УДК 681.3

# ДЕЯКІ ПІДХОДИ ДО ОБЧИСЛЕННЯ УМОВНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

*О.І. Провотар , О.В.* Лапко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
03127, Київ, проспект Академіка Глушкова 2, к.6., ф. 259 7044,
тел.: 259 0511, e-mail: aprowata@unicyb.kiev.ua
Університет міста Жешув (Польща)

Розглядаються різні підходи до обчислення умовної невизначеності подій запропоновані в рамках теорії ймовірності та можливості. Особлива увага приділяється розгляду поняття залежності невизначених подій.

The article discusses the various approaches to calculating the conditional uncertainability of events proposed in the theory of probability and possibility. Particular attention is paid to consideration of the concept of uncertain events depends.

## Вступ

Довгий час теорія ймовірностей була єдиним математичним інструментом обчислення невизначеності. Однак протягом останніх років з'явилися нові альтернативні підходи до обчислення невизначеності. Їх метою є обчислення невизначеності у тих випадках коли природа невизначеності не вкладається в класичні ймовірнісні схеми, або коли ймовірнісні схеми є занадто суттєвими обмеженнями при розв'язанні тих чи інших задач.

Однією з основних альтернативних теорій є теорія можливості запропонована Л. Заде в 1978 році [13]. Основи теорії можливості розглядалися в [2]. Зокрема йшлося про підходи теорії можливості до обчислення невизначеності окремих подій та порівняння результатів обчислення з результатами ймовірнісних підходів. Проте в задачах прийняття рішень, інтерпретації результатів експерименту, штучного інтелекту часто виникає потреба в обчисленні невизначеності (ймовірності, можливості) не окремих подій, а невизначеності їх кореляції. В теорії ймовірності основним інструментом для обчислення кореляції двох стохастичних подій є умовна ймовірність та залежність подій. Так само й в теорії можливості є поняття умовної можливості подій. Проте на відміну від ймовірнісного підходу можливістний не має жорстких чітких обмежень і тому існує декілька визначень умовної можливості.

## Теорія ймовірності

Випадкова подія це така подія, яка при виконанні певної сукупності умов експерименту може відбутися або не відбутися. Якщо при обчислені ймовірності подій ніяких інших умов, не накладається то таку ймовірність називають *безумовною*, якщо ж накладаються й інші додаткові умови то тоді ймовірність події називають *умовною* [1]. Наприклад часто обчислюють ймовірність події А за умови, що відбулась подія В.

*Умовною ймовірністю* події $A$ за умови виконання події $B$ називають ймовірність події $A$, що обчислена з припущенням того, що відбулась подія $B$, позначають таку умовну ймовірність наступним чином

$$\boldsymbol{P}(A|B) \text{ або } \boldsymbol{P}_B(A).$$

В загальному випадку знайти умовну ймовірність в класичному розумінні ймовірності досить просто й можна це зробити наступним чином. Нехай з $n$ взаємовиключних та рівно ймовірних елементарних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$

події $A$ сприяє $m$ елементарних подій,
події $B$ сприяє $k$ елементарних подій,
події $AB$ сприяє $r$ елементарних подій,

(зрозуміло, що $r \le k$, $r \le m$). Якщо подія $B$ відбулась, то це означає, що настало одна з елементарних подій $A_j$, що сприяє події $B$. При цій умові події $A$ сприяє лише $r$ і тільки $r$ елементарних подій $A_j$, що сприяють $AB$. Таким чином отримуємо

$$P(A \mid B) = \frac{r}{k} = \frac{r/n}{k/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1}$$

Звідки, ймовірність одночасної появи двох залежних подій буде дорівнювати добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчисленої за умови, що перша відбулась, тобто

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B), \tag{2}$$

це твердження називають теоремою множення для умовних ймовірностей.

З умовною ймовірністю подій тісно пов'язано поняття *незалежності подій*. Кажуть, що подія $A$ *незалежна* від події $B$, якщо має місце рівність

$$\boldsymbol{P}(A|B)=\boldsymbol{P}(A),$$

тобто якщо настання події *B* ніяким чином не змінює ймовірності настання події *A*. Властивість незалежності подій є взаємним, тобто якщо подія *A* незалежна від події *B*, то подія *B* також незалежна від події *A* і навпаки. В цьому легко можна переконатись, використовуючи теорему множення (2).

З теореми множення також можна отримати альтернативне означення незалежності подій, а саме, якщо *A* та *B* незалежні події то виконується наступна рівність

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad (1)$$

і навпаки, якщо виконується рівність (3) то події *A* та *B* незалежні.

## Теорія можливості

Розглянемо існуючі підходи визначення можливості настання умовних подій або іншими словами умовну можливість події *A* за умови виконання події *B*.

Нехай маємо скінчену множину ***X***, яку будемо називати універсальним *простором*. Будемо припускати, що в просторі ***X*** маємо хоча б два елементи.

А *мірою можливості* ***П*** [2] називатимемо відображення з булеану універсального простору ***ρ(X)*** у

відрізок дійсних чисел [0,1], що задовольняє наступну властивість: для будь-якого набору елементів $\{A_j, j \in J\}$ з

булеану універсального простору ***ρ(X)*** буде виконуватися співвідношення

$$\Pi(\bigcup_{j\in J} A_j) = \max_{j\in J}(\Pi(A_j)), \quad (2)$$

тобто міра можливості об’єднання підмножин універсального простору дорівнює максимуму мір можливості цих же підмножин простору. Отже для будь-якої множини *A* підмножини універсального простору ***X, П(A)*** міру можливості множини *A* будемо називати *можливістю* множини *A*. Нечітку множину *A* визначену на універсальному просторі з мірою можливості будемо називати подією *A*, а міру ***П***(*A*) – можливістю настання події *A*.

Для кожної міри можливості визначається відношення $\pi : X \to [0,1]$, таке що для будь-якої події *A*, що належить булеану універсального простору ***ρ***(***X***), можливість цієї події дорівнює максимуму відношення $\pi(x)$, при умові, що елемент *x* береться з множини *A*, тобто відношення $\pi(x)$ задовольняє співвідношення

$$\Pi(A) = \max_{x\in A} \pi(x). \quad (3)$$

Таку функцію $\pi(x)$, що задовольняє рівність (5) , називається функцією розподілу можливостей ***П.***

Розглянемо два універсальних простори *X* та *Y*. Визначимо також дві нечіткі події *A* та *B* , що приймають значення з просторів *X* та *Y* відповідно. Тоді (*A,B*) також нечітка подія, що приймає значення з декартового добутку $X \times Y$ , з мірою можливості $\Pi_{(A,B)}$ визначеної, як відображення з булеану декартового добутку просторів в відрізок дійсних чисел від 0 до 1 та функцією розподілу можливстей $\pi_{(A,B)} : (X,Y) \to [0,1]$.
Заде [13] називав таку міру $\Pi_{(A,B)}$ *бінарною мірою можливості,* а функцію $\pi_{(A,B)}$ *бінарною функцією розподілу можливостей.* Хоча Хісдал в [8] використовує назву об’єднана замість бінарна.

Визначимо міру можливості $\Pi_A$ визначеної, як відображення з булеану простору *X* в відрізок дійсних чисел від 0 до 1 з функцією розподілу можливості $\pi_A$ , що є проекцією міри можливості декартового добутку $\Pi_{(A,B)}$ на множину *A* простору *X,* тобто задовольняє співвідношення $\Pi_A(C) = \Pi_{(A,B)}(C \times Y),$ для всіх множин С, що належать булеану простору *X*, або еквівалентне співвідношення для функції розподілу можливостей $\pi_A(x) = \max_{y\in Y} \pi_{(A,B)}(x, y),$ для всіх *x*, що належать простору *X.*

Аналогічно мірі $\Pi_A$ визначимо міру можливості $\Pi_B$ з відповідною функцією розподілу можливостей $\pi_B$, як проекцію міри можливості декартового добутку $\Pi_{(A,B)}$ на множину *B* простору *Y,* тобто задовольняє співвідношення $\Pi_B(C) = \Pi_{(A,B)}(X \times C),$ для всіх множин С, що належать булеану простору *Y*, або еквівалентне співвідношення для функції розподілу можливостей $\pi_B(y) = \max_{x\in X} \pi_{(A,B)}(x, y),$ для всіх *x,* що належать простору *X.*

Міри можливості $\Pi_A$ та $\Pi_B$ називають маргінальними мірами можливості подій *A* та *B* відповідно. А функції розподілу можливостей $\pi_A$ та $\pi_B$ маргінальними функціями розподілу можливостей.

**Приклад 1.**

Нехай маємо дві нечіткі події(множини) *A* та *B*, визначені на просторі дійсних чисел. Запишемо їх в табличному вигляді:

| *x є A;x =* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ *(x) =* | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 0,8 |

| *y є B; y =* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ *(y) =* | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Визначимо для цих нечітких подій їх декартів добуток *А*х*В,* через функцію розподілу можливостей зображену в табличному вигляді*:*

| *(x,y) є A*х*B* | *X=* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y=* | $\pi_{AxB}(x,y)$ = | | | | | |
| 1 | | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 2 | | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 0,4 | 0,4 |
| 3 | | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |
| 4 | | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| 5 | | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

А також визначимо маргінальні функції розподілу можливостей $\pi_A$ та $\pi_B$ для декартового добутку *А*х*В:*

| *x є A;x =* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_A(x)$ = | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |

| *y є B; y =* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_B(y)$ = | 0,5 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |

Розглянемо існуючи підходи обчислення умовної можливості подій.

## Підхід Заде

Заде в [13] визначає міру умовної можливості дуже просто, прирівнявши її до бінарної міри можливості, тобто міра можливості задовольняє наступне співвідношення*:*

$$\Pi(B \mid A) = \Pi(A \times B) = \Pi(A \mid B).$$

Аналогічно й функції розподілу можливостей декартового добутку за Заде визначають функції розподілу можливостей умовної можливості, а саме задовольняють наступні співвідношення**:**

$$\pi_{B|A}(x \mid y_1) = \pi_{(A\times B)}(x, y_1), \;\; \pi_{A|B}(y \mid x_1) = \pi_{(A\times B)}(x_1, y), \tag{6}$$

для будь-якої пари $(x_1, y_1)$ з декартового добутку просторів $X \times Y$.

Заде також водить поняття невзаємодіючих подій, що є певною аналогією незалежності з теорії ймовірності. Події *A* та *B* називаються невзаємодіючими, якщо бінарна міра можливості декартового добутку $A \times B$ дорівнює мінімуму маргінальних мір можливості, тобто виконується наступне співвідношення**:**

$$\Pi_{(A,B)} = \Pi_A \wedge_{\min} \Pi_B, \tag{7}$$

або еквівалентно, бінарна функція розподілу можливостей дорівнює мінімуму маргінальних функцій розподілу можливостей, тобто виконується наступне співвідношення**:**

$$\pi_{(A,B)}(x, y) = \min(\pi_A(x), \pi_B(y)), \tag{8}$$

для будь-якої пари (*x,y*) з декартового добутку просторів $X \times Y$.

Це означає, що концепція Заде умовної можливості не повністю аналогічна звичайній умовній ймовірності. В [8] Хісдал відмічає, що Заде навмисно не проводить повної аналогії з теорією ймовірності, тому що це б привело до суперечностей з його теорією наближених міркувань [13].

**Приклад 2.**

Визначимо для нечітких подій з Прикладу 1 можливість події *A* при умові, що виконується подія *B* за Заде, і навпаки, через функцію розподілу. Беручи до уваги означення умовності за Заде отримуємо ту саму таблицю, що й першому прикладі:

| *(x,y) є A*х*B* | *x=* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y=* | $\pi_{A\|B}(x\|y)$ = | | | | | |
| 1 | | 0,2 | 0,4 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 2 | | 0,2 | 0,4 | 0,4 | 0,4 | 0,4 |
| 3 | | 0,2 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |
| 4 | | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| 5 | | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

Тобто умовна можливість події *x*=3 (*x є A*) при умові, що *y*=3 (*y є B*) буде дорівнювати можливості настання події (*x,y*)=(3,3), а саме 0,3.

## Підхід Хісдал

Хісдал намагалась побудувати умовність в теорії можливості аналогічно теорії ймовірності. Тобто використовуючи теорема добутку умовних функцій щільності з теорії ймовірності, вона будує співвідношення для умовних функцій розподілу можливостей враховуючи властивості міри можливості, а саме стверджує, що ці функції мають задовольняти наступне співвідношення:

$$\begin{cases} \pi_{(A,B)}(x,y) = \min(\pi_{A|B}(x\,|\,y), \pi_B(y)) \\ \pi_{(A,B)}(x,y) = \min(\pi_{B|A}(y\,|\,x), \pi_A(x)) \end{cases}; \tag{9}$$

для будь-якої пари $(x,y)$ з декартового добутку просторів $X \times Y$. Відмітимо, що оператор min в співвідношенні (9) відіграє таку саме роль, що й оператор «добуток» в теорії ймовірності.

Система рівнянь (9) має наступні розв'язки, для будь-якої пари $(x,y)$ з декартового добутку просторів $X \times Y$

$$\pi_{A|B}(x\,|\,y) \in \begin{cases} \{\pi_{(A,B)}(x,y)\}; \pi_B(y) > \pi_{(A,B)}(x,y) \\ [\pi_{(A,B)}(x,y), 1]; \pi_B(y) = \pi_{(A,B)}(x,y) \end{cases} \tag{10}$$

аналогічно й для $\pi_{(B|A)}(y\,|\,x)$. Таким чином ми отримуємо умовну можливість визначену за Хісдал. Легко помітити, що умовність визначена за Заде задовольняє співвідношення (10), але не навпаки, що означає, що можливість визначена за Хісдал включає в себе як частковий випадок можливість, що визначена за Заде.

Також Хісдал вводить поняття аналогічне стохастичній незалежності подій, і називає його можливістною незалежністю. Події *A* називається можливістно незалежною від події *B*, якщо функція розподілу умовної можливості події *A* при виконані події *B* дорівнює маргінальній функції можливості події *A*, а саме для будь-якої пари $(x,y)$ з декартового добутку просторів $X \times Y$ задовольняється наступне співвідношення:

$$\pi_{A|B}(x,y) = \pi_A(x). \tag{11}$$

Можемо відмітити, що якщо *A* є можливістно незалежною подією від *B* то *A* та *B* є невзаємодіючими, але не навпаки.Однак підхід Хісдал має один суттєвий недолік, відмічений в [3]. Оскільки умовний можливістний розподіл визначається неоднозначно, то її означення можливістної незалежності має не багато сенсу.

## Підхід Дюбуа та Прад

Дюбуа та Прад в [4 - 6] дещо удосконалили підхід Хісдал. Вони запропонували брати найбільший з розв'язків рівняння (9), тобто такий що задовольнятиме наступне співвідношення для будь-якої пари *(x,y)* з декартового добутку просторів $X \times Y$

$$\pi_{A|B}(x\,|\,y) = \begin{cases} \{\pi_{(A,B)}(x,y)\}; \pi_B(y) > \pi_{(A,B)}(x,y) \\ [\pi_{(A,B)}(x,y), 1]; \pi_B(y) = \pi_{(A,B)}(x,y) \end{cases} \tag{12}$$

аналогічно й для $\pi_{(B|A)}(y\,|\,x)$. Таким чином автори підходу вирішують проблему Хісдал з неоднозначністю розв'язків.

Дюбуа і Прад у [4 - 6] також пропонують визначення умовної можливості для множин(подій) визначених на одному просторі. Нехай *A* та *B* нечіткі підмножини простору *X*, з мірою можливості *П* визначеною на булеані простору ***ρ****(X)*. Тоді умовною можливістю $\Pi(B\,|\,A)$ події *B* за умови виконання події *A* буде рішення наступного співвідношення:

$$\Pi(A \cap B) = \min(\Pi(B\,|\,A); \Pi(A)). \tag{13}$$

Розв'язок співвідношення (13) шукається за так званим принципом мінімальної специфікації з [4 - 6], що обґрунтовує вибір Дюбуа та Прада максимального розв'язку, тобто маємо

$$\Pi(A\,|\,B) = \begin{cases} \Pi(A \cap B); & \Pi(A \cap B) < \Pi(B) \\ 1; & \Pi(A \cap B) = \Pi(B). \end{cases} \tag{14}$$

Дюбуа та Прад також використовують поняття можливістної незалежності, причому це поняття повністю аналогічне незалежності за Хісдал.

**Приклад 3.**

Визначимо для нечітких подій з прикладу 1 можливість події *A* при умові, що виконується подія *B* за Дюбуа та Прадом, і навпаки, через функцію розподілу. Беручи до уваги означення умовності за Дюбуа та Прадом отримуємо умовну міру можливості $\Pi_{A|B}$ з наступною функцією розподілу можливостей $\pi_{A|B}(x|y)$ зобразимо її в табличному вигляді:

| $x \in A, y \in B$ | $x=$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y=$ | $\pi_{A\|B}(x\|y) =$ | | | | | |
| 1 | | 0,2 | 0,4 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 0,2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | | 0,2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | | 0,1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таким саме чином визначимо умовну міру можливості $П_{B|A}$ з наступною функцією розподілу можливостей $\pi_{B|A}(y|x)$ зобразимо її в табличному вигляді:

| *x є A, y є B* | *x=* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *y=* | $\pi_{B\|A}(y\|x)$ = | | | | | |
| 1 | | 1 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 2 | | 1 | 1 | 0,4 | 0,4 | 0,4 |
| 3 | | 1 | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,3 |
| 4 | | 1 | 0,2 | 0,2 | 0,2 | 0,2 |
| 5 | | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 | 0,1 |

## Підхід Демпстер

У роботі [12] Демпстер умовність можливості будує за повною аналогією до умовної ймовірності. Тобто він стверджує, що умовна можливість події *A* за умови виконання *B* дорівнює бінарній можливості декартового добутку *A*x*B* поділеній на маргінальну можливість події *B,* за умови що вона не дорівнює нулю, тобто для будь-якої пари *(x,y)* з декартового добутку просторів $X \times Y$ виконується

$$\pi_{(A|B)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\pi_{(A,B)}(x,y)}{\pi_B(y)}; & \pi_B(y) \neq 0 \\ 1; & \pi_B(y) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Визначаючи таким чином умовну можливість Демпстер залишає поняття можливістної незалежності таким самим, як і у Хісдал, тобто якщо функція розподілу умовної можливості події *A* при події *B* дорівнює маргінальній функції можливості події *A,* то *A* можливістної незалежна від *B*.

Також є ще багато інших підходів визначення умовної можливості, таких як підхід Нгуена [9] , підхід Сугуено [11], підхід Лукашевича [7]. Та на нашу думку ці підходи є штучними й неефективними для практичного використання, тому докладно розглядати ми їх не будемо.

**Приклад 4.**

Визначимо для нечітких подій з Прикладу 1 можливість події *A* при умові, що виконується подія *B*, і навпаки, через функцію розподілу. Беручи до уваги означення умовності за Демпстером отримуємо умовну міру можливості $П_{A|B}$ з наступною функцією розподілу можливостей $\pi_{A|B}(x|y)$ зобразимо її в табличному вигляді:

| *(x,y)* є *AxB* | *x=* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *y=* | $\pi_{A\|B}(x\|y)$ = | | | | | |
| 1 | | 0,4 | 0,8 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 0,5 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | | 0,67 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Таким саме чином визначимо умовну міру можливості $П_{B|A}$ з наступною функцією розподілу можливостей $\pi_{B|A}(y|x)$ зобразимо її в табличному вигляді:

| *x є A, y є B* | *x=* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Y=* | $\pi_{B\|A}(y\|x)$ = | | | | | |
| 1 | | 1 | 1 | 0,83 | 0,63 | 0,63 |
| 2 | | 1 | 1 | 0,67 | 0,5 | 0,5 |
| 3 | | 1 | 0,75 | 0,50 | 0,38 | 0,38 |
| 4 | | 1 | 0,5 | 0,33 | 0,25 | 0,25 |
| 5 | | 0,5 | 0,25 | 0,17 | 0,13 | 0,13 |

## Підхід Де Кумана

Також ще є один підхід до визначення умовної можливості запропонований де Куманом в [3]. Це є найбільш загальним методом, що охоплює всі попередні, його ще називають мірно-теортичний підхід [12]. Для початку визначимо трикутну норму - t-норму.

Трикутною нормою (*t*-норма) *T* називається бінарний оператор визначений на відрізку [0,1] (тобто $T:[0,1]^2 \to [0,1]$), що задовольняє наступні умови:

(i) граничні умови: для будь-якого *a* з відрізку [0,1] виконується

$$T(1,a) = a, \qquad T(0,a) = 0;$$

(ii) ізотонічність: для будь-яких $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, з відрізку [0,1] таких, що $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2$ виконується

$$T(a_1,b_1) \le T(a_2,b_2);$$

(iii) асоціативність та комутативність: для будь-яких *a, b, c,* з відрізку [0,1] виконується

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c)),$$

$$T(a,b) = T(b,a).$$

*t*-норма називається неперервною, якщо функція *T* є неперервною. Розглянемо три найбільш використовувані трикутні норми:

(i) *t*-норма Гьоделя $T(a,b) = \min(a,b)$;

(ii) *t*-норма добутку $T(a,b) = a \cdot b$;

(iii) *t*-норма Лукашевича $T(a,b) = \max(0, a+b-1)$.

Нехай маємо нечітку величину [10] $h: X \to [0,1]$. Будемо позначати через $G(X)$ множину всіх можливих нечітких величин визначених на множині *X* та *T* *t*-нормою визначеною на [0,1]. Тоді для будь-якої можливістної міри *П* визначеної на *X* з функцією розподілу $\pi$ визначатимемо наступне співвідношення. Будь-які нечіткі величин $h_1$ та $h_2$ з $G(X)$ називаються (*П,Т*)- *рівними майже всюди* (і позначатимемо ) $h_1 \overset{(\Pi,T)}{=} h_2$ якщо для будь-якого *x* з простору *X* виконуватиметься

$$T(h_1(x), \pi(x)) = T(h_2(x), \pi(x)). \tag{17}$$

Останнє визначення є дуже важливим для визначення умовної можливості за де Куманом, адже він стверджує, що вона є розв'язком наступного співвідношення

$$\pi_{AB}(x,y) = T(\pi_B(y), \pi_{A|B}(x \mid y)), \tag{18}$$

для будь-якої пари (*x,y*) з декартового добутку просторів $X \times Y$. Рішення рівняння (18) нажаль не є унікальним, але двозначність виникає лише, коли майже скрізь досягається рівність. Ми можемо отримати розподіл умовної можливості, взявши залишок по *T*(що є неперервною t-нормою), тобто розв'язок матиме вигляд:

$$\pi_{A|B}(x \mid \cdot) \overset{(\Pi_B,T)}{=} \pi_{AB}(x,\cdot)\Delta_T \pi_B(\cdot), \tag{19}$$

що й буде найбільшим розв'язком співвідношення (18).

Можемо помітити, що якщо вибрати *t*-норму Демпстера, то отримаємо умовну можливість визначену за підходом Демпстера, а якщо вибрати t-норму Гьоделя, то отримаємо умовність визначену Хісдалом, а взявши до у ваги розв'язок (19) то отримаємо умовність за Дюбуа та Прадом.

Визначимо незалежність подій для мірно-теоретичного підходу. Нехай маємо *t*-норму *T,* та дві події *A* та *B* з просторів *X* та *Y* відповідно. Подія *A* та *B* називаються незалежними, якщо бінарна функція розподілу можливостей декартовго добутку *A*x*B* дорівнює *t*-нормі Т від маргінальних функцій розподілу можливостей, тобто для будь-якої пари (*x,y*) з декартового добутку просторів $X \times Y$ виконується

$$\pi_{AB}(x,y) = T(\pi_A(x), \pi_B(y)), \tag{20}$$

або якщо *t*-нормі *T* від маргінальних функцій розподілу можливостей декартового добутку *A*x*B* дорівнює *t*-нормі *T* від функції розподілу можливостей умовної можливості події *A* (події *B*) за умови виконання події *B* (події *A*) та маргінальної функції розподілу можливостей події *B* (події *A*), тобто для будь-якої пари (*x,y*) з декартового добутку просторів $X \times Y$ виконується

$$T(\pi_A(x), \pi_B(y)) = T(\pi_{A|B}(x \mid y), \pi_B(y)) = T(\pi_{B|A}(y \mid x), \pi_A(x)). \tag{21}$$

## Висновок

У статті розглядаються різні способи визначення умовності невизначених подій, стохастичний та декілька можливістних, а саме підходи: Заде, Хісдал, Дюбуа та Прада, Демпстера та де Кумана. Велика кількість можливістний підходів викликана перш за все відсутностю строгих обмежень на міру можливості на відміну від теорії ймовірності. Та підхід де Кумана (мірно-теоретичний) є узагальнюючим й охоплює всі інші. Тим не менш, існують і деякі інші підходи обчислення умовних можливостей, що не були згадані у статті, але на думку авторів більшість з них виглядають досить штучним і тому не були розглянуть. Крім того у статті розглянуто визначення залежності нечітких подій окремо для кожного з підходів, що дозволяє більш чітко класифікувати кореляцію нечітких подій.

Автори вищезгаданих підходів намагалися описати той же принцип що й в ймовірності за умов теорії можливості, й побудувати підходи до обчислення умовної можливості аналогічно умовній ймовірності, але зовсім інша природа походження та шляхи обчислення нечіткості в теорії можливості наштовхує на роздуми, що можливо необхідно не будувати можливістну умовність аналогічно ймовірнісній, а побудувати кардинально відмінний спосіб визначення кореляції нечітких подій та їх залежність.

Передбачається, що запропоновані підходи в майбутньому можуть бути узагальнені і дослідженні на предмет оптимальності для певного класу задач. Планується також, визначити та класифікувати класи задач, для яких кожен з запропонованих підходів може надати найбільш чітке та коректне рішення.


1. *Гнеденко Б.* Курс теории вероятностей // Учебник. Изд. 8-е, испр. И доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005 .– С. 205– 448.
2. *Провотар А., Лапко А.* О некоторых подходах к вычислению неопределенностей // Проблеми програмуванн .– 2010. – № 2-3. – С. 22–28.
3. *Cooman G. de.* Possibility theory II: Conditional possibility // Int. J. General Systems. – 1997. – 25. – P. 325–351.
4. *Dubois D., and Prade H*. Th´eorie des possibilit´es // Masson, Paris. 1985.
5. *Dubois D., and Prade H*. Possibility Theory – An Approach to Computerized Processing of Uncertainty // Plenum Press, New York. 1988.
6. *Dubois D., and Prade H.* The logical view of conditioning and its application to p ossibility and evidence theories. // International Journal of Approximate Reasoning . –1990. – 4. – P. 23 – 46.
7. *Fonck P.* Conditional independence in possibility theory in R. L. de Mantaras P. Poole (eds.) // Proceedings of 10 -th conference UAI, 221-226, Morgan Kaufman San Francisco, 1994.
8. *Hisdal E.* Conditional possibilities independence and noninteraction // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – 1. – P. 299–309.
9. *Nguyen H.* On conditional possibility distributions // Fuzzy Sets and Systems . – 1987. – 1. – P. 299–309.
10. *Provotat O., and Lapko O.* New methods of description for uncertain variables // Проблеми програмування.
11. *Sugeno M.* The Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications // PhD thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974;
12. *Vejnarová J.* Conditional Independence Relations in Possibility Theory // in Proc. ISIPTA. –1999. – P. 343–351.
13. *Zadeh L.* Fuzzy sets as a basis for theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – 1. – P. 3–28.