функцію $\nu : Fr \to 2^V$. Для кожного $x \in V$ задаємо $\nu(\downarrow x) = V \setminus \{x\}$, для кожного $p \in Ps$ задаємо $\nu(p)$, водночас має виконуватись $V_T \subseteq \nu(p)$, а далі визначаємо так, як описано в [2].

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, V_T, Cs, Ps)$.

$\Phi \in Fr$ – *CF-формула* (constant free), якщо Φ не містить символів композицій-констант, тобто не містить символів $\downarrow x$.

Для $\Gamma \subseteq Fr$ вводимо позначення:

– $\sigma(\Gamma)$ – це множина всіх $p \in Ps$, які входять до складу формул $\Phi \in \Gamma$;

– $nm(\Gamma)$ – це множина всіх $x \in V$, які фігурують у формулах $\Phi \in \Gamma$.

– $\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi\in\Gamma} \nu(\Phi)$.

Зокрема, для $\Phi \in Fr$ вводимо позначення $\sigma(\Phi)$ та $nm(\Phi)$.

Мову $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ інтерпретуємо на композиційних системах $CS = ({}^{V}A, PrR^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$.

Символи базових композицій інтерпретуємо як відповідні композиції, символи $\downarrow x$ – як відповідні предикати-індикатори. Для позначення символами Ps базових предикатів задамо тотальне однозначне $I : Ps \to PrR^{V-A}$ та продовжимо його до відображення інтерпретації $I : Fr \to PrR^{V-A}$:

Ip) $I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$;

$I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$;

IR⊥) $I(R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}\Phi) = \mathrm{R}^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}(I(\Phi))$;

I∃) $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійку $\boldsymbol{J} = (CS, \Sigma, I)$ назвемо *інтерпретацією* мови $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$. Кожна (CS, Σ, I) визначається алгеброю із доданою сигнатурою $\boldsymbol{A} = (({}^{V}A, PrR^{V-A}), \Sigma, I)$. Такі алгебри пов'язують мову логіки з алгеброю даних, вони визначають композиційні системи $CS = ({}^{V}A, PrR^{V-A}, C_{\downarrow\perp Q})$. Тому вважатимемо зазначені алгебри з доданою сигнатурою *інтерпретаціями* мови $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та скорочено позначатимемо їх $\boldsymbol{A} = (A, I)$.

Мова $L_{\downarrow}{}^{Q}$ визначається аналогічно мові $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$, лише замість символів $R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{x},\perp}$ використовуємо символи $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

Ім'я $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо x неістотне для Φ_J для кожної $\boldsymbol{J}$.

Теорема 1. Якщо $x\in\nu(\Phi)$, то x неістотне для формули Φ.

Для $\Phi\in Fr$ та $\Gamma\subseteq Fr$ визначимо $fu(\Phi) = V_T\setminus nm(\Phi)$ та $fu(\Gamma) = V_T\setminus nm(\Gamma)$.

Теорема 2. $y\in fu(\Phi) \Rightarrow y\in\nu(\Phi)$.

Наслідок. Нехай $\Gamma\subseteq Fr$ та $y\in fu(\Gamma)$, тоді y неістотне для кожної $\Phi\in\Gamma$.

В алгебрах R-предикатів $A^{\downarrow\perp Q}$ та $A^{\downarrow Q}$ виділено підалгебри P-предикатів $A^{\downarrow\perp QP}$ та $A^{\downarrow QP}$, а також підалгебри RM-предикатів $A^{\downarrow\perp QM}$, $A^{\downarrow QM}$, та PE-предикатів $A^{\downarrow\perp QPE}$, $A^{\downarrow QPE}$. Це виділяє класи R-інтерпретацій та підкласи P-інтерпретацій, а також RM- та PE-інтерпретацій. Такі класи інтерпретацій називають *семантиками*.

Таким чином, в $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ маємо семантики $_{\perp}\boldsymbol{R}^{\downarrow}$, $_{\perp}\boldsymbol{P}^{\downarrow}$, $_{\perp}\boldsymbol{RM}^{\downarrow}$, $_{\perp}\boldsymbol{PE}^{\downarrow}$. В $L_{\downarrow}{}^{Q}$ маємо семантики $\boldsymbol{R}^{\downarrow}$, $\boldsymbol{P}^{\downarrow}$, $\boldsymbol{RM}^{\downarrow}$, $\boldsymbol{PE}^{\downarrow}$.

$_{\perp}\boldsymbol{R}^{\downarrow}$ та $\boldsymbol{R}^{\downarrow}$ назвемо R-семантиками.

$_{\perp}\boldsymbol{P}^{\downarrow}$ та $\boldsymbol{P}^{\downarrow}$ назвемо P-семантиками.

В цій роботі вивчаємо логіки без обмеження монотонності предикатів, тому семантики типів RM та PE не розглядаємо, увагу зосередимо на R- та P-семантиках.

Нехай α – певна семантика.

Формула Φ *неспростовна за інтерпретації* $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$-неспростовна (позн. $\boldsymbol{J}|=\Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний. Формула Φ *неспростовна* в семантиці α (позн. $^{\alpha}|=\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|=\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

В логіках $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow}{}^{Q}$ неспростовними є усі предикати-індикатори $\downarrow x$.

Формула Φ *виконувана за інтерпретації* $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$-виконувана, якщо предикат Φ_J виконуваний. Φ *виконувана в семантиці* α, якщо Φ виконувана за певної $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Для R-семантик поняття виконуваної формули малозмістовне. Справді, в R-семантиці α візьмемо $\boldsymbol{J}\in\alpha$ таку, що $p_J=\Upsilon$ для кожної $p\in Ps$, тому $T(\Phi_J)\neq\varnothing$ для кожної $\Phi\in Fr$. Звідси кожна формула виконувана в R-семантиці α.

Формула Φ *тотожно істинна при інтерпретації* $\boldsymbol{J}$ (позн. $\boldsymbol{J}|=_{id}\Phi$), якщо предикат $\Phi_J = T$. Формула Φ *тотожно істинна* в семантиці α (позн. $^{\alpha}|=_{id}\Phi$), якщо $\boldsymbol{J}|=_{id}\Phi$ при кожній $\boldsymbol{J}\in\alpha$.

Подібним чином можна дати визначення тотожно хибної за інтерпретації $\boldsymbol{J}$ та тотожно хибної в семантиці α формули.

Якщо семантика α зафіксована, то замість $^{\alpha}|=$, $^{\alpha}|=_{id}$ пишемо $|=$, $|=_{id}$.

Маємо $\boldsymbol{J}|=_{id}\Phi \Rightarrow \boldsymbol{J}|=\Phi$, $|=_{id}\Phi \Rightarrow |=\Phi$.

Формули, які завжди інтерпретуються як константні предикати, назвемо *константними* формулами. Такими є:

– $_{T}$-формули, які завжди інтерпретуються як T; позначаємо їх $_{T}\Phi$;

– $_{F}$-формули, які завжди інтерпретуються як F; позначаємо їх $_{F}\Phi$;

– $_{\perp}$-формули, які завжди інтерпретуються як $\curlywedge$; позначаємо їх $_{\perp}\Phi$.

Приклад 1. 1) $\exists x\downarrow x$ є $_{T}$-формулами; 2) $\exists x\neg\downarrow x$ є $_{F}$-формулами; 3) $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z)$ та $R^{z}_{\perp}(\downarrow z)$ є $_{\perp}$-формулами.

Остання властивість засвідчує істотну відмінність $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ від $L_{\downarrow}{}^{Q}$.

Якщо ϑ – $_{T}$-формула, то $^{\alpha}|=_{id}\vartheta$.

Формули, які завжди інтерпретуються як частково константні предикати, назвемо *частково константними*. Такими є:

– $_{\mathrm{p}F}$-формули, в яких $T(\Phi_J)=\varnothing$ для всіх $\boldsymbol{J}$; зокрема, це $_{F}$-формули.

– $_{\mathrm{p}T}$-формули, в яких $F(\Phi_J)=\varnothing$ для всіх $\boldsymbol{J}$; зокрема, це $_{T}$-формули.

Для $_{\mathrm{p}T}$-формул Φ маємо $^{\alpha}|=\Phi$.

До $_{\mathrm{p}T}$-формул в $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow}{}^{Q}$ належать символи $\downarrow z$. Справді, $F(\downarrow z_J)=\varnothing$ для всіх $\boldsymbol{J}$.

3. Відношення логічного наслідку

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів можна ввести низку відношень логічного наслідку на множині формул мови. Спочатку задаємо (див. [2, 5]) такі "природні" відношення наслідку для двох формул Φ та Ψ за умови фіксованої інтерпретації $\boldsymbol{J}$:

– істинний, або T-наслідок ${}_J|{=}_T$:

$\Phi\ {}_J|{=}_T\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \subseteq T(\Psi_J)$;

– хибний, або F-наслідок ${}_J|{=}_F$:

$\Phi\ {}_J|{=}_F\ \Psi \Leftrightarrow F(\Psi_J) \subseteq F(\Phi_J)$;

– сильний, або TF-наслідок ${}_J|{=}_{TF}$:

$\Phi\ {}_J|{=}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi\ {}_J|{=}_T\ \Psi$ та $\Phi\ {}_J|{=}_F\ \Psi$;

– неспростовний, або IR-наслідок ${}_J|{=}_{IR}$: $\Phi\ {}_J|{=}_{IR}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Psi_J) = \varnothing$.

– дуальний до IR, або DI-наслідок ${}_J|{=}_{DI}$: $\Phi\ {}_J|{=}_{DI}\ \Psi \Leftrightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Psi_J) = {}^{V}\!A$.

Зазначені відношення індукують відповідні відношення *еквівалентності формул* Φ *та* Ψ *за умови інтерпретації* $\boldsymbol{J}$. Задаємо їх за такою схемою:

$\Phi\ {}_J{\sim}_*\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|{=}_*\ \Psi$ та $\Psi\ {}_J|{=}_*\ \Phi$.

Для відношення ${}_J{\sim}_{TF}$ маємо:

$\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Отже, $\Phi\ {}_J{\sim}_{TF}\ \Psi$ означає, що Φ_J та Ψ_J – це один і той же предикат.

Відношення *логічного* τ*-наслідку в семантиці* $\boldsymbol{\alpha}$ та *логічної еквівалентності в семантиці* $\boldsymbol{\alpha}$ задаємо за схемами:

$\Phi\ {}^{\alpha}|{=}_{\tau}\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J|{=}_{\tau}\ \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$;

$\Phi\ {}^{\alpha}{\sim}_*\ \Psi$, якщо $\Phi\ {}_J{\sim}_*\ \Psi$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

На основі відношень наслідку ${}_J|{=}_{IR}$, ${}_J|{=}_{DI}$, ${}_J|{=}_T$, ${}_J|{=}_F$, ${}_J|{=}_{TF}$ для двох формул при фіксованій $\boldsymbol{J}$ для семантик $\boldsymbol{R}^{\downarrow}$, $\boldsymbol{P}^{\downarrow}$ (мова $L_{\downarrow}{}^{Q}$) та $\perp\boldsymbol{R}^{\downarrow}$, $\perp\boldsymbol{P}^{\downarrow}$ (мова $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$) загалом отримуємо такі відношення логічного наслідку:

${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{IR}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{DI}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{T}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{F}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{TF}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{IR}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{DI}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{T}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{F}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{TF}$;

${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{IR}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{DI}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{T}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{F}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{TF}$;

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{IR}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{DI}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{T}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{F}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{TF}$.

Деякі з цих відношень вироджені.

Твердження 1. 1) Не існує CF-формул Φ та Ψ: $\Phi\ {}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{IR}\ \Psi$ чи $\Phi\ {}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{IR}\ \Psi$.

2) Не існує CF-формул Φ та Ψ: $\Phi\ {}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{DI}\ \Psi$ чи $\Phi\ {}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{DI}\ \Psi$ чи $\Phi\ {}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{DI}\ \Psi$ чи $\Phi\ {}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{DI}\ \Psi$.

Візьмемо інтерпретацію $\boldsymbol{J}$, в якій усі Ps інтерпретуються як Υ. Тоді $\Phi_J = \Upsilon$ та $\Psi_J = \Upsilon \Rightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J) = F(\Phi_J) = F(\Psi_J) = {}^{V}\!A$ $\Rightarrow T(\Phi_J) \cap F(\Phi_J) = {}^{V}\!A$. Це доводить п. 1.

Візьмемо інтерпретацію $\boldsymbol{J}$, в якій усі Ps інтерпретуються о як $\curlywedge$. Тоді $\Phi_J = \curlywedge$ та $\Psi_J = \curlywedge \Rightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J) = F(\Phi_J) = F(\Psi_J) = \varnothing$ $\Rightarrow F(\Phi_J) \cup T(\Phi_J) = \varnothing$. Це доводить п. 2.

Таким чином, відношення типу DI та відношення ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{IR}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{IR}$ вироджені.

Розглянемо властивості, пов'язані з предикатами $\downarrow z$ та відношеннями ${}^{\alpha}|{=}_T$ і ${}^{\alpha}|{=}_F$ (тут α – одне з ${}^{R}{}_{\downarrow}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}$).

Маємо $F(\downarrow x) = \varnothing$ та $\exists x \downarrow x = \mathrm{T}$, звідки

Твердження 2. 1) для довільних $\Phi \in Fr$ та $y \in V$ маємо $\Phi\ {}^{\alpha}|{=}_F \downarrow y$ та $\Phi\ {}^{\alpha}|{=}_{IR} \downarrow y$, водночас $\exists x \downarrow x\ {}^{\alpha}|{\neq}_T \downarrow y$;

2) $\neg\downarrow y\ {}^{\alpha}|{=}_T\ \Phi$ та $\neg\downarrow y\ {}^{\alpha}|{=}_{IR}\ \Phi$ для довільних $\Phi \in Fr$ та $y \in V$, проте $\neg\downarrow y\ {}^{\alpha}|{\neq}_F \neg\exists x \downarrow x$;

3) $\downarrow x\ {}^{\alpha}{\sim}_F \downarrow y$ та $\downarrow x\ {}^{\alpha}{\sim}_{IR} \downarrow y$ для всіх $x, y \in V$.

Це засвідчує, що в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ відношення типів T, F та TF істотно різні. Отже, в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ маємо по 7 різних невироджених відношень логічного наслідку:

${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{IR}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{T}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{F}$, ${}^{P}{}_{\downarrow}|{=}_{TF}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{T}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{F}$, ${}^{R}{}_{\downarrow}|{=}_{TF}$;

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{IR}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{T}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{F}$, ${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{TF}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{T}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{F}$, ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|{=}_{TF}$.

Графічно співвідношення між ними можна подати так (тут $*$ – це $\downarrow$ чи $\downarrow\perp$, а замість $\subset$ вживаємо $\rightarrow$):

$$\begin{array}{ccccc}
 & {}^{R}{}_{*}|{=}_{T} & \rightarrow & {}^{P}{}_{*}|{=}_{T} & \\
\square & & \square & & \square \\
{}^{R}{}_{*}|{=}_{TF} & \rightarrow & {}^{P}{}_{*}|{=}_{TF} & & {}^{P}{}_{*}|{=}_{IR} \\
\square & & \square & & \square \\
 & {}^{R}{}_{*}|{=}_{F} & \rightarrow & {}^{P}{}_{*}|{=}_{F} &
\end{array}$$

Відношення логічного наслідку індукують відношення логічної еквівалентності. Отримуємо 7+7 відповідних відношень ${}^{P}{}_{*}{\sim}_{IR}$, ${}^{P}{}_{*}{\sim}_{T}$, ${}^{P}{}_{*}{\sim}_{F}$, ${}^{P}{}_{*}{\sim}_{TF}$, ${}^{R}{}_{*}{\sim}_{T}$, ${}^{R}{}_{*}{\sim}_{F}$, ${}^{R}{}_{*}{\sim}_{TF}$.

Далі індекси $\downarrow$ та $\downarrow\perp$ в позначенні відношень зазвичай опускаємо, із контексту буде зрозуміло, про яку семантику йде мова.

Теорема 3. Зазначені відношення логічного наслідку рефлексивні й транзитивні; відношення логічної еквівалентності рефлексивні, транзитивні та симетричні.

Описані в [2] властивості пропозиційного рівня справджуються для введених тут відношень в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ й $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$. Зокрема:

Теорема 4. 1) $\neg\Phi \,\&\, \Phi\ {}^{P}|{=}_T\ \Psi$, проте $\neg\Phi \,\&\, \Phi\ {}^{P}|{\neq}_F\ \Psi$;

2) $\Phi\ {}^{P}|{=}_F \neg\Psi \vee \Psi$, проте $\Phi\ {}^{P}|{\neq}_T \neg\Psi \vee \Psi$;

3) $\neg\Phi \,\&\, \Phi\ {}^{P}|{=}_{TF} \neg\Psi \vee \Psi$;

4) $\neg\Phi \,\&\, \Phi\ {}^{R}|{\neq}_{TF} \neg\Psi \vee \Psi$.

Основа еквівалентних перетворень формул – теорема еквівалентності. Вона виконується для відношень типів TF та IR, проте невірна для відношень типів T та F.

Теорема 5. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$. Якщо $\Phi_1 {}^{\alpha}{\sim_*} \Psi_1$, ..., $\Phi_n {}^{\alpha}{\sim_*} \Psi_n$, то $\Phi {}^{\alpha}{\sim_*} \Phi'$.

Тут ${}^{\alpha}{\sim_*}$ одне з ${}^{R}{\sim_{TF}}$, ${}^{P}{\sim_{TF}}$, ${}^{P}{\sim_{IR}}$.

На основі властивостей предикатів Ren, R, R⊥I, R⊥U, R↑1, R↑2, R⊥¬, R⊥∨, R⊥R, R⊥∃s, R⊥∃ (логіка $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$) та Ren, R, RI, RU, R¬, R∨, RR, R∃s, R∃ (логіка $L_{\downarrow}{}^{Q}$) отримуємо однойменні властивості формул. Для їхнього опису використаємо відношення типу $\sim_{TF}$.

Для формул мов $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ маємо специфічні властивості пов'язані з $\downarrow z$. Вони отримуються на основі наведених вище відповідних властивостей предикатів:

R⊥↓v) $R_{\bar{x},\perp,y}^{\bar{v},\bar{u},z}(\downarrow z) \square_{TF} \downarrow y$;

R⊥↓t) $R_{\bar{x},\perp}^{\bar{v},\bar{u}}(\downarrow z) \square_{TF} \downarrow z$ за умови $z \notin \{\bar{v},\bar{u}\}$;

R↓v) $R_{\bar{x},y}^{\bar{v},z}(\downarrow z) \square_{TF} \downarrow y$;

R↓t) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\downarrow z) \square_{TF} \downarrow z$ за умови $z \notin \{\bar{v}\}$.

Пропозиційні властивості $\downarrow z$:

${}^{\alpha}{\models} \downarrow z$; $\neg\downarrow z \vee \downarrow z \sim_{TF} \downarrow z$; $\neg\downarrow z \,\&\, \downarrow z \sim_{TF} \neg\downarrow z$.

Властивості квантифікації:

– ${}^{\alpha}{\models_{id}} \exists x \downarrow x$ та ${}^{\alpha}{\models_{id}} \forall x \downarrow x$;

– $\exists y \downarrow x \sim_{TF} \downarrow x$ та $\forall y \downarrow x \sim_{TF} \downarrow x$ за умови $x \neq y$.

Відношення наслідку і логічного наслідку поширимо на пари множин формул. Назвемо їх відношеннями set-наслідку та логічного set-наслідку.

Нехай деяка $\Sigma \subseteq Fr$, нехай $\boldsymbol{J}$ – інтерпретація. Далі позначаємо:

$\bigcap_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cap}(\Sigma_J)$, $\bigcap_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cap}(\Sigma_J)$,

$\bigcup_{\theta\in\Sigma} T(\theta_J)$ як $T^{\cup}(\Sigma_J)$, $\bigcup_{\theta\in\Sigma} F(\theta_J)$ як $F^{\cup}(\Sigma_J)$.

Нехай $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$.

Δ є IR-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\,{}_J{\models_{IR}}\,\Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \cap F^{\cap}(\Delta_J) = \varnothing$.

Δ є DI-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\,{}_J{\models_{DI}}\,\Delta$), якщо $F^{\cup}(\Gamma_J) \cup T^{\cup}(\Delta_J) = {}^{V}A$.

Δ є T-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\,{}_J{\models_{T}}\,\Delta$), якщо $T^{\cap}(\Gamma_J) \subseteq T^{\cup}(\Delta_J)$.

Δ є F-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\,{}_J{\models_{F}}\,\Delta$), якщо $F^{\cap}(\Delta_J) \subseteq F^{\cup}(\Gamma_J)$.

Δ є TF-наслідком Γ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\,{}_J{\models_{TF}}\,\Delta$), якщо $\Gamma\,{}_J{\models_{T}}\,\Delta$ та $\Gamma\,{}_J{\models_{F}}\,\Delta$.

Відношення логічного τ-set-наслідку в семантиці $\boldsymbol{\alpha}$ задамо за схемою:

$\Gamma\,{}^{\alpha}{\models_{\tau}}\,\Delta$, якщо $\Gamma\,{}_J{\models_{\tau}}\,\Delta$ для кожної $\boldsymbol{J} \in \boldsymbol{\alpha}$.

В R- та P-семантиках логік $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ маємо по 7 різних невироджених відношень логічного set-наслідку. Їхні назви та співвідношення між ними такі ж, як для відповідних відношень для двох формул.

Відношення типів DI та IR в R-семантиках вироджені. Відношення типів T, F та TF в R-семантиках істотно різні.

Твердження теореми 4 для відношень set-наслідку узагальнюється так.

Теорема 6. 1) $\Gamma, \neg\Phi \,\&\, \Phi\, {}^{P}{\models_T}\, \Psi, \Delta$, проте $\Gamma, \neg\Phi \,\&\, \Phi\, {}^{P}{\not\models_F}\, \Psi, \Delta$;

2) $\Gamma, \Phi\, {}^{P}{\models_F}\, \neg\Psi \vee \Psi, \Delta$, проте $\Gamma, \Phi\, {}^{P}{\not\models_T}\, \neg\Psi \vee \Psi, \Delta$;

3) $\Gamma, \neg\Phi \,\&\, \Phi\, {}^{P}{\models_{TF}}\, \neg\Psi \vee \Psi, \Delta$;

4) $\Gamma, \neg\Phi \,\&\, \Phi\, {}^{R}{\not\models_{TF}}\, \neg\Psi \vee \Psi, \Delta$.

Аналогом теореми еквівалентності для відношень є теорема заміни еквівалентних. Вона справджується для відношень логічної еквівалентності типів ${}^{R}{\sim_{TF}}$, ${}^{P}{\sim_{TF}}$, ${}^{P}{\sim_{IR}}$ та відношень логічного наслідку відповідних типів: ${}^{R}{\models_{TF}}$, ${}^{P}{\models\sim_{TF}}$, ${}^{P}{\models_{T}}$, ${}^{P}{\models_{F}}$, ${}^{P}{\models_{IR}}$ у випадку ${}^{R}{\sim_{TF}}$; ${}^{P}{\models\sim_{TF}}$, ${}^{P}{\models_{T}}$, ${}^{P}{\models_{F}}$, ${}^{P}{\models_{IR}}$ у випадку ${}^{P}{\sim_{TF}}$; ${}^{P}{\models_{IR}}$ у випадку ${}^{P}{\sim_{IR}}$.

Теорема 7. Нехай $\Phi \sim_{\alpha} \Psi$, тоді:

$\Phi, \Gamma \models_{\alpha} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{\alpha} \Delta$;

$\Gamma \models_{\alpha} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{\alpha} \Delta, \Psi$.

Для введених відношень логічного set-наслідку маємо властивість монотонності, для них виконуються властивості декомпозиції формул ¬¬L, ¬¬R, ∨L, ∨R, ¬∨L, ¬∨R, ¬L, ¬R (див. [2, 5])

Властивості відношень логічного set-наслідку, пов'язані з еквівалентними перетвореннями, базуються на властивостях формул, пов'язаних з композиціями реномінації. В $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ ці властивості отримуємо на основі властивостей R, R⊥I, R⊥U, R↑1, R↑2, R⊥¬, R⊥∨, R⊥R, R⊥∃s, R⊥∃; в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ такі властивості отримуємо на основі R, RI, RU, R¬, R∨, RR, R∃s, R∃. Кожна така властивість формул R∗ продукує 4 відповідні властивості R⊥∗L, R⊥∗R, ¬R⊥∗L, ¬R⊥∗R для відношення логічного set-наслідку, коли виділена формула чи її заперечення – у лівій чи правій частині цього відношення.

У використанні властивостей елімінації кванторів під реномінацією властивості типів R∃s та R∃ мають допоміжний характер і не належать до базових.

Подібним чином властивості $R_{\perp\downarrow v}$, $R_{\perp\downarrow t}$ в $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ та властивості $R_{\downarrow v}$, $R_{\downarrow t}$ в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ продукують по 4 властивості спрощення за реномінації предикатів-індикаторів.

Для прикладу наведемо властивості, індуковані $R_{\perp\downarrow v}$:

$R_{\perp\downarrow vL})\ R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\downarrow z),\Gamma \models_* \Delta \ \Leftrightarrow\ \downarrow y,\Gamma \models_* \Delta;$

$R_{\perp\downarrow vR})\ \Gamma \models_* R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\downarrow z),\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma \models_* \downarrow y,\Delta;$

$\neg R_{\perp\downarrow vL})\ \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\downarrow z),\Gamma \models_* \Delta \ \Leftrightarrow\ \neg\downarrow y,\Gamma \models_* \Delta;$

$\neg R_{\perp\downarrow vR})\ \Gamma \models_* \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,y}(\downarrow z),\Delta \ \Leftrightarrow\ \Gamma \models_* \neg\downarrow y,\Delta.$

У $L_{\downarrow\perp}$ маємо властивості елімінації $\neg$ для константних $\perp$-формул $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z)$:

$El\neg_L)\ \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z),\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z),\Gamma \models_* \Delta;$

$El\neg_R)\ \Gamma \models_* \neg R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z),\Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z),\Delta.$

Для $\perp$-формул $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z)$ маємо властивості елімінації $\perp$-формул:

$El_{R\downarrow F})\ R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z),\Gamma\ {}^*\!\models_{*F} \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_{*F} \Delta;$

$El_{R\downarrow T})\ \Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta, R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z) \ \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_{*T} \Delta.$

У $L_{\downarrow\perp}$ та $L_{\downarrow\perp}$ маємо властивості елімінації $_{pT}$-формул $\downarrow z$ та $_{pF}$-формул $\neg\downarrow z$:

$El_{\downarrow F})\ \downarrow z,\Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta;$

$El_{\downarrow T})\ \Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta,\neg\downarrow z \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta.$

Опишемо похідні властивості відношень логічного set-наслідку, пов'язані з $_T$-формулами $\exists x\downarrow x$ та $_F$-формулами $\exists x\neg\downarrow x$.

Зняття $\neg$ в $\neg\exists x\downarrow x$ та $\neg\exists x\neg\downarrow x$:

$\neg\exists_L)\ \neg\exists x\downarrow x,\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta,\exists x\downarrow x;$

$\neg\exists\downarrow_R)\ \Gamma \models_* \Delta,\neg\exists x\downarrow x \Leftrightarrow \exists x\downarrow x,\Gamma \models_* \Delta;$

$\neg\exists\neg\downarrow_L)\ \neg\exists x\neg\downarrow x,\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta,\exists x\neg\downarrow x;$

$\neg\exists\neg\downarrow_R)\ \Gamma \models_* \Delta,\neg\exists x\neg\downarrow x \Leftrightarrow \exists x\neg\downarrow x,\Gamma \models_* \Delta.$

Елімінація $\exists x\downarrow x$ та $\exists x\neg\downarrow x$:

$El_{\exists\downarrow})\ \exists x\downarrow x,\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta;$

$El_{\exists\neg\downarrow})\ \Gamma \models_* \Delta,\exists x\neg\downarrow x \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta.$

Також маємо елімінацію $\downarrow z$ зі "свіжим" неістотним іменем z, якщо $\downarrow z$ – зліва у відношенні логічного set-наслідку. Якщо ж $\downarrow z$ – справа у цьому відношенні, то для F-наслідку така елімінація некоректна, адже гарантовано виконується $\Gamma \models_{*F} \Delta, \downarrow z$, проте не завжди $\Gamma \models_{*F} \Delta$: $\exists x\downarrow x\ {}^R{}_{\downarrow}\!\not\models_F \exists x\neg\downarrow x$.

Отже, маємо такі похідні властивості елімінації $\downarrow z$ за "свіжим" неістотним z:

$El\downarrow_L)\ \downarrow z,\Gamma \models_* \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_* \Delta$, якщо $z\in fu(\Gamma,\Delta)$;

$El\downarrow_R)\ \Gamma \models_{*T} \Delta,\downarrow z \Leftrightarrow \Gamma \models_{*T} \Delta$, якщо $z\in fu(\Gamma,\Delta)$.

Опишемо властивості елімінації кванторів в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$. Важливо, що тут маємо *різні* описи елімінації кванторів для відношень логічного T-наслідку (вживаємо $z\downarrow$) та F-наслідку (вживаємо $\neg z\downarrow$).

В $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ маємо такі властивості елімінації кванторів (тут * – $^P{}_{\downarrow\perp}$ чи $^R{}_{\downarrow\perp}$):

$\exists R_{\perp\downarrow TL}$) за умови $z\in fu(\Gamma,\Delta,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$

$R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi),\downarrow z,\Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta;$

$\neg\exists R_{\perp\downarrow TR}$) за умови $z\in fu(\Gamma,\Delta,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$

$\Gamma\ {}^*\!\models_T \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Delta \Leftrightarrow \Gamma,\downarrow z\ {}^*\!\models_T \neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi),\Delta;$

$\exists R_{\perp\downarrow vTR})\ \Gamma,\downarrow y\ {}^*\!\models_T \Delta,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi) \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma,\downarrow y\ {}^*\!\models_T \Delta,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi);$

$\neg\exists R_{\perp\downarrow vTL})\ \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\downarrow y,\Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi),y\downarrow,\Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta;$

$\exists R_{\perp\downarrow FL}$) за умови $z\in fu(\Gamma,\Delta,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$

$R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi),\Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta,\neg\downarrow z;$

$\neg\exists R_{\perp\downarrow FR}$) за умови $z\in fu(\Gamma,\Delta,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi))$

$\Gamma\ {}^*\!\models_F \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_F \neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,z}(\Phi),\neg\downarrow z,\Delta;$

$\exists R_{\perp\downarrow vFR})\ \Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta,\neg\downarrow y,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi) \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta,\neg\downarrow y,R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi);$

$\neg\exists R_{\perp\downarrow vFL})\ \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\Gamma\ {}^*\!\models_F \neg\downarrow y,\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R^{\bar{v},\bar{u}}_{\bar{w},\perp}(\exists x\Phi),\neg R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,y}(\Phi),\Gamma\ {}^*\!\models_F \neg\downarrow y,\Delta.$

У випадку відношення $^P{}_{\downarrow\perp}\!\models_{IR}$ для опису елімінації кванторів достатньо властивостей $\exists R_{\perp\downarrow TL}$ та $\exists R_{\perp\downarrow vTR}$.

В $L_{\downarrow}{}^{Q}$ маємо аналогічні властивості елімінації кванторів $\exists R_{\downarrow TL}$, $\neg\exists R_{\downarrow TR}$, $\exists R_{\downarrow vTR}$, $\neg\exists R_{\downarrow vTL}$, $\exists R_{\downarrow FL}$, $\neg\exists R_{\downarrow FR}$, $\exists R_{\downarrow vFR}$, $\neg\exists R_{\downarrow vFL}$.

Відмінність описів елімінації кванторів для відношень логічного T-наслідку та логічного F-наслідку робить неможливим подібний опис одним рядком для відношень типу TF.

Допоміжні властивості $\downarrow$-розподілу та первісного означення в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ теж різні для відношень типу T та типу F.

Для відношень типу T маємо:

$\downarrow vT)\ \Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta \Leftrightarrow \downarrow z,\Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta;$

$\downarrow dT)\ \Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta,\downarrow y$ та $\downarrow y,\Gamma\ {}^*\!\models_T \Delta.$

Для відношень типу F маємо:

$\downarrow vF)\ \Gamma\ {}^*\!\models_F \Delta \Leftrightarrow \Gamma\ {}^*\!\models_F \neg\downarrow z,\Delta$

↓dF) $\Gamma^{*}|\!=_{F}\Delta \Leftrightarrow \Gamma^{*}|\!=_{F}\Delta, \neg{\downarrow}y$ та $\neg{\downarrow}y, \Gamma^{*}|\!=_{F}\Delta$.

Властивості ↓vT, ↓dT, ↓vF, ↓dF також виконуються для відношень типу *IR*, водночас як базові властивості для цих відношень доцільно взяти простіші ↓vT та ↓dT.

Опис в $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ властивостей відношень логічного наслідку типу *TF* зводиться до паралельного опису таких властивостей для відношень типу *T* та типу *F*.

Таким чином, в логіках $L_{\downarrow}{}^{Q}$ та $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ відношення типу *TF* мають ознаки девіантності, тому окремо розглядати ці відношення далі не будемо.

Опишемо тепер властивості, які *гарантовано* виконуються для відношень логічного set-наслідку певного типу.

Для усіх розглянутих відношень логічного set-наслідку маємо:

C) $\Phi, \Gamma\, |\!=_{*} \Delta, \Phi$.

Додатково гарантують наявність відношення певного типу такі властивості.

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma^{P}{}_{*}|\!=_{T}\Delta$;

CR) $\Gamma^{P}{}_{*}|\!=_{F}\Delta, \Phi, \neg\Phi$;

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma^{P}{}_{*}|\!=_{TF}\Delta, \Psi, \neg\Psi$.

В логіці $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ маємо властивосгі гарантованої наявності відношень логічного set-наслідку на базі $_{\perp}$-формул $R^{\bar{v},\bar{u},z}_{\bar{x},\perp,\perp}(\downarrow z)$:

$C\perp_{\downarrow L}$) $R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\downarrow x), \Gamma^{*}|\!=_{T}\Delta$;

$C\perp_{\downarrow R}$) $\Gamma^{*}|\!=_{F}\Delta, R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\downarrow x)$.

В $L_{\downarrow\perp}{}^{Q}$ й $L_{\downarrow}{}^{Q}$ маємо властивості гарантованої наявності *F*-наслідку і *T*-наслідку на базі $_{pT}$-формул ${\downarrow}z$ та $_{pF}$-формул $\neg{\downarrow}z$:

$C_{\downarrow}$) $\Gamma^{*}|\!=_{F}{\downarrow}z, \Delta$;

$C_{\neg\downarrow}$) $\neg{\downarrow}z, \Gamma, {}^{*}|\!=_{T}\Delta$.

На основі описаних *властивостей* гарантованої наявності певного відношення $\Gamma\,|\!=_{*}\Delta$ отримуємо однойменні *умови* гарантованої наявності деякого $\Gamma\,|\!=_{*}\Delta$:

C) існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$;

CL) існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\neg\Phi\in\Gamma$;

CR) існує формула Φ: $\Phi\in\Delta$ та $\neg\Phi\in\Delta$;

$C\perp_{\downarrow L}$) існує формула $R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\downarrow x)\in\Gamma$;

$C\perp_{\downarrow R}$) існує формула $R^{\bar{v},\bar{u},x}_{\bar{w},\perp,\perp}(\downarrow x)\in\Delta$;

$C_{\downarrow}$) існує формула ${\downarrow}x\in\Delta$;

$C_{\neg\downarrow}$) існує формула $\neg{\downarrow}x\in\Gamma$.

Тепер для конкретного відношення логічного set-наслідку отримуємо наступні *умови* його гарантованої наявності:

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{IR}$: умова $C\vee C_{\downarrow}\vee C\perp_{\downarrow L}\vee C\perp_{\downarrow R}$;

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{T}$: умова $C\vee CL\vee C_{\neg\downarrow}\vee C\perp_{\downarrow L}$;

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{F}$: умова $C\vee CR\vee C_{\downarrow}\vee C\perp_{\downarrow R}$;

${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{T}$: умова $C\vee C_{\neg\downarrow}\vee C\perp_{\downarrow L}$;

${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{F}$: умова $C\vee C_{\downarrow}\vee C\perp_{\downarrow R}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|\!=_{IR}$: умова $C\vee C_{\downarrow}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|\!=_{T}$: умова $C\vee CL\vee C_{\neg\downarrow}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|\!=_{F}$: умова $C\vee CR\vee C_{\downarrow}$;

${}^{R}{}_{\downarrow}|\!=_{T}$: умова $C\vee C_{\neg\downarrow}$;

${}^{R}{}_{\downarrow}|\!=_{F}$: умова $C\vee C_{\downarrow}$.

Ці умови індукують умови замкненості секвенції в численні, яке формалізує відповідне відношення set-наслідку.

Підсумовуючи, для кожного з розглянутих відношень логічного set-наслідку типів *IR*, *T*, *F,* наведемо базові властивості, які продукують секвенційні форми відповідного числення. Для виразності ці властивості поєднаємо в групи, а потім укажемо такі групи для кожного з відношень.

Властивості декомпозиції формул:

$D_{IR} = \{\neg_{L}, \neg_{R}, \vee_{L}, \vee_{R}\}$;

$D_{TF} = \{\neg\neg_{L}, \neg\neg_{R}, \vee_{L}, \vee_{R}, \neg\vee_{L}, \neg\vee_{R}\}$.

Властивості елімінації кванторів:

$\exists_{\perp IR} = \{\exists R_{\perp\downarrow TL}, \exists R_{\perp\downarrow}v_{TR}, {\downarrow}dT, {\downarrow}vT\}$;

$\exists_{\perp T} = \{\exists R_{\perp\downarrow TL}, \neg\exists R_{\perp\downarrow TR}, \exists R_{\perp\downarrow}v_{TR}, \neg\exists R_{\perp\downarrow}v_{TL}, {\downarrow}dT, {\downarrow}vT\}$;

$\exists_{\perp F} = \{\exists R_{\perp\downarrow FL}, \neg\exists R_{\perp\downarrow FR}, \exists R_{\perp\downarrow}v_{FR}, \neg\exists R_{\perp\downarrow}v_{FL}, {\downarrow}dF, {\downarrow}vF\}$;

$\exists_{IR} = \{\exists R_{\downarrow TL}, \exists R_{\downarrow}v_{TR}, {\downarrow}dT, {\downarrow}vT\}$;

$\exists_{T} = \{\exists R_{\downarrow TL}, \neg\exists R_{\downarrow TR}, \exists R_{\downarrow}v_{TR}, \neg\exists R_{\downarrow}v_{TL}, {\downarrow}dT, {\downarrow}vT\}$;

$\exists_{F} = \{\exists R_{\downarrow FL}, \neg\exists R_{\downarrow FR}, \exists R_{\downarrow}v_{FR}, \neg\exists R_{\downarrow}v_{FL}, {\downarrow}dF, {\downarrow}vF\}$.

Властивості еквівалентних перетворень:

$R_{\perp IR} = \{R_{L}, R_{R}, R_{\perp}I_{L}, R_{\perp}I_{R}, R_{\perp}U_{L}, R_{\perp}U_{R}, R_{\perp}R_{L}, R_{\perp}R_{R}, , R_{\perp}\neg_{L}, R_{\perp}\neg_{|R}, R_{\perp}\vee_{L}, R_{\perp}\vee_{R}\}$;

$R_{\perp TF} = \{R_{L}, R_{R}, \neg R_{L}, \neg R_{R}, R_{\perp}I_{L}, R_{\perp}I_{R}, \neg R_{\perp}I_{L}, \neg R_{\perp}I_{R}, R_{\perp}U_{L}, R_{\perp}U_{R}, \neg R_{\perp}U_{L}, \neg R_{\perp}U_{R}, R_{\perp}R_{L}, R_{\perp}R_{R}, \neg R_{\perp}R_{L}, \neg R_{\perp}R_{R}, R_{\perp}\neg_{L}, R_{\perp}\neg_{|R}, \neg R_{\perp}\neg_{L}, \neg R_{\perp}\neg_{R}, R_{\perp}\vee_{L}, R_{\perp}\vee_{R}, \neg R_{\perp}\vee_{L}, \neg R_{\perp}\vee_{R}\}$;

$R_{IR} = \{R_{L}, R_{R}, RI_{L}, RI_{R}, RU_{L}, RU_{R}, RR_{L}, RR_{R}, R\neg_{L}, R\neg_{|R}, R\vee_{L}, R\vee\}$;

$R_{TF} = \{R_L,\ R_R,\ \neg R_L,\ \neg R_R,\ RI_L,\ RI_R,\ \neg RI_L,\ \neg RI_R,\ RU_L,\ RU_R,\ \neg RU_L,\ \neg RU_R,\ RR_L,\ RR_R,\ \neg RR_L,\ \neg RR_R,\ R_{\neg L},\ R_{\neg|R},\ \neg R_{\neg L},\ \neg R_{\neg R},\ R_{\vee L},\ R_{\vee R},\ \neg R_{\vee L},\ \neg R_{\vee R}\}$.

Властивості, пов'язані з предикатами-індикаторами $\downarrow z$:

$I_{\perp IR} = \{R_{\perp\downarrow vL},\ R_{\perp\downarrow vR},\ R_{\perp\downarrow tL},\ R_{\perp\downarrow Tr};\ R\uparrow_{\downarrow 1L},\ R\uparrow_{\downarrow 1R},\ R\uparrow_{\downarrow 2L},\ R\uparrow_{\downarrow 2R};\ El_{R\downarrow F},\ El_{R\downarrow T};\ El_{\downarrow F}\}$;

$I_{\perp T} = I_{\perp B} \cup \{El_{R\downarrow T},\ El_{\downarrow T}\}$;

$I_{\perp F} = I_{\perp B} \cup \{El_{R\downarrow F},\ El_{\downarrow F}\}$;

$I_{IR} = \{R_{\perp vL},\ R_{\perp vR},\ R_{\perp tL},\ R_{\perp Tr};\ El_{\downarrow F}\}$.

$I_T = I_B \cup \{El_{\downarrow T}\}$;

$I_F = I_B \cup \{El_{\downarrow F}\}$.

Тут $I_{\perp B} = \{R_{\perp\downarrow vL},\ R_{\perp\downarrow vR},\ \neg R_{\perp\downarrow vL},\ \neg R_{\perp\downarrow vR},\ R_{\perp\downarrow tL},\ R_{\perp\downarrow tR},\ \neg R_{\perp\downarrow tL},\ \neg R_{\perp\downarrow tR};\ R\uparrow_{\downarrow 1L},\ R\uparrow_{\downarrow 1R},\ \neg R\uparrow_{\downarrow 1L},\ \neg R\uparrow_{\downarrow 1R},\ R\uparrow_{\downarrow 2L},\ R\uparrow_{\downarrow 2R},\ \neg R\uparrow_{\downarrow 2L},\ \neg R\uparrow_{\downarrow 2R};\ El_{\neg L},\ El_{\neg R}\}$;

$I_B = \{R_{\downarrow vL},\ R_{\downarrow vR},\ \neg R_{\downarrow vL},\ \neg R_{\downarrow vR},\ R_{\downarrow tL},\ R_{\downarrow tR},\ \neg R_{\downarrow tL},\ \neg R_{\downarrow tR}\}$.

Маємо такі групи базових властивостей для відношень логічного set-наслідку.

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{IR}$: $D_{IR} \cup R_{\perp IR} \cup I_{\perp IR} \cup \exists_{\perp IR}$;

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{T}$ та ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{T}$: $D_{TF} \cup R_{\perp TF} \cup I_{\perp T} \cup \exists_{\perp T}$;

${}^{P}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{F}$ та ${}^{R}{}_{\downarrow\perp}|\!=_{F}$: $D_{TF} \cup R_{\perp TF} \cup I_{\perp F} \cup \exists_{\perp F}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|\!=_{IR}$: $D_{IR} \cup R_{IR} \cup I_{IR} \cup \exists_{IR}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|\!=_{T}$ та ${}^{R}{}_{\downarrow}|\!=_{T}$: $D_{TF} \cup R_{TF} \cup I_{T} \cup \exists_{T}$;

${}^{P}{}_{\downarrow}|\!=_{F}$ та ${}^{R}{}_{\downarrow}|\!=_{F}$: $D_{TF} \cup R_{TF} \cup I_{F} \cup \exists_{F}$.

Зауважимо, що 4 пари відношень логічного set-наслідку мають *однакові* базові властивості; в цих парах відношення типу T та типу F відрізняються *різними* умовами гарантованої наявності.

Висновки

У роботі досліджено семантичні властивості нових класів програмно-орієнтованих логік часткових квазіарних предикатів без обмеження монотонності. Їхньою характерною особливістю є використання часткових предикатів-індикаторів, які визначають наявність у вхідних даних компоненти з відповідним предметним іменем, тобто з'ясовують означеність цього імені. Описано композиційні алгебри та мови цих логік, досліджено відношення логічного наслідку для формул та для множин формул мови. Розглянуто умови гарантованої наявності цих відношень, наведено їхні основні властивості. Особливу увагу приділено властивостям, пов'язаним із предикатами-індикаторами, та властивостям елімінації кванторів. Властивості відношень логічного наслідку є семантичною основою побудови відповідних числень секвенційного типу, що буде зроблено в наступних роботах. Базові властивості певного відношення логічного наслідку продукують секвенційні форми відповідного числення, а умови гарантованої наявності такого відношення індукують умови замкненості секвенції в цьому численні.

Література

1. S. Abramsky, D.M. Gabbay, and T.S.E. Maibaum (eds), Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 1–5, Oxford University Press, 1993–2000.
2. М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк, Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів, Проблеми програмування, 2016, № 2–3, С. 73–86.
3. С. С. Шкільняк, Першопорядкові композиційно-номінативні логіки з предикатами слабкої та строгої рівності, Проблеми програмування, 2019, № 3, С. 28–44.
4. М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк, Секвенційні числення першопорядкових логік часткових предикатів з розширеними реномінаціями та композицією предикатного доповнення, Проблеми програмування, 2020, № 2–3, С. 182–197.
5. O. Shkilniak, S. Shkilniak. First-Order Sequent Calculi of Logics of Quasiary Predicates with Extended Renominations and Equality, UkrPROG'2022, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), 2023, pp. 3–18.
6. S.C. Kleene, Mathematical Logic, Dower Publications, 2013.

References

1. S. Abramsky, D.M. Gabbay, and T.S.E. Maibaum (eds), Handbook of Logic in Computer Science, Vol. 1–5, Oxford University Press, 1993–2000.
2. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak, Pure first-order logics of quasiary predicates, in Problems in Progamming, 2016, No 2–3. pp. 73–86.

3. S. Shkilniak, First-order composition-nominative logics with predicates of weak equality and of strong equality, in Problems in Progamming, 2019, No 3, pp. 28–44.
4. M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak, Sequent Calculi of First-order Logics of Partial Predicates with Extended Renominations and Composition of Predicate Complement, in Problems in Progamming, 2020, No 2–3, pp. 182–197.
5. O. Shkilniak, S. Shkilniak. First-Order Sequent Calculi of Logics of Quasiary Predicates with Extended Renominations and Equality, UkrPROG′2022, CEUR Workshop Proceedings (CEUR-WS.org), 2023, pp. 3–18.
6. S.C. Kleene, Mathematical Logic, Dower Publications, 2013.

Одержано: 06.09.2024
Внутрішня рецензія отримана: 13.09.2024
Зовнішня рецензія отримана: 16.09.2024

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор,
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

Місце роботи автора:

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
Тел. (+38) (044) 521-33-45
E-mail: ss.sh@knu.ua,
Сайт: csc.knu.ua