УДК 681.3.06

С.С. Шкільняк

ВІДНОШЕННЯ ЛОГІЧНОГО НАСЛІДКУ В КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІКАХ

Досліджуються семантичні властивості композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних та часткових неоднозначних предикатів пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів. Вивчаються відношення логічного наслідку для пар та множин формул, відношення логічної еквівалентності.

Розвиток інформаційних технологій в наш час зумовлює розширення сфери застосування математичної логіки. Це робить актуальною проблему побудови та дослідження адекватних логічних формалізмів, орієнтованих на розв'язання широкого спектра задач програмування та моделювання. Таку побудову природно вести на базі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу [1]. Логіки, збудовані [2] на основі зазначеного підходу, названі композиційно-номінативними.

Дана робота присвячена дослідженню семантичних властивостей композиційно-номінативних логік (КНЛ). Основна увага приділяється вивченню поняття логічного слідування, яке належить до найфундаментальніших понять логіки. Логічне слідування можна формалізувати за допомогою відношення логічного наслідку. Будуючи різні семантики, таких відношень можна ввести багато. Нестандартні семантики для пропозиційної логіки та різноманітні відношення логічного наслідку запропоновані в [3], їх побудова базується на постулатах частковості предикатів і симетричності істинності та хибності. В роботі [4] на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу та ідей роботи [3] запропоновані семантики для композиційно-номінативних логік, дано визначення композицій через області істинності та хибності предикатів, для таких логік введені відношення логічного наслідку. В даній роботі продовжується дослідження семантик для композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних предикатів пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів. Вивчаються відношення логічного наслідку в таких логіках. У різних семантиках ці відношення мають різні властивості, зокрема, в класичній логіці усі вони збігаються. Зазначені відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення еквівалентності, вони поширюються на множини формул.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі [2].

1. Основні поняття та визначення

Основним поняттям логіки з семантичного погляду є поняття предиката.

У загальному випадку під предикатом на множині D розумітимемо довільну часткову функцію вигляду $P : D \to \{T, F\}$.

Предикати можуть бути однозначними чи неоднозначними, тотальними чи частковими. Логіка тотальних однозначних предикатів – це класична логіка. Логіки однозначних часткових предикатів досліджені в [2], це логіки з неокласичною семантикою. Логіки тотальних неоднозначних предикатів природно назвати (див також [3]) логіками з пересиченою семантикою. Логіки часткових неоднозначних предикатів назвемо логіками із загальною семантикою (в [3] – логіки з релевантною семантикою).

Областю істинності та областю хибності предиката P на D назвемо множини

$$\boldsymbol{T}(P) = P^{-1}(T) = \{d\in D \mid T\in P(d)\} \text{ та}$$
$$\boldsymbol{F}(P) = P^{-1}(F) = \{d\in D \mid F\in P(d)\}.$$

Якщо предикат P – однозначний, то $\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Якщо предикат P – тотальний, то $\boldsymbol{T}(P)\cup\boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат P на D тотально істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$.

Предикат P на D тотально хибний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат P на D неспростовний, або частково істинний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Зрозуміло, що кожний неспростовний предикат є однозначним.

Предикат P на D виконуваний, якщо $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$.

Предикат P на D тотожно істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$ та $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Предикат P на D тотожно хибний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ та $\boldsymbol{F}(P) = D$.

Для однозначних предикатів пишемо $P(a) \cong Q(b)$, якщо із $P(a)\downarrow$ та $Q(b)\downarrow$ випливає $P(a) = Q(b)$.

V-іменною множиною (V-ІМ) над A назвемо [2] довільну однозначну функцію $\delta : V\to A$. V-ІМ подаватимемо у вигляді $[v_1\mapsto a_1,...,v_n\mapsto a_n,...]$. Тут $v_i\in V$, $a_i\in A$, $v_i \neq v_j$ при $i\neq j$.

Множину всіх V-ІМ над A позначатимемо ${}^VA$.

Для V-ІМ вводимо [2] операції:

$\|X$ –звуження за множиною X,

∇ – накладки, $\mathrm{r}\frac{\bar{v}}{\bar{x}}$ – реномінації.

Замість $\delta\|(V\backslash\{x\})$ писатимемо $\delta\|\text{-}x$.

Предикат вигляду $P : {}^VA\to\{T, F\}$ назвемо V-квазіарним предикатом на A.

Множину V-квазіарних предикатів на A позначимо Pr^A.

Ім'я $x\in V$ неістотне для однозначного V-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d\in {}^VA$ та $a, b\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) \cong P(d\nabla x\mapsto b)$.

Ім'я $x\in V$ строго неістотне для V-квазіарного предиката P, якщо для довільних $d\in {}^VA$, $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = P(d\|\text{-}x)$.

Предикат $P : {}^VA\to\{T, F\}$ назвемо еквітонним, якщо для довільних $d, d'\in {}^VA$ із $d\subseteq d'$ випливає $P(d)\subseteq P(d')$.

Еквітонність предиката означає, що прийняте ним значення не зникає при розширенні даних. Для однозначних часткових предикатів таке збереження прийнятого значення при розширенні даних неформально може трактуватися як те, що "інформативність" предиката не може зменшуватися при збільшенні "інформативності" вхідних даних. Для тотальних неоднозначних предикатів ситуація протилежна: при розширенні вхідних даних "інформативність" предиката може тільки зменшуватися, тому в класі тотальних неоднозначних предикатів поняття еквітонності не зовсім адекватне.

Дуальним до еквітонності є поняття антиеквітонності.

Предикат $P : {}^VA\to\{T, F\}$ назвемо антиеквітонним, якщо для довільних $d, d'\in {}^VA$ із $d\subseteq d'$ випливає $P(d)\supseteq P(d')$.

Якщо P антиеквітонний, то $P(\varnothing)$ складається з усіх значень, які предикат може приймати на D, тобто $P(\varnothing) = E_P$. В класі однозначних предикатів антиеквітонними можуть бути лише майже константні предикати, тобто такі, що $P(d)\cong T$ для всіх $d\in {}^VA$ або $P(d)\cong F$ для всіх $d\in {}^VA$. Отже, в класі однозначних предикатів поняття антиеквітонності малозмістовне. Водночас для тотальних неоднозначних предикатів поняття антиеквітонності цілком адекватне, адже для них антиеквітонність неформально означає, що "інформативність" предиката не може зменшуватися при збільшенні "інформативності" вхідних даних.

2. Композиції пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів

Композиції визначають універсальні методи побудови предикатів, вони є ядром логіки певного типу. Згідно композиційно-номінативного підходу [5] композиції уточнюємо як функції (операції) над іменованими предикатами.

На **пропозиційному** рівні предикати трактуються як абстрактні, тобто як функції вигляду $P : D\to\{T, F\}$, де D – абстрактна множина.

Фінітарні композиції пропозиційного рівня називають логічними зв'язками.

Основними логічними зв'язками є 1-арна композиція заперечення $\neg$ та бінарні композиції диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція **&**,

імплікація $\rightarrow$, еквіваленція $\leftrightarrow$, роздільна диз'юнкція $\oplus$.

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$ $\rightarrow(P, Q)$, $\&(P, Q)$ $\leftrightarrow(P, Q)$ та $\oplus(P, Q)$ далі позначатимемо $\neg P$, $P\vee Q$, $P\rightarrow Q$, $P\&Q$, $P\leftrightarrow Q$, $P\oplus Q$.

Зазначені предикати задамо через їх області істинності та хибності так.

$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P)$;

$\boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P)$.

$\boldsymbol{T}(P\vee Q) = \boldsymbol{T}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P\vee Q) = \boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\&Q) = \boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P\&Q) = \boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\rightarrow Q) = \boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q)$;

$\boldsymbol{F}(P\rightarrow Q) = \boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\leftrightarrow Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))$;

$\boldsymbol{F}(P\leftrightarrow Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))$.

$\boldsymbol{T}(P\oplus Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))$;

$\boldsymbol{F}(P\oplus Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))$.

До основних властивостей логічних зв'язок належать (див [2]):

– комутативність $\vee$, $\&$ та $\leftrightarrow$, $\oplus$;

– асоціативність $\vee$ та $\&$;

– дистрибутивність $\vee$ щодо $\&$ та $\&$ щодо $\vee$;

– ідемпотентність $\vee$ та $\&$;

– закони контрапозиції, зняття подвійного заперечення, де Моргана.

Композиції $\neg$ та $\vee$ називають базовими пропозиційними композиціями.

Композиції $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$.

Справді, композиції $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ та $\oplus$ можна звести до $\neg$, $\vee$ та $\&$:

$P\rightarrow Q = \neg P\vee Q$;

$P\leftrightarrow Q = (P\&Q)\vee(\neg Q\&\neg P)$;

$P\oplus Q = (P\&\neg Q)\vee(\neg P\&Q)$.

Далі використаємо закони де Моргана.

Можна також виразити $\leftrightarrow$ через $\oplus$ та $\oplus$ через $\leftrightarrow$:

$\neg(P\oplus Q) = P\leftrightarrow Q$ та

$\neg(P\leftrightarrow Q) = P\oplus Q$.

Твердження 1. Вищенаведені властивості справджуються для загального випадку логіки часткових неоднозначних предикатів.

Наведені визначення $P\rightarrow Q$, $P\leftrightarrow Q$ та $P\oplus Q$ є природними для однозначних предикатів. Для неоднозначних предикатів можливо $\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(P)\neq\varnothing$, звідки парадоксальне $\boldsymbol{F}(P\rightarrow P)\neq\varnothing$.

Твердження 2. Властивість $P\leftrightarrow Q = (P\rightarrow Q)\&(Q\rightarrow P)$ справджується тільки для однозначних предикатів.

Справді, маємо $\boldsymbol{F}((P\rightarrow Q)\&(Q\rightarrow P)) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)) = \boldsymbol{F}(P\leftrightarrow Q)$,
$\boldsymbol{T}((P\rightarrow Q)\&(Q\rightarrow P)) = \boldsymbol{T}(P\rightarrow Q)\cup\boldsymbol{T}(Q\rightarrow P) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(P))\cup(\boldsymbol{T}(Q)\cap\boldsymbol{F}(Q)) \neq \boldsymbol{T}(P\leftrightarrow Q)$.

Введемо зв'язку $\leftrightarrow_{Cm}$ (повна еквіваленція), яка буде узгоджена з $\rightarrow$.

Задамо $\leftrightarrow_{Cm}$ так:

$$\boldsymbol{T}(P\leftrightarrow_{Cm}Q) = (\boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q))\cap(\boldsymbol{F}(Q)\cup\boldsymbol{T}(P)),$$
$$\boldsymbol{F}(P\leftrightarrow_{Cm}Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q)).$$

Для логік однозначних предикатів зв'язки $\leftrightarrow$ та $\leftrightarrow_{Cm}$ збігаються.

Введемо строгу еквіваленцію $\leftrightarrow_{\mathrm{s}}$ наступним чином:

$$\boldsymbol{T}(P\leftrightarrow_{\mathrm{s}}Q) = (T(P)\cap T(Q)\cap F(P)\cap F(Q))\cup$$
$$\cup(T(P)\cap T(Q)\cap\overline{F(P)}\cap\overline{F(Q)})\cup$$
$$\cup(F(P)\cap F(Q)\cap\overline{T(P)}\cap\overline{T(Q)})\cup$$
$$\cup(\overline{T(P)}\cap\overline{T(Q)}\cap\overline{F(P)}\cap\overline{F(Q)});$$
$$\boldsymbol{F}(P\leftrightarrow_{\mathrm{s}}Q) =$$
$$= (T(P)\cap\overline{T(Q)})\cup(F(P)\cap\overline{F(Q)})\cup$$
$$\cup(T(Q)\cap\overline{T(P)})\cup(F(Q)\cap\overline{F(P)}).$$

Звідси випливає, що для кожного $d\in D$ при умові $(P\leftrightarrow_{\mathrm{s}}Q)(d) = T$ значення $P(d)$ та $Q(d)$ збігаються, тобто $P(d) = Q(d)$. При $(P\leftrightarrow_{\mathrm{s}}Q)(d) = F$ маємо $P(d)\neq Q(d)$.

Твердження 3. Для логік нетотальних чи неоднозначних предикатів строга еквіваленція $\leftrightarrow_{\mathrm{s}}$ незалежна від $\neg$ та $\vee$.

Справді, при побудові похідних пропозиційних композицій із базових $\neg$ та $\vee$ області істинності й хибності утворених за їх допомогою предикатів будуються із використанням тільки $\cup$ та $\cap$. Для часткових предикатів операціями $\cup$ та $\cap$ із областей істинності й хибності не завжди можна утворити всю D, а для неоднозначних предикатів – утворити $\varnothing$. Отже, доповнення до областей істинності й хибності нетотальних чи неоднозначних предикатів не можуть бути утворені із цих областей за допомогою $\cup$ та $\cap$.

На **реномінативному** рівні з'являються композиції реномінації $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \to Pr^A$.

Дамо визначення предиката $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ через його області істинності та хибності:

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{T}(P))$;

$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{F}(P))$.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ називають базовими композиціями логік реномінативного рівня.

До основних властивостей композицій $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ належать (див [2]):

RT) $\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R¬) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

R∨) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$.

Аналогічно записуються властивості R→, R&, R↔, R⊕.

RR) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$.

RN) Нехай ім‘я $y \in V$ неістотне для предиката P. Тоді $\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) \cong \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

RSN) Нехай ім‘я $y \in V$ строго неістотне для предиката P. Тоді $\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

Твердження 4. Вищенаведені властивості справджуються для загального випадку логіки часткових неоднозначних предикатів.

На **кванторному** рівні з'являються композиції квантифікації $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$.

Дамо визначення предикатів $\exists\boldsymbol{x}P$ і $\forall\boldsymbol{x}P$ через їх області істинності й хибності.

$\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d\nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d\nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A\}$.

$\boldsymbol{T}(\forall\boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d\nabla x \mapsto a) = T$ для всіх $a \in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\forall\boldsymbol{x}P) = \{d \in {}^{V}\!A \mid P(d\nabla x \mapsto a) = F$ для деякого $a \in A\}$.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists\boldsymbol{x}$ називають базовими композиціями логік кванторного рівня.

До основних властивостей композицій $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$ належать (див [2]):

1) комутативність однотипних кванторів: $\exists\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{y}P = \exists\boldsymbol{y}\exists\boldsymbol{x}P$ та $\forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{y}P = \forall\boldsymbol{y}\forall\boldsymbol{x}P$;

2) закони де Моргана для кванторів: $\neg\exists\boldsymbol{x}P = \forall\boldsymbol{x}\neg P$ та $\neg\forall\boldsymbol{x}P = \exists\boldsymbol{x}\neg P$;

3) неістотність квантифікованих імен: $\exists\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{x}P = \exists\boldsymbol{x}P$; $\exists\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{x}P = \forall\boldsymbol{x}P$; $\forall\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{x}P = \exists\boldsymbol{x}P$; $\forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{x}P = \forall\boldsymbol{x}P$;

4) $\exists\boldsymbol{x}P \vee \exists\boldsymbol{x}Q = \exists\boldsymbol{x}(P \vee Q)$ та $\forall\boldsymbol{x}P \,\&\, \forall\boldsymbol{x}Q = \forall\boldsymbol{x}(P \& Q)$.

Залучаючи до розгляду композицію реномінації, отримуємо також:

NR) $\exists\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P)$ та $\forall\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P)$ при $y \notin \{z, \bar{x}\}$.

R∃) $\exists\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP)$;

R∀) $\forall\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\forall yP)$.

Для R∃ та R∀ умова: $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

Твердження 5. Вищенаведені властивості справджуються для загального випадку логіки часткових неоднозначних предикатів.

Теорема 1. Композиції $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$ зберігають еквітонність та антиеквітонність V-квазіарних предикатів.

Доводимо для загального випадку логіки часткових неоднозначних предикатів.

Нехай $d' \supseteq d$, предикати P та Q еквітонні. Тоді маємо $d \in \boldsymbol{T}(P) \Rightarrow d' \in \boldsymbol{T}(P)$ та $d \in \boldsymbol{F}(P) \Rightarrow d' \in \boldsymbol{F}(P)$.

Якщо $d \in \boldsymbol{T}(\neg P)$, то $d \in \boldsymbol{F}(P)$, звідки за еквітонністю P маємо $d' \in \boldsymbol{F}(P)$, а звідси $d' \in \boldsymbol{T}(\neg P)$. Якщо $d \in \boldsymbol{F}(\neg P)$, то $d \in \boldsymbol{T}(P)$, звідки за еквітонністю P маємо $d' \in \boldsymbol{T}(P)$, а звідси $d' \in \boldsymbol{F}(\neg P)$. Отже, $\neg P$ еквітонний.

Якщо $d \in \boldsymbol{T}(P \vee Q)$, то $d \in \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q)$, звідки $d \in \boldsymbol{T}(P)$ або $d \in \boldsymbol{T}(Q)$. Якщо $d \in \boldsymbol{T}(P)$, то $d' \in \boldsymbol{T}(P)$, звідки $d' \in \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q)$, тому $d' \in \boldsymbol{T}(P \vee Q)$; якщо $d \in \boldsymbol{T}(Q)$, то $d' \in \boldsymbol{T}(Q)$, звідки $d' \in \boldsymbol{T}(P) \cup \boldsymbol{T}(Q)$, тому $d' \in \boldsymbol{T}(P \vee Q)$. Якщо $d \in \boldsymbol{F}(P \vee Q)$, то $d \in \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q)$, звідки $d \in \boldsymbol{F}(P)$ та $d \in \boldsymbol{F}(Q)$. Але якщо $d \in \boldsymbol{F}(P)$, то $d' \in \boldsymbol{F}(P)$, якщо $d \in \boldsymbol{F}(Q)$, то $d' \in \boldsymbol{F}(Q)$, звідки $d' \in \boldsymbol{F}(P) \cap \boldsymbol{F}(Q)$, тому $d' \in \boldsymbol{F}(P \vee Q)$. Отже, предикат $P \vee Q$ еквітонний.

Якщо $d \in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))$, то $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in \boldsymbol{T}(P)$. Але $d' \supseteq d \Rightarrow \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d') \supseteq \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$, звідки за еквітонністю P маємо $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d') \in \boldsymbol{T}(P)$, а звідси

$d'\in \boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}P)$. Аналогічно $d\in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) \Rightarrow$ $\Rightarrow d'\in \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))$. Отже, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ еквітонний.

Якщо $d\in \boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x}(P))$, то $P(d\nabla x\mapsto a) = T$ для деякого $a\in A$. Звідси $d\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{T}(P)$. Із $d' \supseteq d$ випливає $d'\nabla x\mapsto a \supseteq d\nabla x\mapsto a$, тому $d'\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{T}(P)$ за еквітонністю предиката P, звідки $d'\in \boldsymbol{T}(\exists \boldsymbol{x}(P))$. Якщо $d\in \boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x}(P))$, то $P(d\nabla x\mapsto a) = F$ для всіх $a\in A$. Звідси $d\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{F}(P)$ для всіх $a\in A$. Із $d' \supseteq d$ випливає $d'\nabla x\mapsto a \supseteq d\nabla x\mapsto a$, тому за еквітонністю P для всіх $a\in A$ маємо $d'\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{F}(P)$, звідки $d'\in \boldsymbol{F}(\exists \boldsymbol{x}(P))$. Отже, предикат $\exists \boldsymbol{x}(P)$ еквітонний.

Доведення збереження антиеквітонності аналогічне, тільки в доведенні треба поміняти місцями d та d'.

Наслідок 1. Класи еквітонних та антиеквітонних квазіарних предикатів замкнені щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists \boldsymbol{x}$, $\forall \boldsymbol{x}$.

Наведені далі співвідношення видаються очевидними, але вони вірні далеко не завжди.

$$\boldsymbol{T}(R_y^x(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P)) \qquad (\text{TR}\exists)$$

$$\boldsymbol{F}(\exists x(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P)) \qquad (\text{FR}\exists)$$

$$\boldsymbol{T}(\forall x(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(R_y^x(P)) \qquad (\text{TR}\forall)$$

$$\boldsymbol{F}(R_y^x(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P)) \qquad (\text{FR}\forall)$$

Теорема 2. 1. Для нееквітонних предикатів не справджуються всі чотири співвідношення TR∃, FR∃, TR∀, FR∀.

2. Для еквітонних предикатів справджуються TR∃ і FR∀ та не справджуються FR∃ і TR∀.

3. Для антиеквітонних предикатів справджуються FR∃ і TR∀ та не справджуються TR∃ і FR∀.

Доводимо п. 1.

Задамо предикат P так:

$$P(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } x\in im(d), \\ T, \text{ якщо } x\notin im(d). \end{cases}$$

При $y\notin im(\delta)$ маємо $\delta(y)\uparrow$, звідки $R_y^x(P)(\delta) = P(\delta\nabla x\mapsto\delta(y)) = P(\delta\|\text{-}x) = T$. При $y\in im(\eta)$ маємо $\delta(\eta)\downarrow$, тому $R_y^x(P)(\eta) =$ $= \eta\nabla x\mapsto\eta(y)) = F$. Звідси $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subset {}^VA$ та $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subset {}^VA$. Проте для всіх $d\in {}^VA$ та $a\in A$ маємо $P(d\nabla x\mapsto a) = F$, тому $\boldsymbol{F}(\exists x(P)) = {}^VA$ та $\boldsymbol{T}(\exists x(P)) = \varnothing$. Звідси невірно $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P))$ та невірно $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$.

Задамо тепер предикат P так:

$$P(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } x\in im(d), \\ F, \text{ якщо } x\notin im(d). \end{cases}$$

Тоді $\boldsymbol{T}(\forall x(P)) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x(P)) = \varnothing$, $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subset {}^VA$ та $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, Звідси невірно $\boldsymbol{T}(\forall x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$ та невірно $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P))$.

Доводимо п. 2. Нехай $d\in \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$, тоді $T\in (R_y^x(P))(d)$, звідки $T\in P(d\nabla x\mapsto d(y))$. Якщо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, то $T\in P(d\nabla x\mapsto a)$, звідки $T\in (\exists x(P))(d)$. Якщо $d(y)\uparrow$, то $T\in P(d\|\text{-}x)$, звідки за еквітонністю $T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A$, тому $T\in (\exists x(P))(d)$. В обох випадках маємо $T\in (\exists x(P))(d)$, тому $d\in \boldsymbol{T}(\exists x(P))$. Отже, $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P))$ вірне для довільних еквітонних предикатів.

Нехай $d\in \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$, тоді маємо $F\in (R_y^x(P))(d)$, звідки $F\in P(d\nabla x\mapsto d(y))$. Якщо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, то $F\in P(d\nabla x\mapsto a)$, звідки $F\in (\forall x(P))(d)$. Якщо $d(y)\uparrow$, то $F\in P(d\|\text{-}x)$, звідки за еквітонністю $F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A$, тому $F\in (\forall x(P))(d)$. В обох випадках $F\in (\forall x(P))(d)$, тому $d\in \boldsymbol{F}(\forall x(P))$. Отже, $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P))$ вірне для довільних еквітонних предикатів.

Задамо предикат P так:

$$P(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } x\in im(d), \\ \text{невизначене, якщо } x\notin im(d). \end{cases}$$

Тоді маємо $\boldsymbol{F}(\forall x(P)) = \boldsymbol{F}(\exists x(P)) = {}^VA$, $\boldsymbol{T}(R_y^x(P)) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(\exists x(P)) = \boldsymbol{T}(\forall x(P)) = \varnothing$, $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subset {}^VA$. Отже, для нетотальних однозначних еквітонних предикатів $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$ невірне.

Задамо тепер предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))=\boldsymbol{T}(\exists x(P))=\boldsymbol{T}(\forall x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=$ $=\boldsymbol{F}(\exists x(P))={}^VA$, Тому для тотальних неоднозначних еквітонних предикатів $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$ невірне.

Задамо предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \text{невизначене, якщо } x\notin im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\boldsymbol{T}(\forall x(P))=\boldsymbol{T}(\forall x(P))={}^VA$, $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))=\varnothing$, $\boldsymbol{F}(\exists x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=\varnothing$, $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subset {}^VA$. Отже, для нетотальних однозначних еквітонних предикатів $\boldsymbol{T}(\forall x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$ невірне.

Тепер задамо предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))=\boldsymbol{F}(\exists x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=\boldsymbol{T}(\forall x(P))=$ $=\boldsymbol{T}(\exists x(P))={}^VA$, Тому для тотальних неоднозначних еквітонних предикатів $\boldsymbol{T}(\forall x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$ невірне.

Доводимо п. 3. Нехай $d\in \boldsymbol{T}(\forall x(P))$, тоді $d\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{T}(P)$ для всіх $a\in A$, тобто $T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A$. Якщо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, то $T\in P(d\nabla x\mapsto d(y))$, звідки $d\in \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$. Якщо $d(y)\uparrow$, то маємо $r_y^x(d)=d\|\text{-}x\subset d\nabla x\mapsto a$ для всіх $a\in A$, звідки за антиеквітонністю $T\in P(d\|\text{-}x)=R_y^x(P)(d)$, тобто $d\in \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$. Отже, для антиеквітонних предикатів завжди $\boldsymbol{T}(\forall x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(R_y^x(P))$.

Нехай $d\in \boldsymbol{F}(\exists x(P))$, тоді $d\nabla x\mapsto a\in \boldsymbol{F}(P)$ для всіх $a\in A$, тобто $F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A$. Якщо $d(y)\downarrow a$ для деякого $a\in A$, то $F\in P(d\nabla x\mapsto d(y))$, звідки $d\in \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$. Якщо $d(y)\uparrow$, то $r_y^x(d)=d\|\text{-}x\subset d\nabla x\mapsto a$ для всіх $a\in A$, звідки за антиеквітонністю маємо $F\in P(d\|\text{-}x)=R_y^x(P)(d)$, тобто $d\in \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$. Отже, $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(R_y^x(P))$ вірне для довільних антиеквітонних предикатів.

Задамо предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}F, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \text{невизначене, якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))=\boldsymbol{T}(\exists x(P))=\boldsymbol{T}(\forall x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=$ $=\boldsymbol{F}(\exists x(P))=\varnothing$. Отже, для нетотальних однозначних антиеквітонних предикатів $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P))$ невірне.

Задамо тепер предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\boldsymbol{F}(\exists x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=\varnothing$, $\varnothing\subset \boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, $\boldsymbol{T}(\exists x(P))=\boldsymbol{T}(\forall x(P))={}^VA$, $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))={}^VA$. Тому для тотальних неоднозначних антиеквітонних предикатів $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P))$ невірне.

Задамо предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \text{невизначене, якщо } x\notin im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))=\boldsymbol{F}(\exists x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=$ $=\boldsymbol{F}(\forall x(P))=\varnothing$, Отже, для нетотальних однозначних антиеквітонних предикатів $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(\forall x(P))$ невірне.

Тепер задамо предикат P так:
$$P(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

Тоді маємо $\boldsymbol{T}(\forall x(P))=\boldsymbol{T}(\exists x(P))=\varnothing$, $\boldsymbol{F}(\exists x(P))=\boldsymbol{F}(\forall x(P))={}^VA$, $\boldsymbol{F}(R_y^x(P))={}^VA$ $\varnothing\subset \boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subset {}^VA$, Тому для тотальних неоднозначних антиеквітонних предикатів $\boldsymbol{T}(R_y^x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(\forall x(P))$ теж невірне.

Наслідок 2. 1) для нееквітонних предикатів не справджуються всі 4 співвідношення $\boldsymbol{T}(P)\subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P))$, $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq \boldsymbol{F}(P)$, $\boldsymbol{T}(\forall x(P))\subseteq \boldsymbol{T}(P)$, $\boldsymbol{F}(P)\subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P))$;

2) для еквітонних предикатів справджуються $\boldsymbol{T}(P)\subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P))$ і $\boldsymbol{F}(P)\subseteq \mathbf{F}(\forall x(P))$

та не справджуються $\boldsymbol{F}(\exists x(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(P)$ і $\boldsymbol{T}(\forall x(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(P)$;

3) для антиеквітонних предикатів справджуються $\boldsymbol{F}(\exists x(P)) \subseteq \boldsymbol{F}(P)$ і $\boldsymbol{T}(\forall x(P)) \subseteq \boldsymbol{T}(P)$ та не справджуються $\boldsymbol{T}(P) \subseteq \boldsymbol{T}(\exists x(P))$ і $\boldsymbol{F}(P) \subseteq \boldsymbol{F}(\forall x(P))$.

3. Семантичні властивості пропозиційного рівня

Семантичними моделями пропозиційної логіки (ПЛ) є об'єкти вигляду $(A, Pr, \boldsymbol{C})$ – композиційні предикатні системи пропозиційного рівня. Тут Pr – множина абстрактних предикатів на A, $\boldsymbol{C}$ – множина пропозиційних композицій над Pr, визначена множиною базових композицій $\{\neg, \vee\}$. При зафіксованій множині $\boldsymbol{C}$ система $(A, Pr, \boldsymbol{C})$ однозначно визначається об'єктом (A, Pr) – алгебраїчною системою з абстрактними предикатами (ААС).

Побудова композиційної системи визначає мову пропозиційної логіки.

Алфавіт мови: символи логічних зв'язок $\neg$ і $\vee$ та множина Ps пропозиційних символів.

Визначення множини Fp пропозиційних формул (ПФ):

1) кожний $A \in Ps$ є ПФ; такі ПФ назвемо атомарними;

2) якщо Φ та Ψ є ПФ, то $\neg\Phi$ та $\vee\Phi\Psi$ є ПФ.

Інтерпретуємо мову ПЛ на семантичних моделях ПЛ. Конкретна інтерпретація мови визначається АС (A, Pr) та виділенням базових предикатів на A, яке задаємо за допомогою тотального однозначного відображення $\boldsymbol{I} : Ps \to Pr$. Тому моделями мови ПЛ вважаємо [2] ААС із виділеними базовими предикатами. Будемо їх позначати $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$.

Відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J} : Fp \to Pr$ визначаємо за допомогою $\boldsymbol{I}$ так:

1) $\boldsymbol{J}(B) = \boldsymbol{I}(B)$ для кожного $B \in Ps$;

2) нехай $\boldsymbol{J}(\Phi) = P$ та $\boldsymbol{J}(\Psi) = Q$; тоді $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg P$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = P \vee Q$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, – позначаємо Φ_A.

Формула Φ тотально істинна при інтерпретації на $\mathbf{A} = (A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-істинна, якщо Φ_A – тотально істинний предикат.

Це позначаємо $\boldsymbol{A} \models\!\equiv \Phi$.

Формула Φ тотально істинна, якщо Φ тотально істинна при кожній інтерпретації. Це позначаємо $\models\!\equiv \Phi$.

Формула Φ частково істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-неспростовна, якщо Φ_A – частково істинний (неспростовний) предикат.

Це позначаємо $\boldsymbol{A} \models \Phi$.

Формула Φ частково істинна, або неспростовна, якщо Φ частково істинна при кожній інтерпретації.

Це позначаємо $\models \Phi$.

Подібним чином можна дати визначення виконуваної на $\boldsymbol{A}$, виконуваної, тотожно істинної та тотожно хибної на $\boldsymbol{A}$, тотожно істинної та тотожно хибної формули.

АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ назвемо дуальною до $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$, якщо для кожного $\Phi \in Ps$ маємо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$.

Зрозуміло, що у цьому випадку $T(\Phi_A) = \overline{F(\Phi_B)}$ та $F(\Phi_A) = \overline{T(\Phi_B)}$, тобто $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ дуальна до $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$.

Якщо $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема 3. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді для кожної пропозиційної формули Φ маємо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$.

Доводимо індукцією згідно побудови формули.

Для атомарних $\Phi \in Ps$ маємо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$ згідно визначення дуальної АС.

Нехай Φ має вигляд $\neg\Psi$. Тоді $T(\Phi_B) = T(\neg\Psi_B) = F(\Psi_B) = \overline{T(\Psi_A)} = \overline{F(\neg\Psi_A)} = \overline{F(\Phi_A)}$, $F(\Phi_B) = F(\neg\Psi_B) = T(\Psi_B) = \overline{F(\Psi_A)} = \overline{T(\neg\Psi_A)} = \overline{T(\Phi_A)}$.

Нехай Φ має вигляд $\vee\Psi\Xi$. Тоді $T(\Phi_B) = T(\Psi_B) \cup T(\Xi_B) = \overline{F(\Psi_A)} \cup \overline{F(\Xi_A)} =$

$= \overline{F(\Psi_A)} \cap \overline{F(\Xi_A)} = \overline{F(\Psi_A \vee \Xi_A)} = \overline{F(\Phi_A)},$

$F(\Phi_B) = F(\Psi_B) \cap F(\Xi_B) = \overline{T(\Psi_A)} \cap \overline{T(\Xi_A)} =$

$= \overline{T(\Psi_A) \cup T(\Xi_A)} = \overline{T(\Psi_A \vee \Xi_A)} = \overline{T(\Phi_A)}.$

Наслідок 3. Неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

Це означає, що Φ_A неспростовний на АС $\boldsymbol{A}$ з частковими однозначними предикатами $\Leftrightarrow$ Φ_B тотально істинний на дуальній АС $\boldsymbol{B}$ з тотальними неоднозначними предикатами.

За кожною АС з частковими однозначними предикатами $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ збудуємо дуальну АС з тотальними неоднозначними предикатами $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$. Нехай Φ_A неспростовний, тобто $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \varnothing$. Тоді на дуальній АС $\boldsymbol{B}$ маємо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)} = A$, тобто Φ_B тотально істинний.

За кожною АС з тотальними неоднозначними предикатами $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ збудуємо дуальну АС з частковими однозначними предикатами $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Нехай Φ_B тотально істинний, тобто $\boldsymbol{T}(\Phi_B) = A$. Тоді на дуальній АС $\boldsymbol{A}$ $F(\Phi_A) = \overline{T(\Phi_B)} = \varnothing$, тобто Φ_A неспростовний.

Традиційна інтерпретація ПФ дається за допомогою істиннісних оцінок.

Істиннісна оцінка мови ПЛ – це довільне тотальне однозначне відображення $\tau: Ps \to \{T, F\}$.

Таке $\tau: Ps \to \{T, F\}$ продовжимо до $\tau: Fp \to \{T, F\}$. Для цього покладемо

$\tau(\neg\Phi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = F$;

$\tau(\vee\Phi\Psi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = T$ або $\tau(\Psi) = T$.

Формула Φ тавтологія, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істиннісній оцінці τ мови ПЛ.

З наведених визначень випливають наступні твердження.

1. Інтерпретація ПФ за допомогою істиннісних оцінок еквівалентна інтерпретації ПФ на АС з тотальними однозначними предикатами. Тоді маємо:

Φ неспростовна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Φ тотально істинна $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ Φ тавтологія.

2. При інтерпретації ПФ на АС з частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) істинність трактуємо як неспростовність. Кожну ПФ можна проінтерпретувати як нетотальний предикат тому множина тотально істинних формул порожня. Тоді маємо:

Φ неспростовна $\Leftrightarrow$ Φ тавтологія.

3. При інтерпретації ПФ на АС з тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика) істинність трактуємо як тотальну істинність. Кожну ПФ можна проінтерпретувати як предикат із непорожньою областю хибності, тому множина неспростовних формул порожня. У цьому випадку:

Φ тотально істинна $\Leftrightarrow$ Φ тавтологія.

4. При інтерпретації ПФ на АС з частковими неоднозначними предикатами (загальна семантика) кожний ПС можна проінтерпретувати як нетотальний предикат із однаковими непорожніми областями істинності та хибності, звідки кожну ПФ можна проінтерпретувати як нетотальний предикат із непорожньою областю хибності, тому множини тотально істинних та неспростовних формул порожні.

4. Відношення логічного наслідку

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів можна ввести багато відношень на множині формул. Задамо 5 "природних" відношень логічного наслідку. В різних семантиках ці відношення мають різні властивості.

Спочатку задамо відношення наслідку для двох формул при фіксованій інтерпретації на АС $\boldsymbol{A}$.

1. "Істиннісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_T$:

$\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_T \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

2. "Хибнісний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_F$:

$\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_F \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

3. "Сильний" наслідок $_{\boldsymbol{A}}|=_{TF}$:

$\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_{TF} \Psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

4. "Неспростовнісний" $_{\boldsymbol{A}}|=_{Cl}$:

$\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_{Cl} \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

5. "Насичений" $_{\boldsymbol{A}}|=_{Cm}$:

$\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|=_{Cm} \Psi \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{F}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = A$.

Тепер визначаємо відповідні логічні наслідки для двох формул.

1. "Істиннісний" логічний наслідок $|=_T$: $\Phi |=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi_{\boldsymbol{A}}|=_T \Psi$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

2. "Хибнісний" логічний наслідок $|=_F$: $\Phi |=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi_{\boldsymbol{A}}|=_F \Psi$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

3. "Сильний" логічний наслідок $|=_{TF}$: $\Phi |=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi_{\boldsymbol{A}}|=_{TF} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

4. "Неспростовнісний" логічний наслідок $|=_{Cl}$: $\Phi |=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \Phi_{\boldsymbol{A}}|=_{Cl} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

5. "Насичений" логічний наслідок $|=_{Cm}$: $\Phi |=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi_{\boldsymbol{A}}|=_{Cm} \Psi$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

Неспростовнісний логічний наслідок будемо також називати неокласичним.

Традиційним для пропозиційної логіки є відношення тавтологічного наслідку.

Ψ є тавтологічним наслідком [2] формули Φ (позначимо $\Phi |=_t \Psi$), якщо $\Phi \to \Psi$ – тавтологія.

Нехай $\Phi |= \Psi$, де $|=$ – одне з відношень $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}|= \Psi$ мусить, зокрема, виконуватися для кожної класичної АС $\boldsymbol{A}$ з тотальними однозначними предикатами, тому формула $\Phi \to \Psi$ мусить бути класичною тавтологією, тобто тоді $\Phi \models \Psi$.

Введемо тепер відношення слабких наслідків.

Формула Ψ є слабким логічним наслідком [2] формули Φ, що позначимо $\Phi \,||\!=\, \Psi$, якщо для кожної $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ з умови $\boldsymbol{A} |= \Phi$ випливає $\boldsymbol{A} |= \Psi$.

Формула Ψ є слабким тотальним наслідком формули Φ, що позначимо $\Phi \,||\!\equiv\, \Psi$, якщо для кожної $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ з умови $\boldsymbol{A} |\!\equiv \Phi$ випливає $\boldsymbol{A} |\!\equiv \Psi$.

Твердження 6. Відношення логічного наслідку $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_t$, $||\!=$, $|\!\equiv$ рефлексивні й транзитивні.

Теорема 4. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді маємо

1) $\Phi_A|=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|=_F \Psi$ та $\Phi_A|=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|=_T \Psi$;

2) $\Phi_A|=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B|=_{Cm} \Psi$ та $\Phi_A|=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi_B |=_{Cl} \Psi$.

Доводимо п. 1. Маємо $\Phi_A|=_T \Psi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T(\Phi_A) \subseteq T(\Psi_A) \Leftrightarrow \overline{F(\Phi_B)} \subseteq \overline{F(\Psi_B)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(\Phi_B) \supseteq F(\Psi_B) \Leftrightarrow \Phi_B|=_F \Psi$; $\Phi_A|=_F \Psi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow F(\Phi_A) \supseteq F(\Psi_A) \Leftrightarrow \overline{T(\Phi_B)} \supseteq \overline{T(\Psi_B)} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T(\Phi_B) \subseteq T(\Psi_B) \Leftrightarrow \Phi_B|=_T \Psi$.

Доводимо п. 2. Маємо $\Phi_A|=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing \Leftrightarrow \overline{F(\Phi_B)} \cap \overline{T(\Psi_B)} =$ $= \varnothing \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Phi_B) \cup \boldsymbol{T}(\Psi_B) = A \Leftrightarrow \Phi_B|=_{Cm} \Psi$; $\Phi_A|=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = A \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \overline{F(\Phi_A)} \cap \overline{T(\Psi_A)} = \varnothing \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_B) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_B) =$ $= \varnothing \Leftrightarrow \Phi_B|=_{Cl} \Psi$.

Наслідок 4. У випадку загальної семантики $\Phi |=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi |=_F \Psi \Leftrightarrow |=_{TF} \Psi$.

Розглянемо тепер наслідки з порожньої множини формул.

$\varnothing_A|=_T \Phi$ означає $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = A$, тобто $A |\!\equiv \Phi$.

$\varnothing_A|=_F \Phi$ означає $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \varnothing$, тобто $A |= \Phi$.

$\varnothing_A|=_{TF} \Phi$ означає $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = A$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \varnothing$, тобто $A |\!\equiv \Phi$ та $A |= \Phi$.

Інакше кажучи, $\varnothing_A|=_{TF} \Phi \Leftrightarrow \Phi_A$ тотожно істинний.

$\varnothing_A|=_{Cl} \Phi$ означає $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \varnothing$, тобто $A |= \Phi$.

$\varnothing_A|=_{Cm} \Phi$ означає $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = A$, тобто $A |\!\equiv \Phi$.

Звідси отримуємо:

$\varnothing |=_T \Phi$ означає, що для всіх $\boldsymbol{A}$ маємо $\varnothing_A|=_T \Phi$, тобто $|\!\equiv \Phi$.

$\varnothing |=_F \Phi$ означає, що для всіх $\boldsymbol{A}$ маємо $\varnothing_A|=_F \Phi$, тобто $|= \Phi$.

$\varnothing |=_{TF} \Phi$ означає, що для всіх $\boldsymbol{A}$ маємо $\varnothing_A|=_{TF} \Phi$, тобто $|\!\equiv \Phi$ та $|= \Phi$.

Таким чином, $\varnothing |=_{TF} \Phi$ справджується тільки для тавтологій у класичній семантиці.

$\varnothing |=_{Cl} \Phi$ означає, що для всіх $\boldsymbol{A}$ маємо $\varnothing_A|=_{Cl} \Phi$, тобто $|= \Phi$.

$\varnothing |=_{Cm} \Phi$ означає, що для всіх $\boldsymbol{A}$ маємо $\varnothing_A|=_{Cm} \Phi$, тобто $|\!\equiv \Phi$.

$\varnothing |=_t \Phi$ означає, що Φ – тавтологія.

$\varnothing \,||\!=\, \Phi$ означає $|= \Phi$.

$\varnothing \,||\!\equiv\, \Phi$ означає $|\!\equiv \Phi$.

Розглянемо співвідношення між введеними відношеннями логічного наслідку.

Неважко переконатись, що при інтерпретації на АС з тотальними однозначними предикатами (класична семантика) усі вищевизначені логічні наслідки еквівалентні.

Для інших семантик справджуються наступні твердження.

Теорема 5. Для випадку неокласичної семантики:

1) $\Phi \models_{Cl} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \models_{t} \Psi$;

2) $\Phi \models_{T} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!\equiv \Psi$;

3) $\Phi \models_{F} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!= \Psi$.

4) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \models_{Cl} \Psi$ (modus ponens); $\Phi \models_{Cl} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

5) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \models_{T} \Psi$; $\Phi \not\models_{T} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

6) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \not\models_{F} \Psi$; $\Phi \models_{F} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

7) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \not\models_{TF} \Psi$; $\Phi \not\models_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$.

Теорема 6. Для випадку пересиченої семантики:

1) $\Phi \models_{Cm} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \models_{t} \Psi$;

2) $\Phi \models_{T} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!\equiv \Psi$;

3) $\Phi \models_{F} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!= \Psi$;

4) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \models_{Cm} \Psi$; $\Phi \models_{Cm} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

5) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \not\models_{T} \Psi$; $\Phi \models_{T} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

6) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \models_{F} \Psi$; $\Phi \not\models_{F} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$;

7) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \not\models_{TF} \Psi$; $\Phi \not\models_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$.

Теорема 7. Для випадку загальної семантики:

1) $\Phi \models_{TF} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \models_{T} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \models_{F} \Psi$;

2) $\Phi \models_{T} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!\equiv \Psi$ та $\Phi \models_{F} \Psi \;\Leftrightarrow\; \Phi \,\|\!= \Psi$;

3) $\Phi \,\&\, (\Phi\rightarrow\Psi) \not\models \Psi$ та $\Phi \not\models \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$.

Тут $\models$ – одне з $\models_T, \models_F, \models_{TF}$.

Аналогічні твердження щодо modus ponens і теореми дедукції (твердження "$\Phi \,\&\, \Psi \models \vartheta \;\Rightarrow\; \Psi \models \Phi\rightarrow\vartheta$") для подібних семантик та відношень пропозиційної логіки наведені в [3].

Зауважимо, що $\Phi \models \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$ та "$\Phi \,\&\, \Psi \models \vartheta \Rightarrow \Psi \models \Phi\rightarrow\vartheta$" одночасно виконуються чи не виконуються для кожного із відношень $\models_{Cl}, \models_{Cm}, \models_T, \models_F, \models_{TF}$ у відповідних семантиках.

У певному розумінні "природним" для неокласичної семантики є наслідок $\models_{Cl}$, для пересиченої – наслідок $\models_{Cm}$, для загальної – наслідок $\models_{TF}$.

Таким чином, отримуємо наступні співвідношення для множин формул, які перебувають у відповідних відношеннях.

1. Неокласична семантика (АС з нетотальними однозначними предикатами):

$\models_{TF} \subset \models_T$, $\models_{TF} \subset \models_F$, $\models_T \subset \models_{Cl}$, $\models_F \subset \models_{Cl}$; $\models_{Cl} = \models_t$, $\models_F = \|\!=$, $\models_T = \|\!\equiv$.

При інтерпретації формул як усюди невизначених предикатів $\models_{Cm}$ не виконується для жодної пари формул, тому $\models_{Cm} = \varnothing$.

2. Пересичена семантика (АС з тотальними неоднозначними предикатами):

$\models_{TF} \subset \models_T$, $\models_{TF} \subset \models_F$, $\models_T \subset \models_{Cm}$, $\models_F \subset \models_{Cm}$; $\models_{Cm} = \models_t$, $\models_F = \|\!=$, $\models_T = \|\!\equiv$.

При інтерпретації формул як предикатів із областями істинності та хибності, рівними A, відношення $\models_{Cl}$ не виконується для жодної пари формул, тому $\models_{Cl} = \varnothing$.

3. Загальна семантика (АС з нетотальними неоднозначними предикатами):

$\models_{TF} = \models_T = \models_F = \|\!= \;=\; \|\!\equiv \;\subset \models_t$.

При цьому $\models_{Cl} = \varnothing$ та $\models_{Cm} = \varnothing$.

Відношення логічного наслідку індукують на множині формул відповідні відношення логічної еквівалентності. Такі відношення рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Φ та Ψ Cl-еквівалентні в *АС* $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Phi \,_{A}\!\sim_{Cl} \Psi$), якщо

$\Phi\,_A\!\models_{Cl} \Psi$ та $\Psi\,_A\!\models_{Cl} \Phi$.

Φ та Ψ Cm-еквівалентні в *АС* $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Phi \,_{A}\!\sim_{Cm} \Psi$), якщо

$\Phi\,_A\!\models_{Cm} \Psi$ та $\Psi\,_A\!\models_{Cm} \Phi$.

Φ та Ψ T-еквівалентні в *АС* $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Phi \,_{A}\!\sim_{T} \Psi$), якщо

$\Phi\,_A\!\models_{T} \Psi$ та $\Psi\,_A\!\models_{T} \Phi$.

Φ та Ψ F-еквівалентні в *АС* $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Phi \,_{A}\!\sim_{F} \Psi$), якщо

$\Phi\,_A\!\models_{F} \Psi$ та $\Psi\,_A\!\models_{F} \Phi$.

Φ та Ψ TF-еквівалентні в АС $\boldsymbol{A}$, або строго еквівалентні в *АС* $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Phi \,_{A}\!\sim_{TF} \Psi$), якщо

$\Phi\,_A\!\models_{TF} \Psi$ та $\Psi\,_A\!\models_{TF} \Phi$.

Звідси, зокрема, отримуємо:

$\Phi \,_{A}\!\sim_{T} \Psi \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$;

$\Phi_{\boldsymbol{A}}{\sim_F}\Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\Psi_A)$;

$\Phi_{\boldsymbol{A}}{\sim_{TF}}\Psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A)=\boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A)=\boldsymbol{F}(\Psi_A)$.

Φ та Ψ логічно *Cl*-еквівалентні (позначаємо $\Phi\sim_{Cl}\Psi$), якщо $\Phi\models_{Cl}\Psi$ та $\Psi\models_{Cl}\Phi$.

Φ та Ψ логічно *Cm*-еквівалентні (позначаємо $\Phi\sim_{Cm}\Psi$), якщо $\Phi\models_{Cm}\Psi$ та $\Psi\models_{Cm}\Phi$.

Φ та Ψ логічно *T*-еквівалентні (позначаємо $\Phi\sim_T\Psi$), якщо $\Phi\models_T\Psi$ та $\Psi\models_T\Phi$.

Φ та Ψ логічно *F*-еквівалентні (позначаємо $\Phi\sim_F\Psi$), якщо $\Phi\models_F\Psi$ та $\Psi\models_F\Phi$.

Φ та Ψ логічно *TF*-еквівалентні, або логічно строго еквівалентні (позначаємо $\Phi\sim_{TF}\Psi$), якщо $\Phi\models_{TF}\Psi$ та $\Psi\models_{TF}\Phi$.

Формули Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні (позначимо $\Phi\sim_t\Psi$), якщо $\Phi\models_t\Psi$ та $\Psi\models_t\Phi$.

$\Phi\sim_{TF}\Psi$ означає: Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат. Справді, $\Phi\sim_{TF}\Psi \Leftrightarrow \Phi\models_{TF}\Psi$ та $\Psi\models_{TF}\Phi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A)=\boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$ для кожної АС $\boldsymbol{A}$.

Нехай $\Phi\sim\Psi$, де $\sim$ – одне з відношень $\sim_t$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$. Тоді $\Phi_{\boldsymbol{A}}\models\Psi$ та $\Psi_{\boldsymbol{A}}\models\Phi$ мусить, зокрема, виконуватися для кожної класичної АС $\boldsymbol{A}$ з тотальними однозначними предикатами, тому $\Phi\leftrightarrow\Psi$ мусить бути класичною тавтологією.

При інтерпретації на АС з тотальними однозначними предикатами (класична семантика) усі вищевизначені відношення логічної еквівалентності збігаються.

Вищенаведені основні властивості логічних зв'язок можна подати через логічну еквівалентність відповідних формул. Для кожної з цих властивостей формули у лівій та правій частинах задають один і той же предикат, тому такі формули логічно строго еквівалентні.

Логічні зв'язки $\leftrightarrow$ та $\leftrightarrow_{\boldsymbol{Cm}}$ узгоджуються з відношеннями еквівалентності $\sim_{Cl}$ та $\sim_{Cm}$.

Твердження 7. 1) для неокласичної семантики $\Phi\sim_{Cl}\Psi \Leftrightarrow\ \models\Phi\leftrightarrow\Psi \Leftrightarrow \Phi\leftrightarrow\Psi$ тавтологія;

2) для пересиченої семантики $\Phi\sim_{Cm}\Psi \Leftrightarrow\ \models\Phi\leftrightarrow_{\boldsymbol{Cm}}\Psi \Leftrightarrow \Phi\leftrightarrow\Psi$ тавтологія.

Логічна зв'язка $\leftrightarrow_{\mathbf{s}}$ узгоджується з відношенням $\sim_{TF}$ при умові розширення мови відповідним символом $\leftrightarrow_s$.

У цьому випадку для всіх семантик справджується

Твердження 8. $\Phi\sim_{TF}\Psi \Leftrightarrow\ \models\Phi\leftrightarrow_{\mathbf{s}}\Psi$.

Приклад 1. Для неокласичної семантики вірно $\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi\sim_T\Phi$ та невірно $\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi\sim_F\Phi$.

Для кожної *АС* $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{T}((\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cup(\boldsymbol{T}(\Psi_A)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_A))=$ $=\boldsymbol{T}(\Phi_A)$, проте для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $\boldsymbol{T}(\Psi_B)=\boldsymbol{F}(\Psi_B)=\varnothing$, маємо $\boldsymbol{F}((\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi)_B)=$ $=\boldsymbol{F}(\Phi_B)\cap(\boldsymbol{F}(\Psi_B)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_B)=\varnothing$.

Приклад 2 Для пересиченої семантики вірно $\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi\sim_F\Phi$ та невірно $\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi\sim_T\Phi$.

Для кожної *АС* $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{F}((\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi)_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)\cap(\boldsymbol{F}(\Psi_A)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_A))=$ $=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$; проте для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $(\boldsymbol{T}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_B))\backslash\boldsymbol{T}(\Phi_B)\neq\varnothing$, вже маємо $\boldsymbol{T}((\Phi\vee\Psi\&\neg\Psi)_B)=\boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup(\boldsymbol{T}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_B))\supset$ $\supset\boldsymbol{T}(\Phi_B)$.

Приклад 3. Для неокласичної семантики вірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi)\sim_F\Phi$ та невірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi)\sim_T\Phi$.

Для кожної *АС* $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{F}((\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi))_A)=\boldsymbol{F}(\Phi_A)\cup(\boldsymbol{F}(\Psi_A)\cap\boldsymbol{T}(\Psi_A))$ $=\boldsymbol{F}(\Phi_A)$, проте для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $\boldsymbol{T}(\Psi_B)=\boldsymbol{F}(\Psi_B)=\varnothing$, маємо $\boldsymbol{T}((\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi))_B)=$ $=\boldsymbol{T}(\Phi_B)\cap(\boldsymbol{T}(\Psi_B)\cup\boldsymbol{F}(\Psi_B)=\varnothing$.

Приклад 4. Для пересиченої семантики вірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi)\sim_T\Phi$ та невірно $\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi)\sim_F\Phi$.

Для кожної *АС* $\boldsymbol{A}$ маємо $\boldsymbol{T}((\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi)_A)=\boldsymbol{T}(\Phi_A)\cap(\boldsymbol{T}(\Psi_A)\cup\boldsymbol{F}(\Psi_A))=$ $=\boldsymbol{T}(\Phi_A)$; проте для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $(\boldsymbol{F}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{T}(\Psi_B))\backslash\boldsymbol{F}(\Phi_B)\neq\varnothing$, вже маємо $\boldsymbol{F}((\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi))_B)=\boldsymbol{F}(\Phi_B)\cup(\boldsymbol{F}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{T}(\Psi_B))\supset$ $\supset\boldsymbol{F}(\Phi_B)$.

Для відношень $\sim_t$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ та $\sim_{TF}$ справджується

Теорема 8 (семантичної еквівалентності). Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ на $\Psi_1,\ldots,\Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1\sim\Psi_1$, ..., $\Phi_n\sim\Psi_n$, то $\Phi\sim\Phi'$.

Тут ~ – одне з $\sim_t$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_{TF}$. Доведення – індукцією за побудовою формули.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема 8, взагалі кажучи, невірна. Справді, як видно із прикладів 1–4, можлива ситуація, коли $\Xi \sim_T \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi$, адже $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi \Leftrightarrow \Xi \sim_F \Phi$; можливо також, що $\Xi \sim_F \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_F \neg\Phi$.

Поширимо поняття логічного наслідку на довільні множини формул.

Нехай $\Gamma \subseteq Fp$ та $\Delta \subseteq Fp$ – деякі множини формул.

Δ є T-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_T \Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A).$$

Δ є F-логічним наслідком Γ в AC $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_F \Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A).$$

Δ є TF-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_{TF} \Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) \text{ та}$$

$$\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A).$$

Δ є Cl-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_{Cl} \Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A) = \varnothing.$$

Δ є Cm-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_{Cm} \Delta$), якщо

$$\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A) = A.$$

Звідси отримуємо такі визначення:

Δ є T-логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma |=_T \Delta$), якщо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_T \Delta$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

Δ є F-логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma |=_F \Delta$), якщо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_F \Delta$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

Δ є TF-логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma |=_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_{TF} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

Δ є Cl-логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma |=_{Cl} \Delta$), якщо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_{Cl} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

Δ є Cm-логічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma |=_{Cm} \Delta$), якщо $\Gamma_{\boldsymbol{A}} |=_{Cm} \Delta$ для кожної $\boldsymbol{A}$.

Δ є тавтологічним наслідком Γ (позначаємо $\Gamma |=_t \Delta$), якщо для кожної істиннісної оцінки $\tau : Fp \to \{T, F\}$ із того, що $\tau(\Phi) = T$ для всіх $\Phi \in \Gamma$, випливає, що $\tau(\Psi) = T$ для деякої $\Psi \in \Delta$.

Відношення логічного наслідку для множин формул рефлексивні, але не транзитивні.

При інтерпретації на АС з тотальними однозначними предикатами (класична семантика) усі наведені відношення логічного наслідку для множин формул еквівалентні.

При інтерпретації на АС з нетотальними однозначними предикатами (некласична семантика) можна розглядати $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$, $|=_t$. При цьому $|=_{Cm} = \varnothing$.

Для них маємо $|=_{TF} \subset |=_T$, $|=_{TF} \subset |=_F$, $|=_T \subset |=_{Cl}$, $|=_F \subset |=_{Cl}$, $|=_{Cl} = |=_t$.

При інтерпретації на АС з тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика) можна розглядати $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cm}$, $|=_t$. При цьому $|=_{Cl} = \varnothing$.

Для них маємо $|=_{TF} \subset |=_T$, $|=_{TF} \subset |=_F$, $|=_F \subset |=_{Cm}$, $|=_T \subset |=_{Cm}$, $|=_{Cm} = |=_t$.

При інтерпретації на АС з нетотальними неоднозначними предикатами (загальна семантика) $|=_{TF} = |=_T = |=_F \subset |=_t$. При цьому $|=_{Cl} = \varnothing$ та $|=_{Cm} = \varnothing$.

Для наступних властивостей $|=$ – це $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$, $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$. При цьому для некласичної семантики відпадає $|=_{Cm}$, для пересиченої відпадає $|=_{Cl}$, для загальної – $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$.

U) Нехай $\Gamma |= \Delta$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma |= \Sigma$; нехай $\Gamma |= \Delta$ та $\Gamma \subseteq \Lambda$, тоді $\Lambda |= \Delta$;

C) $\Phi, \Gamma |= \Delta, \Phi$;

П1) $\neg\neg\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$;

П2) $\Gamma |= \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$;

П3) $\Phi \vee \Psi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$ та $\Psi, \Gamma |= \Delta$;

П4) $\Gamma |= \Delta, \Phi \vee \Psi \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi, \Psi$;

П5) $\neg(\Phi \vee \Psi), \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma |= \Delta$;

П6) $\Gamma |= \Delta, \neg(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma |= \Delta, \neg\Psi$.

Аналогічні до П3–П6 властивості можна записати для & та $\to$.

Для $|=_{Cl}$ та $|=_{Cm}$ також справджуються (тут $|=$ – це $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$):

П7) $\neg\Phi, \Gamma |= \Delta \Leftrightarrow \Gamma |= \Delta, \Phi$;

П8) $\Gamma |= \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma |= \Delta$.

Проте ці властивості невірні для $|=_T$, $|=_F$ та $|=_{TF}$, що засвідчує

Твердження 9. Для неокласичної семантики можливо:

– $\neg\Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \Phi$; $\Phi, \Gamma \models_T \Delta$ та $\Gamma \not\models_T \Delta, \neg\Phi$;

– $\Gamma \models_F \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$; $\Gamma \models_F \Delta, \Phi$ та $\neg\Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$.

Для пересиченої семантики можливо:

– $\neg\Phi, \Gamma \models_F \Delta$ та $\Gamma \not\models_F \Delta, \Phi$; $\Phi, \Gamma \models_F \Delta$ та $\Gamma \not\models_F \Delta, \neg\Phi$;

– $\Gamma \models_T \Delta, \neg\Phi$ та $\Phi, \Gamma \not\models_T \Delta$; $\Gamma \models_T \Delta, \Phi$ та $\neg\Phi, \Gamma \not\models_T \Delta$.

Твердження 10. У відповідних семантиках справджуються такі властивості:

CL) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models \Delta$

(для неокласичної семантики $\models$ – це $\models_T$, $\models_{Cl}$; для пересиченої – $\models_F$, $\models_{Cm}$);

CR) $\Gamma \models \Delta, \Phi, \neg\Phi$

(для неокласичної семантики $\models$ – це $\models_F$, $\models_{Cl}$; для пересиченої – $\models_T$, $\models_{Cm}$);

CLR) $\Phi, \neg\Phi, \Gamma \models \Delta, \Psi, \neg\Psi$

(для неокласичної семантики $\models$ – це $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$, для пересиченої – $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cm}$).

Для відношення $\models_t$ справджуються всі вищенаведені властивості.

Для відповідних семантик справджується

Теорема 9 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді

$\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, \Phi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Psi$.

Тут $\models$ – одне з $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$.

Різновидностями теореми 9 є:

Теорема 9_1. Нехай $\Phi \sim_{Cl} \Psi$. Тоді
$\Phi, \Gamma \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{Cl} \Delta$ та
$\Gamma \models_{Cl} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{Cl} \Delta, \Psi$.

Теорема 9_2. Нехай $\Phi \sim_{Cm} \Psi$. Тоді
$\Phi, \Gamma \models_{Cm} \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_{Cm} \Delta$ та
$\Gamma \models_{Cm} \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_{Cm} \Delta, \Psi$.

Теорема 9_3. Нехай $\Phi \sim_t \Psi$. Тоді
$\Phi, \Gamma \models_t \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \models_t \Delta$ та
$\Gamma \models_t \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \models_t \Delta, \Psi$.

5. Семантичні властивості логік номінативних рівнів

Семантичними моделями композиційно-номінативних логік кванторного рівня (КНЛК) є композиційні системи квазіарних предикатів (${}^{V}A$, Pr^{A}, $\boldsymbol{C}$). Множина $\boldsymbol{C}$ задається множиною базових композицій $\{\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists \boldsymbol{x}\}$. При зафіксованій $\boldsymbol{C}$ система (${}^{V}A$, Pr^{A}, $\boldsymbol{C}$) однозначно визначається об'єктом вигляду (A, Pr^{A}) – неокласичною алгебраїчною системою [2].

Розгляд композиційних систем передбачає наявність мови логіки, індукованої відповідними інтенсіональними моделями (рівнями розгляду). Це означає необхідність позначення базових предикатів, із яких за допомогою композицій будуються складніші предикати.

Алфавіт мови КНЛК: символи базових композицій, множина Ps предикатних символів (сигнатура мови), множина V предметних імен.

Дамо визначення множини Fr формул мови КНЛК (див. [2]):

1) кожний предикатний символ (ПС) є формулою; такі формули атомарні;

2) якщо Φ та Ψ – формули, то $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Конкретна інтерпретація мови визначається АС (A, Pr^{A}) та значеннями ПС на A, які задаємо за допомогою тотального однозначного відображення $\boldsymbol{I} : Ps \to Pr^{A}$. Тому моделями мови КНЛК вважаємо [2] АС з доданою сигнатурою вигляду ((A, Pr^{A}), $\boldsymbol{I}$), які позначаємо (A, $\boldsymbol{I}$).

Відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J} : Fr \to Pr^{A}$ визначається за допомогою $\boldsymbol{I}$ так:

1) $\boldsymbol{J}(p) = \boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p \in Ps$;

2) $\boldsymbol{J}(\neg\Phi) = \neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$;

$\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi) = \vee(\boldsymbol{J}(\Phi), \boldsymbol{J}(\Psi))$;

$\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$;

$\boldsymbol{J}(\exists x\Phi) = \exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$, – позначаємо Φ_A.

Для випадку КНЛ реномінативного рівня (РНЛ) у наведених визначеннях опускаємо пункти, пов'язані з кванторами.

Визначення та позначення істинної на $\boldsymbol{A}$, тотально істинної, частково істинної на $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{A}$-неспростовної), частково істинної (неспростовної) формули аналогічні відповідним визначенням та позначенням, описаним в розділі 3 для випадку мови ПЛ.

Твердження 11. 1. При інтерпретації на АС з частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) множина тотально істинних формул порожня.

2. При інтерпретації на АС з тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика) множина неспростовних формул порожня.

3. При інтерпретації на АС з частковими неоднозначними предикатами (загальна семантика) множини тотально істинних та неспростовних формул порожні.

Ім'я $x\in V$ строго неістотне для формули Φ, якщо для кожної $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ ім'я x строго неістотне для предиката Φ_A.

У випадку неокласичної семантики $x\in V$ неістотне для формули Φ, якщо для кожної $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ ім'я x неістотне для Φ_A.

Теорема 10. 1. Нехай $y\in V$ строго неістотне для Φ; тоді $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists y\, R_y^x(\Phi)$.

2. Нехай $y\in V$ неістотне для Φ; тоді $\exists x\Phi \sim_{Cl} \exists y\, R_y^x(\Phi)$.

Для кожного $p\in Ps$ множину синтетично строго неістотних предметних імен задамо за допомогою тотальної функції $\nu : Ps\to 2^V$. Таку функцію продовжимо до $\nu : Fr\to 2^V$:

$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi)$;

$\nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi)\cap\nu(\Psi)$;

$\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi)\cup\{x\}$;

$\nu(R_{x_1,\dots,x_n}^{v_1,\dots,v_n}\Phi) = (\nu(\Phi)\cup\{v_1,\dots,v_n\})\cap$
$\cap\, (V\backslash\{x_i \mid v_i\notin \nu(\Phi),\, i\in\{1,\dots,n\}\})$.

Пару (Ps, ν) назвемо сигнатурою синтетичної строго неістотності.

Тотальна строго неістотність імені x означає $x\in \bigcap\limits_{p\in Ps} \nu(p)$.

Для КНЛК постулюємо нескінченність множини $V_{Ts} = \bigcap\limits_{p\in Ps} \nu(p)$ тотально строго неістотних імен.

У випадку неокласичної семантики множину синтетично неістотних предметних імен задаємо [2] за допомогою функції $\mu : Ps\to 2^V$, яку продовжуємо до $\mu : Fr\to 2^V$. Для неокласичних логік постулюємо нескінченність множини $V_T = \bigcap\limits_{p\in Ps} \mu(p)$ тотально неістотних імен.

Успадкування властивостей пропозиційної логіки для КНЛК відбувається перенесенням понять і властивостей тавтології та відповідних логічних наслідків і еквівалентностей.

Формула мови КНЛК пропозиційно нерозкладна, якщо вона атомарна або має вигляд $\exists x\Phi$ чи $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$. Множину пропозиційно нерозкладних формул позначимо Fr_0.

Істиннісна оцінка мови КНЛК – довільне тотальне однозначне відображення $\tau : Fr_0 \to \{T, F\}$.

Таке відображення продовжимо до $\tau : Fr \to \{T, F\}$:

$\tau(\neg\Phi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = F$;

$\tau(\vee\Phi\Psi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = T$ або $\tau(\Psi) = T$.

Φ тавтологія, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істиннісній оцінці τ мови.

У випадку неокласичної семантики кожна тавтологія – неспростовна формула.

У випадку пересиченої семантики кожна тавтологія є тотально істинною формулою.

Зворотні твердження невірні. Наприклад, формули вигляду $\Phi \leftrightarrow R_x^x\Phi$ неспростовні (неокласична семантика) чи тотально істинні (пересичена семантика), але не тавтології.

Визначення дуальної АС для РНЛ та КНЛК таке ж, як і для пропозиційної логіки.

Теорема 11. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді для кожної формули Φ:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)},\ F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$;

2) Φ_A еквітонний $\Rightarrow$ Φ_B антиеквітонний; Φ_A антиеквітонний $\Rightarrow$ Φ_B еквітонний.

Доводимо п. 1 індукцією згідно побудови формули аналогічно доведенню теореми 3, тільки у випадку РНЛ треба додати пункти побудови формули за допомогою $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, у випадку КНЛК – за допомогою $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists x$.

Нехай Φ має вигляд $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi$. Тоді $T(\Phi_B)=T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_B)$ та $F(\Phi_B)=F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_B)$. Маємо $d\in T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_B)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}d\in T(\Psi_B)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}d\in \overline{F(\Psi_A)}$ (припущення індукції) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}d\notin F(\Psi_A)$ $\Leftrightarrow$ $d\notin F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_A)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $d\in \overline{F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_A)}$ $\Leftrightarrow$ $d\in\overline{F(\Phi_A)}$. Тепер $d\in F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_B)$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}d\in F(\Psi_B)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}d\in \overline{T(\Psi_A)}$ (припущення індукції) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}d\notin T(\Psi_A)$ $\Leftrightarrow$ $d\notin T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_A)$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $d\in \overline{T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Psi_A)}$ $\Leftrightarrow$ $d\in\overline{T(\Phi_A)}$.

Таким чином, $T(\Phi_B)=\overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B)=\overline{T(\Phi_A)}$.

Нехай Φ має вигляд $\exists x\Psi$. Тоді $T(\Phi_B)=T(\exists x\Psi_B)$ та $F(\Phi_B)=F(\exists x\Psi_B)$.

Маємо $d\in T(\exists x\Psi_B)\Leftrightarrow d\nabla x{\mapsto}a\in T(\Psi_B)$ для деякого $a\in A$ $\Leftrightarrow$ $d\nabla x{\mapsto}a\in \overline{F(\Psi_A)}$ для деякого $a\in A$ (припущення індукції) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $d\nabla x{\mapsto}a\notin F(\Psi_A)$ для деякого $a\in A$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $d\notin F(\exists x\Psi_A)$ $\Leftrightarrow$ $d\in\overline{F(\exists x\Psi_A)}$.

Тепер $d\in F(\exists x\Psi_B)\Leftrightarrow d\nabla x{\mapsto}a\in F(\Psi_B)$ для всіх $a\in A$ $\Leftrightarrow$ $d\nabla x{\mapsto}a\in\overline{T(\Psi_A)}$ для всіх $a\in A$ (припущення індукції) $\Leftrightarrow$ $d\nabla x{\mapsto}a\notin T(\Psi_A)$ для всіх $a\in A$ $\Leftrightarrow$ $d\notin T(\exists x\Psi_A)$ $\Leftrightarrow$ $d\in\overline{T(\exists x\Psi_A)}$.

Таким чином, $T(\Phi_B)=\overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B)=\overline{T(\Phi_A)}$.

Твердження п. 2 теореми безпосередньо випливає з визначень.

Таким чином, неокласична семантика та пересичена семантика дуальні й у випадках КНЛ реномінативного та кванторного рівнів.

Приклад 5. Для $p\in Ps$ в $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I}_A)$ з частковими однозначними предикатами задамо

$$p_A(d)=\begin{cases}\text{невизначене, якщо } x\notin im(d),\\ T,\ \text{якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

Звідси $T(p_A)=\{d\mid x\in im(d)\}$, $F(p_A)=\varnothing$, предикат p_A еквітонний.

Для дуальної АС $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I}_B)$ з тотальними неоднозначними предикатами тоді $T(p_B)={}^VA$, $F(p_B)=\{d\mid x\notin im(d)\}$, звідки маємо антиеквітонний предикат p_B:

$$p_B(d)=\begin{cases}\{T,F\},\ \text{якщо } x\notin im(d),\\ \{T\},\ \text{якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

Приклад 6. Для $q\in Ps$ в $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I}_A)$ з тотальними неоднозначними предикатами задамо

$$q_A(d)=\begin{cases}\{F\},\ \text{якщо } x\notin im(d),\\ \{T,F\},\ \text{якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

Звідси $T(q_A)=\{d\mid x\in im(d)\}$, $F(q_A)={}^VA$, предикат q_A еквітонний.

Для дуальної АС $\boldsymbol{B}=(A,\boldsymbol{I}_B)$ з частковими однозначними предикатами тоді $T(q_B)=\varnothing$, $F(q_B)=\{d\mid x\notin im(d)\}$, звідки отримуємо антиеквітонний q_B:

$$q_B(d)=\begin{cases}F,\ \text{якщо } x\notin im(d),\\ \text{невизначене, якщо } x\in im(d).\end{cases}$$

6. Логічні наслідки в логіках номінативних рівнів

На множині формул мови КНЛК введемо відношення логічних наслідків $|={}_T$, $|={}_F$, $|={}_{TF}$, $|={}_{Cl}$, $|={}_{Cm}$, $|={}_t$, $||=$ та $||\equiv$ та відповідних еквівалентностей $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$, $\sim_t$ так, як це зроблено вище для пропозиційної логіки. Такі відношення логічних наслідків рефлексивні й транзитивні, відношення еквівалентності – рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Наслідки з порожньої множини формул задаємо аналогічно випадку ПЛ.

$\varnothing\,{}_A|={}_F\Phi$, $\varnothing\,{}_A|={}_{Cl}\Phi$ означають $\boldsymbol{F}(\Phi_A)=\varnothing$, тобто $\boldsymbol{A}\,|=\Phi$;

$\varnothing\,{}_A|={}_T\Phi$, $\varnothing\,{}_A|={}_{Cm}\Phi$ означають $\boldsymbol{T}(\Phi_A)={}^VA$, тобто $\boldsymbol{A}\,|\equiv\Phi$;

$\varnothing\,{}_A|={}_{TF}\Phi$ означає $\boldsymbol{T}(\Phi_A)={}^VA$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A)=\varnothing$, тобто Φ_A тотожно істинний.

$\varnothing\,|={}_{Cl}\Phi$, $\varnothing\,|={}_F\Phi$ означають $|=\Phi$, тобто Φ неспростовна;

$\varnothing\,|={}_{Cm}\Phi$, $\varnothing\,|={}_T\Phi$ означають $|\equiv\Phi$, тобто Φ тотально істинна;

$\varnothing\,|={}_{TF}\Phi$ означає $|\equiv\Phi$ та $|=\Phi$, тобто Φ тотожно істинна.

Відношення логічного наслідку $|={}_{\boldsymbol{T}}$, $|={}_{\boldsymbol{F}}$, $|={}_{\boldsymbol{TF}}$, $|={}_{\boldsymbol{Cl}}$, $|={}_{\boldsymbol{Cm}}$, $|={}_{\boldsymbol{t}}$ для довільних множин формул визначаємо аналогічно випадку пропозиційної логіки.

Теорема 12. Для випадку неокласичної семантики:

1) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!|\!\equiv\Psi$; невірно $\Phi\,|\!|\!\equiv\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!|\!\equiv\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!|\!\equiv\forall x\Phi$;

2) невірно $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!|\!=\Psi$; $\Phi\,|\!|\!=\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!|\!=\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!|\!=\forall x\Phi$;

3) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_t\Psi$; $\Phi\,|\!=_t\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!\neq_t\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_t\forall x\Phi$;

4) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_{Cl}\Psi$; $\Phi\,|\!=_{Cl}\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_{Cl}\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_{Cl}\forall x\Phi$;

5) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_T\Psi$; $\Phi\,|\!\neq_T\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_T\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_T\forall x\Phi$;

6) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!\neq_F\Psi$; $\Phi\,|\!=_F\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_F\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_F\forall x\Phi$;

7) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!\neq_{TF}\Psi$; $\Phi\,|\!\neq_{TF}\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_{TF}\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_{TF}\forall x\Phi$.

Теорема 13. Для випадку пересиченої семантики:

1) невірно $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!|\!\equiv\Psi$; $\Phi\,|\!|\!\equiv\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!|\!\equiv\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!|\!\equiv\forall x\Phi$;

2) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!|\!=\Psi$; невірно $\Phi\,|\!|\!=\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!|\!=\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!|\!=\forall x\Phi$;

3) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_t\Psi$; $\Phi\,|\!=_t\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!\neq_t\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_t\forall x\Phi$;

4) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_{Cm}\Psi$; $\Phi\,|\!=_{Cm}\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_{Cm}\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_{Cm}\forall x\Phi$;

5) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!\neq_T\Psi$; $\Phi\,|\!=_T\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_T\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_T\forall x\Phi$;

6) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_F\Psi$; $\Phi\,|\!\neq_F\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_F\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_F\forall x\Phi$;

7) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!\neq_{TF}\Psi$; $\Phi\,|\!\neq_{TF}\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!=_{TF}\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_{TF}\forall x\Phi$.

Теорема 14. Для випадку загальної семантики:

1) $\Phi\,|\!=_{TF}\Psi\;\Leftrightarrow\;\Phi\,|\!=_T\Psi\;\Leftrightarrow\;\Phi\,|\!=_F\Psi$;

2) $\Phi\,|\!|\!=\Psi\;\Leftrightarrow\;\Phi\,|\!|\!\equiv\Psi$;

5) $\forall x\Phi\,|\!|\!\equiv\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!|\!\equiv\forall x\Phi$; $\forall x\Phi\,|\!|\!=\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!|\!=\forall x\Phi$;

3) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!=_t\Psi$; $\Phi\,|\!=_t\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi\,|\!\neq_t\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq_t\forall x\Phi$;

4) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi)\,|\!\neq\Psi$, $\Phi\,|\!\neq\Psi\vee\Phi\&\neg\Psi$, $\forall x\Phi\,|\!=\exists x\Phi$; $\Phi\,|\!\neq\forall x\Phi$ (тут $|\!=$ – одне з $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$).

Твердження 12. 1. Для неокласичної семантики маємо $\Phi\sim_{Cl}\Psi\Leftrightarrow\;|\!=\Phi\leftrightarrow\Psi$.

2. Для пересиченої семантики маємо $\Phi\sim_{Cm}\Psi\;\Leftrightarrow\;|\!\equiv\Phi\leftrightarrow_{\boldsymbol{Cm}}\Psi$.

3. Для загальної семантики маємо $\Phi\sim_{TF}\Psi\Leftrightarrow\;|\!\equiv\Phi\leftrightarrow_{\mathbf{s}}\Psi$.

Наведемо властивості формул, пов'язані з композицією реномінації. Такі властивості, не пов'язані з кванторами, справджуються вже для логік реномінативного рівня.

RT) $R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(P)\sim_{TF}R^{\bar v}_{\bar x}(P)$.

Зокрема, $R^{z}_{z}(P)\sim_{TF}P$.

R¬) $R^{\bar v}_{\bar x}(\neg P)\sim_{TF}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(P)$.

R∨) $R^{\bar v}_{\bar x}(P\vee Q)\sim_{TF}R^{\bar v}_{\bar x}(P)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(Q)$.

Подібним чином записуємо властивості R&, R→, R↔ та R⊕.

RR) $R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(P))\sim_{TF}R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{\bar w}_{\bar y}(P)$.

RSN) Нехай ім'я y строго неістотне для P; тоді $R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(P)\sim_{TF}R^{\bar v}_{\bar x}(P)$.

Для випадку неокласичної семантики маємо (див. [2]):

RN) Нехай ім'я y неістотне для P; тоді $R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(P)\sim_{Cl}R^{\bar v}_{\bar x}(P)$.

Залучаючи до реномінації квантори, отримуємо такі властивості:

NR) $\exists y\,R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\sim_{TF}R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)$ та $\forall y\,R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)\sim_{TF}R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\Phi)$ при $y\notin\{z,\bar x\}$.

Зокрема, при $y\neq z$ маємо $\exists y\,R^{y}_{z}(\Phi)\sim_{TF}R^{y}_{z}(\Phi)$ та $\forall y\,R^{y}_{z}(\Phi)\sim_{TF}R^{y}_{z}(\Phi)$.

∃R∃) $\exists y\,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\sim_{TF}R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\exists y\Phi)$.

R∀) $\forall y\,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\sim_{TF}R^{y,\bar v}_{z,\bar x}(\forall y\Phi)$.

Для ∃R∃ і ∀R∀ умова: $y\notin\{\bar v,\bar x\}$.

R∃) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi)\sim_{TF}\exists y\,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)$.

R∀) $\forall y\,R^{\bar v}_{\bar x}(\Phi)\sim_{TF}R^{\bar v}_{\bar x}(\forall y\Phi)$.

Для R∃ і R∀ $y\notin\{\bar v,\bar x\}$.

R∃∃S) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi)\sim_{TF}\exists z R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(\Phi)$.

R∀∀S) $R^{\bar v}_{\bar x}(\forall y\Phi)\sim_{TF}\forall z R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(\Phi)$.

Для R∃∃S і R∀∀S умова: $y\in\{\bar v,\bar x\}$, $z\notin nm(R^{\bar v}_{\bar x}(\exists x\Phi))$ та z тотально строго неістотне

Для логік однозначних предикатів замість R∃∃S та R∀∀S маємо [2]:

R∃∃) $R^{\bar v}_{\bar x}(\exists y\Phi)\sim_{Cl}\exists z R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(\Phi)$;

R∀∀) $R^{\bar v}_{\bar x}(\forall y\Phi)\sim_{Cl}\forall z R^{\bar v}_{\bar x}\circ^{y}_{z}(\Phi)$.

Для $R\exists\exists$ і $R\forall\forall$ умова: $y\in\{\bar{v},\bar{x}\}$, z тотально неістотне та $z\notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Наведемо тепер основні властивості композицій квантифікації.

Q1) $\exists x\exists y\Phi \sim_{TF} \exists y\exists x\Phi$ та $\forall x\forall y\Phi \sim_{TF} \forall y\forall x\Phi$.

Q2) $\neg\forall x\Phi \sim_{TF} \exists x\neg\Phi$ та $\neg\exists x\Phi \sim_{TF} \forall x\neg\Phi$.

Q3) $\exists x\Phi \sim_{TF} \forall x\exists x\Phi$, $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists x\exists x\Phi$; $\forall x\Phi \sim_{TF} \forall x\forall x\Phi$, $\forall x\Phi \sim_{TF} \exists x\forall x\Phi$.

Q4) $\exists x\Phi\vee\exists x\Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi\vee\Psi)$ та $\forall x\Phi\&\forall x\Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi\&\Psi)$.

Q5) $\exists x(\Phi\&\Psi)|=_{TF} \exists x\Phi\&\exists x\Psi$ та $\forall x\Phi\vee\forall x\Psi|=_{TF} \forall x(\Phi\vee\Psi)$.

Q6) Якщо $\Phi |=_{TF} \Psi$, то $\exists x\Phi |=_{TF} \exists x\Psi$ та $\forall x\Phi |=_{TF} \forall x\Psi$.

Q7) $\exists y\forall x\Phi |=_{TF} \forall x\exists y\Phi$; водночас не завжди $\forall x\exists y\Phi|=_{Cl} \exists y\forall x\Phi$ (неокласична семантика), $\forall x\exists y\Phi|=_{Cm} \exists y\forall x\Phi$ (пересичена семантика), не завжди $\forall x\exists y\Phi|=_{TF} \exists y\forall x\Phi$.

Q8) $\Phi \,||\!= \exists x\Phi$, $\Phi \,||\!= \forall x\Phi$ та $\Phi \,||\!\equiv \exists x\Phi$, $\Phi \,||\!\equiv \forall x\Phi$.

Для логік часткових однозначних предикатів додаємо:

Q9P) якщо $|=\Phi$, то $|=\exists x\Phi$, $|=\forall x\Phi$, $|=\Phi\leftrightarrow\exists x\Phi$ та $|=\Phi\leftrightarrow\forall x\Phi$;

Q10P) $|=\exists y\forall x\Phi\to\forall x\exists y\Phi$, але не завжди $|=\forall x\exists y\Phi\to\exists y\forall x\Phi$;

Q11P) $|=\forall x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$ та $|=\exists x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$; $|=\forall x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$ та $|=\exists x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$.

Для логік тотальних неоднозначних предикатів додаємо:

Q9T) якщо $|\!\equiv\Phi$, то $|\!\equiv\exists x\Phi$, $|\!\equiv\forall x\Phi$, $|\!\equiv\Phi\leftrightarrow_{Cm}\exists x\Phi$ та $|\!\equiv\Phi\leftrightarrow_{Cm}\forall x\Phi$;

Q10T) $|\!\equiv\exists y\forall x\Phi\to\forall x\exists y\Phi$, але не завжди $|\!\equiv\forall x\exists y\Phi\to\exists y\forall x\Phi$;

Q11T) $|\!\equiv\forall x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$ та $|\!\equiv\exists x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$; $|\!\equiv\forall x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$ та $|\!\equiv\exists x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$.

Приклад 7. Існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ такі: $\Phi\,_A|=_{TF}\forall x\Phi$ та $\exists x\Phi\,_A|\neq_{Cl}\Phi$, $\exists x\Phi\,_A|\neq_{Cm}\Phi$.

Нехай Φ – це формула $\forall x\,p\to p$ для ПС p. Інтерпретуємо p на АС $\boldsymbol{A}$ так:

$$p_A(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } x\in im(d),\\ F, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$$

Тоді $\varnothing\subset\boldsymbol{T}(p_A)\subset{}^VA$, $\varnothing\subset\boldsymbol{F}(p_A)\subset{}^VA$, $\boldsymbol{T}(\forall x\,p_A)={}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x\,p_A)=\varnothing$, $\boldsymbol{T}(\exists x(\forall x\,p\to p)_A)={}^VA$, $\boldsymbol{F}(\exists x(\forall x\,p\to p)_A)=\varnothing$, $\boldsymbol{T}(\forall x(\forall x\,p\to p)_A)={}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x(\forall x\,p\to p)_A)=\varnothing$, $\varnothing\subset\boldsymbol{T}((\forall x\,p\to p)_A)\subset{}^VA$, $\varnothing\subset\boldsymbol{F}((\forall x\,p\to p)_A)\subset{}^VA$.

Звідси $\Phi\,_A|=_{TF}\forall x\Phi$, $\exists x\Phi\,_A|\neq_{Cl}\Phi$, $\exists x\Phi\,_A|\neq_{Cm}\Phi$.

Теорема 15. Для загального випадку квазіарних предикатів у відповідних семантиках не завжди справджуються $R_z^x(\Phi)\,_A|=\exists x\Phi$ та $\forall x\Phi\,_A|=R_z^x(\Phi)$. Тут $|=$ – одне з $|=_{Cl}$, $|=_{Cm}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$.

Візьмемо ПС p та q, проінтерпретуємо їх на певній АС $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$ так:

$$p_A(d)=\begin{cases}T, \text{ якщо } x\in im(d),\\ F, \text{ якщо } x\notin im(d);\end{cases}$$

$$q_A(d)=\begin{cases}F, \text{ якщо } x\in im(d),\\ T, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$$

Маємо $\varnothing\subset\boldsymbol{T}(R_z^x p_A)\subset{}^VA$ та $\varnothing\subset\boldsymbol{F}(R_z^x p_A)\subset{}^VA$, $\boldsymbol{T}(\exists x\,p_A)=\boldsymbol{T}(\forall x\,p_A)={}^VA$ та $\boldsymbol{F}(\exists x\,p_A)=\boldsymbol{F}(\forall x\,p_A)=\varnothing$. Звідси маємо $\forall x\,p\,_A|\neq_{Cl}R_z^x p$, $\forall x\,p\,_A|\neq_{Cm}R_z^x p$, $\forall x\,p\,_A|\neq_T R_z^x p$, $\forall x\,p\,_A|\neq_F R_z^x p$, $\forall x\,p\,_A|\neq_{TF} R_z^x p$.

Маємо $\varnothing\subset\boldsymbol{T}(R_z^x q_A)\subset{}^VA$ та $\varnothing\subset\boldsymbol{F}(R_z^x q_A)\subset{}^VA$, $\boldsymbol{T}(\exists x\,q_A)=\boldsymbol{T}(\forall x\,q_A)=\varnothing$ та $\boldsymbol{F}(\exists x\,q_A)=\boldsymbol{F}(\forall x\,q_A)={}^VA$. Звідси отримуємо $R_z^x q\,_A|\neq_{Cl}\exists x\,q$, $R_z^x q\,_A|\neq_{Cm}\exists x\,q$, $R_z^x q\,_A|\neq_T\exists x\,q$, $R_z^x q\,_A|\neq_F\exists x\,q$, $R_z^x q\,_A|\neq_{TF}\exists x\,q$.

Наслідок 5. 1) існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ: $\Phi\,_A|\neq_{Cl}\exists x\Phi$ та $\Phi\,_A|\neq_{Cm}\exists x\Phi$;

2) існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ: $\forall x\Phi\,_A|\neq_{Cl}\Phi$ та $\forall x\Phi\,_A|\neq_{Cm}\Phi$;

3) існує формула Φ така: невірно $\forall x\Phi\,||\!=\Phi$ та невірно $\forall x\Phi\,||\!\equiv\Phi$.

Щодо п. 3 зауважимо, що для АС $\boldsymbol{A}$ та ПС p з доведення теореми маємо $\boldsymbol{A}\,|=\forall x\,p$, $\boldsymbol{A}\,|\!\equiv\forall x\,p$, $\boldsymbol{A}\,|\neq p$, невірно $\boldsymbol{A}\,|\!\equiv p$; тому невірно $\forall x\,p\,||\!\equiv p$ та невірно $\forall x\,p\,||\!= p$.

Із вищенаведених властивостей та прикладу 7 випливає:

1) у випадку неокласичної семантики не завжди справджуються $|=\forall x\Phi\to\Phi$,

$\forall x\Phi \,\|\!= \Phi$, $|\!= \Phi \to \exists x\Phi$; для деяких формул Φ можливо: $|\!= \Phi \to \forall x\Phi$ та $|\!\neq \exists x\Phi \to \Phi$;

2) у випадку пересиченої семантики не завжди справджуються $|\!\equiv \forall x\Phi \to \Phi$, $\forall x\Phi \,\|\!\equiv \Phi$, $|\!\equiv \Phi \to \exists x\Phi$; для деяких формул Φ можливо: $|\!\equiv \Phi \to \forall x\Phi$ та невірно $|\!\equiv \exists x\Phi \to \Phi$.

Із теореми 11 (про дуальну АС) для логік квазіарних предикатів у випадку загальної семантики отримуємо: $\Phi \,|\!=_T \Psi \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Phi \,|\!=_F \Psi \Leftrightarrow |\!=_{TF} \Psi$.

На основі розглянутих властивостей КНЛК отримуємо наступні співвідношення для множин формул, які перебувають у відповідних відношеннях.

1. Неокласична семантика:
$|\!=_{TF} \subset |\!=_T$, $|\!=_{TF} \subset |\!=_F$, $|\!=_T \subset |\!=_{Cl}$, $|\!=_F \subset |\!=_{Cl}$;
$|\!=_t \subset |\!=_{Cl}$, $|\!=_F \subset \|\!=$, $|\!=_T \subset \|\!\equiv$; $=_{Cm} = \varnothing$;
$|\!=_t \not\subset |\!=_T$, $|\!=_t \not\subset |\!=_F$, $|\!=_{TF} \not\subset |\!=_t$; $_T \not\subset \|\!=$,
$|\!=_F \not\subset \|\!\equiv$, $\|\!= \not\subset |\!=_{Cl}$, $\|\!\equiv \not\subset |\!=_{Cl}$.

2. Пересичена семантика:
$|\!=_{TF} \subset |\!=_T$, $|\!=_{TF} \subset |\!=_F$, $|\!=_T \subset |\!=_{Cm}$, $|\!=_F \subset |\!=_{Cm}$;
$|\!=_t \subset |\!=_{Cm}$, $|\!=_F \subset \|\!=$, $|\!=_T \subset \|\!\equiv$; $|\!=_{Cl} = \varnothing$;
$|\!=_t \not\subset |\!=_T$, $|\!=_t \not\subset |\!=_F$, $|\!=_{TF} \not\subset |\!=_t$; $_T \not\subset \|\!=$,
$|\!=_F \not\subset \|\!\equiv$, $\|\!= \not\subset |\!=_{Cm}$, $\|\!\equiv \not\subset |\!=_{Cm}$.

3. Загальна семантика:
$|\!=_{TF} = |\!=_T = |\!=_F$; $|\!=_t \not\subset |\!=_{TF}$, $|\!=_{TF} \not\subset |\!=_t$;
$|\!=_{TF} \subset \|\!\equiv = \|\!=$; $|\!=_{Cl} = \varnothing$ та $|\!=_{Cm} = \varnothing$.

Для логік еквітонних та логік антиеквітонних предикатів маємо також наступні властивості.

Теорема 16. 1) для логік еквітонних та логік антиеквітонних предикатів у відповідних семантиках завжди справджуються $R_z^x(\Phi)\,_A|\!=_{Cl} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\,_A|\!=_{Cl} R_z^x(\Phi)$, $R_z^x(\Phi)\,_A|\!=_{Cm} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\,_A|\!=_{Cm} R_z^x(\Phi)$;

2) для логік еквітонних предикатів у відповідних семантиках завжди справджуються $R_z^x(\Phi)\,_A|\!=_T \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\,_A|\!=_F R_z^x(\Phi)$ та $\forall x\Phi \,\|\!= R_z^x(\Phi)$, але вони не завжди вірні для логік антиеквітонних предикатів;

3) для логік антиеквітонних предикатів у відповідних семантиках завжди справджуються $R_z^x(\Phi)\,_A|\!=_F \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\,_A|\!=_T R_z^x(\Phi)$ та $\forall x\Phi \,\|\!\equiv R_z^x(\Phi)$, але вони не завжди вірні для логік еквітонних предикатів;

4) для логік еквітонних та для логік антиеквітонних предикатів не завжди вірні $R_z^x(\Phi)\,_A|\!=_{TF} \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi\,_A|\!=_{TF} R_z^x(\Phi)$.

Для доведення використовуємо теорему 2 та наведені далі приклади 8–15.

Приклад 8. Для $p \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з частковими однозначними предикатами задамо

$$p_A(d) = \begin{cases} \text{невизначене, якщо } x \notin im(d), \\ F, \text{ якщо } x \in im(d). \end{cases}$$

Такий p_A – еквітонний. При цьому $\varnothing \subset \boldsymbol{F}(R_z^x p_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(R_z^x p_A) = \boldsymbol{T}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, p_A) = \varnothing$.

Приклад 9. Для $p \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з тотальними неоднозначними предикатами задамо $p_A(d) = \begin{cases} \{T\}, \text{ якщо } x \notin im(d), \\ \{T, F\}, \text{ якщо } x \in im(d). \end{cases}$

Такий p_A – еквітонний. При цьому $\varnothing \subset \boldsymbol{F}(R_z^x p_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(R_z^x p_A) = \boldsymbol{T}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$.

Приклад 10. Для $p \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з частковими однозначними предикатами задамо

$$p_A(d) = \begin{cases} \text{невизначене, якщо } x \notin im(d), \\ T, \text{ якщо } x \in im(d). \end{cases}$$

Такий p_A – еквітонний. При цьому $\varnothing \subset \boldsymbol{T}(R_z^x p_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(R_z^x p_A) = \boldsymbol{F}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, p_A) = \varnothing$.

Приклад 11. Для $p \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з тотальними неоднозначними предикатами задамо

$$p_A(d) = \begin{cases} \{F\}, \text{ якщо } x \notin im(d), \\ \{T, F\}, \text{ якщо } x \in im(d). \end{cases}$$

Такий p_A – еквітонний. При цьому $\varnothing \subset \boldsymbol{T}(R_z^x p_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(R_z^x p_A) = \boldsymbol{F}(\exists x\, p_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, p_A) = {}^V\!A$.

Приклад 12. Для $q \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з частковими однозначними предикатами задамо

$$q_A(d) = \begin{cases} F, \text{ якщо } x \notin im(d), \\ \text{невизначене, якщо } x \in im(d). \end{cases}$$

Такий q_A – антиеквітонний. Маємо $\varnothing \subset \boldsymbol{F}(R_z^x q_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, q_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(R_z^x q_A) = \boldsymbol{T}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, q_A) = \varnothing$.

Приклад 13. Для $q \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з тотальними неоднозначними предикатами задамо $q_A(d) = \begin{cases} \{T, F\}, \text{ якщо } x \notin im(d), \\ \{T\}, \text{ якщо } x \in im(d). \end{cases}$

Такий q_A – антиеквітонний. Маємо $\varnothing \subset \boldsymbol{F}(R_z^x q_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{F}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, q_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(R_z^x q_A) = \boldsymbol{T}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, q_A) = {}^V\!A$.

Приклад 14. Для $q \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з частковими однозначними предикатами задамо

$$q_A(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } x \notin im(d), \\ \text{невизначене, якщо } x \in im(d). \end{cases}$$

Такий q_A – антиеквітонний. Маємо $\varnothing \subset \boldsymbol{T}(R_z^x q_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, q_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{F}(R_z^x q_A) = \boldsymbol{F}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, q_A) = \varnothing$.

Приклад 15. Для $q \in Ps$ в $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ з тотальними неоднозначними предикатами задамо

$$q_A(d) = \begin{cases} \{T, F\}, \text{ якщо } x \notin im(d), \\ \{F\}, \text{ якщо } x \in im(d). \end{cases}$$

Такий q_A – антиеквітонний. Маємо $\varnothing \subset \boldsymbol{T}(R_z^x q_A) \subset {}^V\!A$, $\boldsymbol{T}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{T}(\forall x\, q_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{F}(R_z^x q_A) = \boldsymbol{F}(\exists x\, q_A) = \boldsymbol{F}(\forall x\, q_A) = {}^V\!A$.

Наслідок 6. 1) для логік еквітонних предикатів у відповідних семантиках завжди $\Phi\, {}_A|\!=_{Cl} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_{Cl} \Phi$, $\Phi\, {}_A|\!=_{Cm} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_{Cm} \Phi$, $\Phi\, {}_A|\!=_T \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_F \Phi$, $\forall x\Phi \,||\!= \Phi$; завжди $|\!= \forall x\Phi \Leftrightarrow |\!=\Phi$; не завжди $\Phi\, {}_A|\!=_F \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_T \Phi$, $\Phi\, {}_A|\!=_{TF} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_{TF} \Phi$ та $\forall x\Phi \,||\!\equiv \Phi$;

2) для логік антиеквітонних предикатів у відповідних семантиках завжди $\Phi\, {}_A|\!=_{Cl} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_{Cl} \Phi$, $\Phi\, {}_A|\!=_{Cm} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_{Cm} \Phi$, $\Phi\, {}_A|\!=_F \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_T \Phi$, $\forall x\Phi \,||\!\equiv \Phi$; не завжди $\Phi\, {}_A|\!=_T \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_F \Phi$, $\Phi\, {}_A|\!=_{TF} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\, {}_A|\!=_{TF} \Phi$ та $\forall x\Phi \,||\!= \Phi$.

Наслідок 7. У випадках загальної семантики еквітонних предикатів та загальної семантики антиеквітонних предикатів відношення $|\!=_T$, $|\!=_F$ та $|\!=_{TF}$ різні.

Таким чином, у випадках загальної семантики еквітонних предикатів та загальної семантики антиеквітонних предикатів отримуємо наступні співвідношення для множин формул, які перебувають у відповідних відношеннях:

$|\!=_{TF} \subset |\!=_T$, $|\!=_{TF} \subset |\!=_F$; $|\!=_t \not\subset |\!=_{TF}$, $|\!=_{TF} \not\subset |\!=_t$; $|\!=_T \subset ||\!\equiv$, $|\!=_F \subset ||\!=$; $|\!=_{Cl} = \varnothing$, $|\!=_{Cm} = \varnothing$.

Для логік квазіарних предикатів реномінативного та кванторного рівнів справджуються теорема 8 (еквівалентності та теорема 9 (заміни еквівалентних).

Розглянемо властивості відношень логічного наслідку для множин формул, пов‘язані з композицією реномінації. Такі властивості, не пов’язані з кванторами, справджуються вже для логік реномінативного рівня. При кожній інтерпретації предикати, що є значеннями виділених формул, збігаються, тому ці властивості справджуються для $|\!=_{\boldsymbol{TF}}$, вони вірні також для $|\!=_{\boldsymbol{T}}$, $|\!=_{\boldsymbol{F}}$, $|\!=_{\boldsymbol{Cl}}$, $|\!=_{\boldsymbol{Cm}}$.

RT$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$.

RT$_{-|}$) $\boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

RR$_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$.

RR$_{-|}$) $\boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)$.

R$\neg_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$.

R$\neg_{-|}$) $\boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$.

R$\vee_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$.

R$\vee_{-|}$) $\boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$.

Аналогічно записуються властивості R$\to_{|-}$, R$\to_{-|}$, R&$_{|-}$, R&$_{-|}$.

R$\exists_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R$\exists_{-|}$) $\boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta}, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R$\exists\exists$S$_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \boldsymbol{\Gamma} |\!=_{\boldsymbol{TF}} \boldsymbol{\Delta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta$ за умови $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

R∃∃S$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)$ за умови $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

Для R∃∃S$_{|-}$ та R∃∃S$_{-|}$ z тотально строго неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Аналогічно записуються властивості R∀$_{|-}$, R∀$_{-|}$, R∀∀S$_{|-}$, R∀∀S$_{-|}$.

ΦNS$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta$ за умови $y \in \nu(\Phi)$.

ΦNS$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{TF} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $y \in \nu(\Phi)$.

Для логік однозначних часткових предикатів також маємо відомі [2] властивості:

R∃∃$_{|-}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta$;

R∃∃$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)$.

Для R∃∃$_{|-}$ та R∃∃$_{-|}$ умови: $y \in \{\bar{v}, \bar{x}\}$, z тотально неістотне та $z \notin nm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Аналогічно записуються властивості R∀∀$_{|-}$, R∀∀$_{-|}$.

ΦN$_{|-}$) $R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta$ за умови $y \in \mu(\Phi)$.

ΦN$_{-|}$) $\mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta, R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathbf{\Gamma} \models_{Cl} \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $y \in \mu(\Phi)$.

Якщо Φ – це $p \in Ps$, властивості ΦN$_{|-}$ і ΦN$_{-|}$ записуємо як PsN$_{|-}$ і PsN$_{-|}$.

Розглянемо тепер властивості відношень $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$, $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$, пов'язані з елімінацією кванторів.

Надалі $\mathbf{\Gamma}$ та Δ позначатимуть довільні множини формул, $\boldsymbol{A}$ – довільну АС.

Для спрощення запису при зафіксованій $\boldsymbol{A}$ предикати вигляду Φ_A будемо позначати Φ.

У випадку $\mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models \Delta$ будемо позначати $\bigcap_{\Phi \in \Gamma} T(\Phi_A)$ як $\boldsymbol{T}(\Gamma)$, $\bigcup_{\Psi \in \Delta} T(\Psi_A)$ як $\boldsymbol{T}(\Delta)$, $\bigcup_{\Phi \in \Gamma} F(\Phi_A)$ як $\boldsymbol{F}(\Gamma)$, $\bigcap_{\Psi \in \Delta} F(\Psi_A)$ як $\boldsymbol{F}(\Delta)$.

Для загального випадку логік квазіарних предикатів $R_y^x(\Phi) \models R_y^x(\Phi), \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi, R_y^x(\Phi) \models R_y^x(\Phi)$, де $\models$ – одне з $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$. Враховуючи теорему 15, отримуємо, що із $\mathbf{\Gamma} \models R_y^x(\Phi), \exists x\Phi$ не випливає $\mathbf{\Gamma} \models \exists x\Phi$ та із $\forall x\Phi, R_y^x(\Phi) \models \Delta$ не випливає $\forall x\Phi \models \Delta$ (тут $\models$ – одне з $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$). Отримали

Наслідок 8. Для загального випадку квазіарних предикатів у відповідних семантиках:

1) із $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi, R_y^x(\Phi)$ не випливає $\mathbf{\Gamma} \models \Delta, \exists x\Phi$;

2) із $\forall x\Phi, R_y^x(\Phi), \mathbf{\Gamma} \models \Delta$ не випливає $\forall x\Phi, \mathbf{\Gamma} \models \Delta$.

Тут $\models$ – одне з $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$.

Дещо краща ситуація для логік еквітонних та логік антиеквітонних предикатів.

Теорема 17. 1) Для логік еквітонних та логік антиеквітонних предикатів:

а) $\mathbf{\Gamma}_A \models_{Cl} \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_{Cl} \Delta, \exists x\Phi$ та $\mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ _A\models_{Cl} \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi\ _{\boldsymbol{A}}\models_{Cl} \Delta$;

б) $\mathbf{\Gamma}_A \models_{Cm} \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_{Cm} \Delta, \exists x\Phi$ та $\mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ _A\models_{Cm} \Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi\ _{\boldsymbol{A}}\models_{Cm} \Delta$;

2) для логік еквітонних предикатів:

а) $\mathbf{\Gamma}_A \models_T \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_T \Delta, \exists x\Phi$, не завжди

$\mathbf{\Gamma}_A \models_F \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_F \Delta, \exists x\Phi$;

б) $\mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ _A\models_F \Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi\ _{\boldsymbol{A}}\models_F \Delta$, не завжди

$\mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ _A\models_T \Delta \Rightarrow \mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi\ _{\boldsymbol{A}}\models_T \Delta$;

3) для логік антиеквітонних предикатів:

а) $\mathbf{\Gamma}_A \models_F \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_F \Delta, \exists x\Phi$, не завжди

$\mathbf{\Gamma}_A \models_T \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Rightarrow \mathbf{\Gamma}_{\boldsymbol{A}} \models_T \Delta, \exists x\Phi$;

б) $\mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ _A\models_T \Delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi\ _{\boldsymbol{A}}\models_T \Delta$, не завжди

$\mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ _A\models_F \Delta \Rightarrow \mathbf{\Gamma}, \forall x\Phi\ _{\boldsymbol{A}}\models_F \Delta$.

Доводимо п. 1, *а* для логік еквітонних предикатів. Покажемо, що з умови $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)=\varnothing$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)=\varnothing$.

Припустимо супротивне:

існує $d\in\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$, (1)

$\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)=\varnothing$ (2).

Звідси маємо $d\in\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$ та $d\notin\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, звідки отримуємо

$d\nabla x{\mapsto}a\in\boldsymbol{F}(\Phi)$ для всіх $a\in A$ (3)

та $d\nabla x{\mapsto}d(z)\notin\boldsymbol{F}(\Phi)$.

Із останнього при $d(z)\downarrow$ маємо суперечність із (3), тому $d(z)\uparrow$, звідки $d\subset d\nabla z{\mapsto}a$ для всіх $a\in A$. За еквітонністю тоді із (1) та із (3) для всіх $a\in A$ отримуємо $d\nabla z{\mapsto}a\in\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$ та $d\nabla x{\mapsto}a\nabla z{\mapsto}a\in\boldsymbol{F}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z{\mapsto}a\in\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, звідки отримуємо $d\nabla z{\mapsto}a\in\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$, що суперечить (2).

Доводимо п. 1, *а* для антиеквітонних предикатів. Згідно теореми 2 маємо $\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)\subseteq\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, звідки отримуємо $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)=\varnothing \Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\cap\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)=\varnothing$.

Доводимо п. 1, *б* для еквітонних предикатів. Згідно теореми 2 маємо $\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$, тому отримуємо $\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))={}^VA \Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)={}^VA$.

Доводимо п. 1, *б* для антиеквітонних предикатів. Покажемо, що з умови $\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))={}^VA$ випливає $\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)={}^VA$.

Припустимо супротивне:

існує $d\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$, (4)

$\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))={}^VA$. (5)

Звідси маємо $d\notin\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$ та $d\in\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$, звідки отримуємо

$d\nabla x{\mapsto}a\notin\boldsymbol{T}(\Phi)$ для всіх $a\in A$ (6)

та $d\nabla x{\mapsto}d(z)\in\boldsymbol{T}(\Phi)$.

Із останнього при $d(z)\downarrow$ маємо суперечність із (6), тому $d(z)\uparrow$, звідки отримуємо $d\subset d\nabla z{\mapsto}a$ для всіх $a\in A$. За антиеквітонністю тоді із (4) та (6) для всіх $a\in A$ маємо $d\nabla z{\mapsto}a\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$, звідки $d\nabla x{\mapsto}a\nabla z{\mapsto}a\notin\boldsymbol{T}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z{\mapsto}a\notin\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$, що суперечить (5).

Враховуючи властивості пропозиційного рівня П7 та П8, із вищедоведених $\Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta,\exists x\Phi$ та $\Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi) \Rightarrow \Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta,\exists x\Phi$ маємо $\Gamma,\forall x\Phi,R_z^x(\Phi)\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta \Rightarrow \Gamma,\forall x\Phi\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta$ та $\Gamma,\forall x\Phi,R_z^x(\Phi)\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta \Rightarrow \Gamma,\forall x\Phi\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta$.

Доводимо п. 2. Згідно теореми 2 для еквітонних предикатів маємо $\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$ та $\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\subseteq$ $\subseteq\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)$, тому

$\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)\cup\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$ та

$\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{F}(\Gamma)\Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)\cup\boldsymbol{F}(\Gamma)$.

Доводимо п. 3. Для антиеквітонних предикатів маємо $\boldsymbol{F}(\exists x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$ та $\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)\subseteq\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$ згідно теореми 2, тому

$\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\exists x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{F}(\exists x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$ та

$\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$.

Наслідок 9. Для логік еквітонних та логік антиеквітонних предикатів:

а) не завжди $\Gamma\,{}_A|\!\!=_{TF}\,\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi) \Rightarrow$ $\Rightarrow \Gamma\,{}_A|\!\!=_{TF}\,\Delta,\exists x\Phi$;

б) не завжди $\Gamma,\forall x\Phi,R_z^x(\Phi)\,{}_A|\!\!=_{TF}\,\Delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \Gamma,\forall x\Phi\,{}_A|\!\!=_{TF}\,\Delta$.

Враховуючи властивість пропозиційного рівня U, із теореми 17 отримуємо

Наслідок 10. 1) для логік еквітонних та логік антиеквітонних предикатів:

а) $\Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta,\exists x\Phi$ та $\Gamma,\forall x\Phi,R_z^x(\Phi)\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Gamma,\forall x\Phi\,{}_A|\!\!=_{Cl}\,\Delta$;

б) $\Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta,\exists x\Phi,R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta,\exists x\Phi$ та $\Gamma,\forall x\Phi,R_z^x(\Phi)\,{}_A|\!\!=_{Cm}\,\Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, \forall x\Phi\ {}_A|\!\!=_{Cm} \Delta$;

2) для логік еквітонних предикатів:

а) $\Gamma\ {}_A|\!\!=_T \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_T \Delta, \exists x\Phi$;

б) $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ {}_A|\!\!=_F \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, \forall x\Phi\ {}_A|\!\!=_F \Delta$;

3) для логік антиеквітонних предикатів:

а) $\Gamma\ {}_A|\!\!=_F \Delta, \exists x\Phi, R_z^x(\Phi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_F \Delta, \exists x\Phi$;

б) $\Gamma, \forall x\Phi, R_z^x(\Phi)\ {}_A|\!\!=_T \Delta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Gamma, \forall x\Phi\ {}_A|\!\!=_T \Delta$.

Для логік квазіарних предикатів у відповідних семантиках завжди $\exists x\Phi \models \exists x\Phi$ та $\forall x\Phi \models \forall x\Phi$, де $\models$ – одне з $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$. Враховуючи теорему 15, звідси

Наслідок 11. Для загального випадку логік квазіарних предикатів у відповідних семантиках не завжди $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Rightarrow$ $\Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma \models \Delta$ та не завжди $\Gamma \models \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \Gamma \models R_z^x(\Phi), \Delta$ (тут $\models$ – одне з $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$).

Теорема 18. 1) для логік еквітонних предикатів в неокласичній семантиці:

а) $\exists x\Phi, \Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cl} \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cl} \Delta$

та $\Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cl} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cl} R_z^x(\Phi), \Delta$;

б) $\exists x\Phi, \Gamma\ {}_A|\!\!=_T \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma\ {}_A|\!\!=_T \Delta$

та $\Gamma\ {}_A|\!\!=_F \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_F R_z^x(\Phi), \Delta$;

в) не завжди $\exists x\Phi, \Gamma \models_F \Delta \Rightarrow R_y^x(\Phi)$,

$\Gamma \models_F \Delta$, $\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Rightarrow R_y^x(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$,

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_T \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_T R_z^x(\Phi), \Delta$,

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_{TF} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_{TF} R_z^x(\Phi), \Delta$;

2) для логік антиеквітонних предикатів в пересиченій семантиці:

а) $\exists x\Phi, \Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cm} \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cm} \Delta$

та $\Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cm} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_{Cm} R_z^x(\Phi), \Delta$;

б) $\exists x\Phi, \Gamma\ {}_A|\!\!=_F \Delta \Rightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma\ {}_A|\!\!=_F \Delta$

та $\Gamma\ {}_A|\!\!=_T \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_T R_z^x(\Phi), \Delta$;

в) не завжди $\exists x\Phi, \Gamma \models_T \Delta \Rightarrow R_y^x(\Phi)$,

$\Gamma \models_T \Delta$, $\exists x\Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta \Rightarrow R_y^x(\Phi), \Gamma \models_{TF} \Delta$,

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_F \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_F R_z^x(\Phi), \Delta$,

$\Gamma\ {}_A|\!\!=_{TF} \forall x\Phi, \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!=_{TF} R_z^x(\Phi), \Delta$.

Теорема 18 доводиться на основі теореми 2 та прикладів 8–15.

Теорема 19. Нехай z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді

1) $R_z^x(\Phi), \Gamma\ {}_A|\!\!= \Delta \Rightarrow \exists x\Phi, \Gamma\ {}_A|\!\!= \Delta$;

2) $\Gamma\ {}_A|\!\!= R_z^x(\Phi), \Delta \Rightarrow \Gamma\ {}_A|\!\!= \forall x\Phi, \Delta$.

Тут $\models$ – одне з $\models_{Cl}$, $\models_{Cm}$ $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$.

Доводимо п. 1 для $\models_{Cl}$. Покажемо, що із $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi)) \cap \boldsymbol{F}(\Delta) = \varnothing$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(\exists x\Phi) \cap \boldsymbol{F}(\Delta) = \varnothing$. Припустимо супротивне: існує $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(\exists x\Phi) \cap \boldsymbol{F}(\Delta)$, проте $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi)) \cap \boldsymbol{F}(\Delta) = \varnothing$. Тоді маємо $d \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$, $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma)$ та $d \in \boldsymbol{F}(\Delta)$, із $d \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$ маємо $d\nabla x \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi)$ для деякого $a \in A$. Але z тотально строго неістотне та $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$, тому маємо $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma)$, $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{F}(\Delta)$ та $d\nabla x \mapsto a \nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Phi)$. Із останнього отримуємо $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$, тому $d\nabla z \mapsto a \in \boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi)) \cap \boldsymbol{F}(\Delta)$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi)) \cap \boldsymbol{F}(\Delta) = \varnothing$.

Враховуючи властивості П7 та П8, п. 2 для $\models_{Cl}$ випливає з п. 1.

Доводимо п. 1 для $\models_{Cm}$. Покажемо, що з $\boldsymbol{F}(\Gamma) \cup \boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi)) \cup \boldsymbol{T}(\Delta) = {}^VA$ випливає $\boldsymbol{F}(\Gamma) \cup \boldsymbol{F}(\exists x\Phi) \cup \boldsymbol{T}(\Delta) = {}^VA$. Припустимо супротивне: існує $d \notin \boldsymbol{F}(\Gamma) \cup \boldsymbol{F}(\exists x\Phi) \cup \boldsymbol{T}(\Delta)$, проте $\boldsymbol{F}(\Gamma) \cup \boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi)) \cup \boldsymbol{T}(\Delta) = {}^VA$. Тоді $d \notin \boldsymbol{F}(\Gamma)$, $d \notin \boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$ та $d \notin \boldsymbol{T}(\Delta)$, із $d \notin \boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$ маємо $d\nabla x \mapsto a \notin \boldsymbol{F}(\Phi)$ для деякого $a \in A$. Але z тотально строго неістотне і $z \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$, тому маємо $d\nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{F}(\Gamma)$, $d\nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{T}(\Delta)$, $d\nabla x \mapsto a \nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{F}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, тому отримуємо $d\nabla z \mapsto a \notin \boldsymbol{F}(\Gamma) \cup \boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi)) \cup \boldsymbol{T}(\Delta)$, що суперечить $\boldsymbol{F}(\Gamma) \cup \boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi)) \cup \boldsymbol{T}(\Delta) = {}^VA$.

Враховуючи властивості П7 та П8, п. 2 для $\models_{Cm}$ випливає з п. 1.

Доводимо п. 1 для $\models_T$. Покажемо, що із $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi)) \subseteq \boldsymbol{T}(\Delta)$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma) \cap \boldsymbol{T}(\exists x\Phi) \subseteq \boldsymbol{T}(\Delta)$. Припустимо супротивне: деяке $d \in \boldsymbol{T}(\Gamma)$, $d \in \boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$, $d \notin \boldsymbol{T}(\Delta)$, проте $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$. Із $d\in\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)$ маємо $d\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Phi)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому звідси $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Gamma)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(\Delta)$ та $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$, тому $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(\Delta)$ та $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$.

Доводимо п. 2 для $|\!=_{\boldsymbol{T}}$. Покажемо, що із $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$ випливає $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$. Припустимо супротивне: деяке $d\in\boldsymbol{T}(\Gamma)$, $d\notin\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)$, $d\notin\boldsymbol{T}(\Delta)$, проте $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$. Із $d\notin\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)$ маємо $d\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(\Phi)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Gamma)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(\Delta)$ та $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))$, тому $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{T}(\Gamma)$ та $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$, що суперечить $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$.

Доводимо п. 1 для $|\!=_{\boldsymbol{F}}$. Покажемо, що із $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$ випливає $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$. Припустимо супротивне: деяке $d\in\boldsymbol{F}(\Delta)$, $d\notin\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$, $d\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)$, проте $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$. Із $d\notin\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$ маємо $d\nabla x\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Phi)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}(\Delta)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)$ та $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, тому $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}(\Delta)$ та $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, що суперечить $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$.

Доводимо п. 2 для $|\!=_{\boldsymbol{F}}$. Покажемо, що із $\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$ випливає $\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$. Припустимо супротивне: деяке $d\in\boldsymbol{F}(\Delta)$, $d\in\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)$, $d\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)$, проте $\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$. Із умови $d\in\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)$ маємо $d\nabla x\mapsto a\in\boldsymbol{F}(\Phi)$ для деякого $a\in A$. Але z тотально строго неістотне та $z\notin nm(\Gamma,\Delta,\Phi)$, тому маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}(\Delta)$, $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)$ та $d\nabla x\mapsto a\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}(\Phi)$. Із останнього маємо $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$, тому $d\nabla z\mapsto a\notin\boldsymbol{F}(\Gamma)$ та $d\nabla z\mapsto a\in\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)$, що суперечить $\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$.

Доводимо п. 1 для $|\!=_{\boldsymbol{TF}}$. Для цього покажемо: із $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$ та $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$ випливають умови $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$, $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$. Нехай супротивне: $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$, $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))$ та невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma)\cap\boldsymbol{T}(\exists x\Phi)\subseteq\boldsymbol{T}(\Delta)$ або невірно $\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)\cup\boldsymbol{F}(\exists x\Phi)$. У першому випадку доводимо так як для $|\!=_{\boldsymbol{T}}$, а в другому – як для $|\!=_{\boldsymbol{F}}$.

Доводимо п. 2 для $|\!=_{\boldsymbol{TF}}$. Для цього покажемо: із $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$ та $\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$ (1) випливають $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$, $\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$. Нехай супротивне: $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(R_z^x(\Phi))\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$, $\boldsymbol{F}(R_z^x(\Phi))\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$ та невірно $\boldsymbol{T}(\Gamma)\subseteq\boldsymbol{T}(\forall x\Phi)\cup\boldsymbol{T}(\Delta)$ або невірно $\boldsymbol{F}(\forall x\Phi)\cap\boldsymbol{F}(\Delta)\subseteq\boldsymbol{F}(\Gamma)$. У першому випадку доводимо так як для $|\!=_{\boldsymbol{T}}$, а в другому – як для $|\!=_{\boldsymbol{F}}$.

Із теорем 18 та 19 отримуємо

Наслідок 12. Нехай z тотально неістотне та $z\notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$. Тоді

1) для логік еквітонних предикатів:

$\exists x\Phi, \Gamma_A|\!=_{Cl}\Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A|\!=_{Cl}\Delta$,

$\Gamma_A|\!=_{Cl}\forall x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A|\!=_{Cl}R_z^x(\Phi), \Delta$,

$\exists x\Phi, \Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{T}}\Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{T}}\Delta$,

$\Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{F}}\forall x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{F}}R_z^x(\Phi), \Delta$;

2) для логік антиеквітонних предикатів:

$\exists x\Phi, \Gamma_A|\!=_{Cm}\Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A|\!=_{Cm}\Delta$,

$\Gamma_A|\!=_{Cm}\forall x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A|\!=_{Cm}R_z^x(\Phi), \Delta$,

$\exists x\Phi, \Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{F}}\Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), \Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{F}}\Delta$,

$\Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{T}}\forall x\Phi, \Delta \Leftrightarrow \Gamma_A|\!=_{\boldsymbol{T}}R_z^x(\Phi), \Delta$.

Висновки

У роботі вивчаються семантичні властивості композиційно номінативних логік часткових однозначних, тотальних та часткових неоднозначних предикатів пропозиційного, реномінативного та кванторного рівнів. Дається визначення композицій через області істинності та хибності предикатів, визначення еквітонних та антиеквітонних предикатів. Для зазначених логік досліджуються відношення логічного наслідку для пар та множин формул, відповідні відношення логічної еквівалентності.

1. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем // Проблеми програмування. – 2007. – № 2. – С. 15–40.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К., 2008. – 528 с.
3. *Смирнова Е.Д.* Логика и философия. – М., 1996. – 304 с.
4. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Семантичні властивості композиційно-номінативних логік. – Міжнар. конф. "Теоретичні та прикладні аспекти побудови програмних систем". – TAAPSD'2009. Тези доповідей. – К., 2009. – С. 50–59.
5. *Никитченко Н.С.* Предикатные композиционно-номинативные системы // Проблемы программирования. – 1999. – № 2. – С. 3–19.

Отримано 29.12.2009

Про автора:

Шкільняк Степан Степанович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії та технології програмування Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

***Місце роботи автора*:**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
01601, Київ-601,
вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259-0519, (044) 522-0640 (д),
e-mail: sssh@unicyb.kiev.ua