УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк

АЛГЕБРИ КВАЗІАРНИХ ТА БІ-КВАЗІАРНИХ РЕЛЯЦІЙ

Запропоновано поняття квазіарної реляції (відношення), введено операції над такими реляціями, описано алгебри квазіарних реляцій. Доведено ізоморфізм алгебри квазіарних реляцій та першопорядкової алгебри тотальних однозначних квазіарних предикатів. Побудовано алгебри бі-квазіарних реляцій, задані на множинах пар квазіарних реляцій. Визначено різні підкласи таких алгебр та досліджено їх зв'язки з алгебрами часткових однозначних, тотальних неоднозначних, часткових неоднозначних, монотонних, антитонних квазіарних предикатів.

Ключові слова: алгебра, логіка, ізоморфізм, реляція, квазіарний предикат.

Вступ

Поняття реляції (відношення) належить до найважливіших понять математики. Під n-арним відношенням зазвичай розуміють [1] множину кортежів довжини n. Водночас низка задач інформатики та програмування вимагають узагальнення цього поняття.

Скінченне n-арне відношення можна розглядати як таблицю, що має n стовпчиків. Рядок таблиці (n-ка базових значень даних) – це елемент відношення. При цьому в деяких випадках заповненими можуть бути не всі клітинки таблиці. Наприклад, якщо розглядати екзаменаційну відомість як таблицю, то не всі її клітинки заповнюються під час іспиту (зокрема, через неявку студента на іспит).

Формально таку частково заповнену таблицю можна задати наступним чином. Нехай V – множина атрибутів (предметних імен), A – множина предметних значень. Часткову функцію із V в A назвемо номінативною (іменною) множиною. Клас всіх таких множин позначаємо ${}^{V}\!A$. Довільну підмножину $R \subseteq {}^{V}\!A$ назвемо квазіарною реляцією. Тепер номінативна множина, що входить у реляцію R, може розглядатися як частково заповнений рядок таблиці.

Мета даної роботи – це побудова та вивчення алгебр квазіарних реляцій (відношень) та дослідження їх зв'язків із алгебрами квазіарних предикатів. Доведено ізоморфізм алгебри квазіарних відношень та першопорядкових алгебр тотальних однозначних квазіарних предикатів. Побудовано алгебри бі-квазіарних реляцій, задані на множинах пар квазіарних реляцій.

Визначено різні підкласи таких алгебр, встановлено їх зв'язки з алгебрами часткових однозначних, тотальних неоднозначних, часткових неоднозначних, монотонних, антитонних квазіарних предикатів.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [2, 3]. Для полегшення читання наведемо необхідні для подальшого викладу визначення.

1. Іменні множини та квазіарні предикати

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це однозначна функція вигляду $\delta : V \to A$. Подаємо V-ІМ у вигляді $[v_1 \mapsto a_1, ..., v_n \mapsto a_n, ...]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Клас всіх V-ІМ над A позначимо ${}^{V}\!A$.

Вводимо функцію $asn : {}^{V}\!A \to 2^V$ так:

$asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Операцію $\|_{-x}$ видалення компоненти з іменем x та операцію ∇ накладки задамо таким чином:

$$d\|_{-x} = [v \mapsto a \in d \mid v \neq x];$$

$$\delta \nabla \eta = \eta \cup [v \mapsto a \in \delta \mid v \notin asn(\eta)].$$

Операцію $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n} : {}^{V}\!A \to {}^{V}\!A$ реномінації задаємо так:

$$\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(d) = d \nabla [v_1 \mapsto d(x_1), ..., v_n \mapsto d(x_n)].$$

Замість $y_1,...,y_n$ пишемо також $\bar{y}$.

Операцію реномінації продовжуємо на множини ІМ:

$$\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) = \{\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \mid d \in L\}, \text{ де } L \subseteq {}^{V}A.$$

Введемо відношення $=_{-x}$ рівності з точністю до компоненти з іменем x:

$$d_1 =_{-x} d_2, \text{ якщо } d_1\|_{-x} = d_2\|_{-x}.$$

Послідовне застосування двох операцій $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (зовнішня) та $\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ (внутрішня) можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назвемо згорткою операцій $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{u}}$ і позначатимемо $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \bullet {}_{\bar{y}}^{\bar{u}}$.

Нехай маємо послідовне застосування операцій реномінації $\mathrm{r}_{s_1,...,s_n,z_1,...,z_k}^{v_1,...v_n,u_1,...,u_k}$ та $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_m}^{v_1,...,v_n,w_1,...,w_m}$, де $\{w_1,...,w_m\} \cap \cap \{u_1,...,u_k\} = \varnothing$. Тоді для кожного $d \in {}^{V}A$ маємо:

$$\mathrm{r}_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_m}^{v_1,...,v_n,w_1,...,w_m} \bullet {}_{s_1,...,s_n,z_1,...,z_k}^{v_1,...v_n,u_1,...,u_k}(d) =$$

$$= \mathrm{r}_{x_1,...,x_n,y_1,...,y_m}^{v_1,...,v_n,w_1,...,w_m}(\mathrm{r}_{s_1,...,s_n,z_1,...,z_k}^{v_1,...v_n,u_1,...,u_k}(d)) =$$

$$= \mathrm{r}_{a_1,...,a_n,b_1,...,b_m,z_1,...,z_k}^{v_1,...,v_n,w_1,...,w_m,u_1,...,u_k}(d),$$

де кожні a_i та b_j задаються так:

$$a_i = \begin{cases} x_i, \text{ якщо } x_i \notin \{v_1,...v_n,u_1,...,u_k\}, \\ s_l, \text{ якщо } x_i = v_l \text{ для деякого } v_l, \\ z_l, \text{ якщо } x_i = u_l \text{ для деякого } u_l; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} y_j, \text{ якщо } y_j \notin \{v_1,...v_n,u_1,...,u_k\}, \\ s_l, \text{ якщо } y_j = v_l \text{ для деякого } v_l, \\ z_l, \text{ якщо } y_j = u_l \text{ для деякого } u_l. \end{cases}$$

Під V-квазіарним предикатом на множині A, або V-A-квазіарним предикатом, розуміємо довільну часткову неоднозначну функцію вигляду $P: {}^{V}A \to \to \{T, F\}$. Тут $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Для V-A-квазіарного предиката P задаємо області *істинності* та *хибності*:

$$T(P) = \{d \in {}^{V}A \mid T \in P(d)\};$$

$$F(P) = \{d \in {}^{V}A \mid F \in P(d)\}.$$

Ми трактуємо часткові неоднозначні квазіарні предикати як відношення між ${}^{V}A$ та множиною істиннісних значень $\{T, F\}$. Назвемо їх предикатами реляційного типу, або R-предикатами. Вони формалізують найпростіше уточнення поняття часткового неоднозначного предиката. Клас V-A-квазіарних R-предикатів позначимо PrR_A^V.

Ім'я $z \in V$ (строго) *неістотне* для предиката P, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^{V}A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $P(d_1) = P(d_2)$.

V-A-квазіарний предикат P:

– однозначний, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$;

– тотальний, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^{V}A$;

– всюди невизначений, якщо

$$T(P) = \varnothing \text{ та } F(P) = \varnothing;$$

– тотально насичений, якщо

$$T(P) = {}^{V}A \text{ та } F(P) = {}^{V}A.$$

Всюди невизначений предикат позначаємо як $\perp$, тотально насичений – як $\top$.

Повний образ предиката P на d позначаємо $P[d]$.

Предикат $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ *монотонний*, якщо $d \subseteq h \Rightarrow P[d] \subseteq P[h]$.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Однозначний предикат P *еквітонний*, якщо з умови $P(d)\downarrow$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Для монотонних предикатів маємо: нехай $d \subseteq h$

$$d \in T(P) \Rightarrow h \in T(P) \text{ та } d \in F(P) \Rightarrow h \in F(P).$$

Предикат $P: {}^{V}A \to \{T, F\}$ *антитонний*, якщо $d \subseteq h \Rightarrow P[d] \supseteq P[h]$.

Для антитонних предикатів маємо: нехай $d \subseteq h$

$$h \in T(P) \Rightarrow d \in T(P) \text{ та } h \in F(P) \Rightarrow d \in F(P).$$

Частково впорядкована [4] множина R із відношенням порядку $\leq$ називається:

– замкненою вгору, якщо із $d \in R$ випливає: $h \in R$ для всіх h таких, що $d \leq h$;

– замкненою вниз, якщо із $d \in R$ випливає: $h \in R$ для всіх h таких, що $h \le d$.

У нас $\le$ – це відношення $\subseteq$.

Таким чином.

Твердження 1. Нехай *V-A*-квазіарний предикат *P* монотонний, тоді множини $T(P)$ і $F(P)$ замкнені вгору.

Твердження 2. Нехай *V-A*-квазіарний предикат *P* антитонний, тоді множини $T(P)$ і $F(P)$ замкнені вниз.

Часткові однозначні квазіарні предикати називатимемо *P*-предикатами, тотальні квазіарні предикати – *T*-предикатами, тотальні однозначні квазіарні предикати – *TS*-предикатами. Монотонні *R*-предикати, антитонні *R*-предикати, еквітонні *P*-предикати, антитонні *T*-предикати назвемо відповідно *RM*-предикатами, *RA*-предикатами, *PE*-предикатами, *TA*-предикатами.

Класи *V-A*-квазіарних *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів відповідно позначимо PrP_A^V, PrT_A^V, $PrTS_A^V$. Класи *V-A*-квазіарних *RM*-предикатів, *RA*-предикатів, *PE*-предикатів, *TA*-предикатів відповідно позначимо

$$PrRM_A^V, PrPE_A^V, PrTA_A^V, PrTA_A^V.$$

V-A-квазіарний предикат $\tilde{P}$ назвемо *дуальним* до *V-A*-квазіарного предиката *P*, якщо $T(\tilde{P}) = \sim F(P); F(\tilde{P}) = \sim T(P)$.

Тут $\sim$ – теоретико-множинна операція доповнення.

Прикладом пари взаємно дуальних предикатів є $\perp$ та $\top$.

Задамо відображення дуалізації $\delta : PrR_A^V \to PrR_A^V$ таким чином:

$$\delta(P) = \tilde{P} \text{ для кожного } P \in PrR_A^V.$$

Це означає:

$$T(\delta(P)) = \sim F(P); F(\delta(P)) = \sim T(P).$$

Відображення дуалізації інволютивне: $\delta(\delta(P)) = P$ для кожного $P \in PrR_A^V$.

Теорема 1. Маємо властивості:

Q – *P*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *T*-предикат;

Q – *RM*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *RA*-предикат;

Q – *PE*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *TA*-предикат;

Q – *TS*-предикат $\Leftrightarrow$ $\tilde{Q}$ – *TS*-предикат.

Теорема 2. Маємо властивості:

$$\delta(PrP_A^V) = PrT_A^V,\ \delta(PrT_A^V) = PrP_A^V;$$

$$\delta(PrPE_A^V) = PrTA_A^V,\ \delta(PrTA_A^V) = PrPE_A^V;$$

$$\delta(PrRM_A^V) = PrRA_A^V,\ \delta(PrRA_A^V) = PrRM_A^V;$$
$$\delta(\{\perp\}) = \{\top\},\ \delta(\{\top\}) = \{\perp\};$$

$$\delta(PrR_A^V) = PrR_A^V,\ \delta(PrTS_A^V) = PrTS_A^V.$$

2. Композиційні алгебри квазіарних предикатів

На пропозиційному рівні композиції фактично працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями. Такі композиції називають логічними зв'язками. Основними логічними зв'язками є $\neg$ та $\vee$. Ми будемо використовувати $\neg$, $\vee$, &. Наведемо визначення цих зв'язок через області істинності та хибності відповідних предикатів.

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$, $\&(P, Q)$ традиційно позначаємо $\neg P$, $P \vee Q$, $P \& Q$. Вони задаються так:

$T(\neg P) = F(P)$;

$F(\neg P) = T(P)$;

$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$;

$F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q)$;

$T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q)$;

$F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q)$.

Композиції $\neg$ та $\vee$ назвемо базовими пропозиційними композиціями.

Композиції &, $\to$, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$:

$P \& Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$;

$P \to Q = \neg P \vee Q$;

$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \& (Q \to P)$.

На рівні чистих першопорядкових логік (кванторному рівні) до логічних зв'язок додаємо 1-арні параметричні композиції *реномінації* $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та *квантифікації* $\exists x$, $\forall x$.

Композиція $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ задається так.

Для кожного $d\in{}^{V}\!A$ маємо

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d)=P(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

Композицію $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ можна визначити через області істинності та хибності відповідного предиката:

$$T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))=\{d\mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in T(P)\}=$$

$$=(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(T(P));$$

$$F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))=\{d\mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)\in F(P)\}=$$

$$=(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(F(P)).$$

Композиції $\exists x$ і $\forall x$ задамо через області істинності та хибності предикатів $\exists xP$ і $\forall xP$:

$T(\exists xP)$ = $\{d\in{}^{V}\!A \mid T\in P[d\nabla x\mapsto a]$ для деякого $a\in A\}$;

$F(\exists xP)$ = $\{d\in{}^{V}\!A \mid F\in P[d\nabla x\mapsto a]$ для всіх $a\in A\}$;

$T(\forall xP)$ = $\{d\in{}^{V}\!A \mid T\in P[d\nabla x\mapsto a]$ для всіх $a\in A\}$;

$F(\forall xP)$ = $\{d\in{}^{V}\!A \mid F\in P[d\nabla x\mapsto a]$ для деякого $a\in A\}$.

Композиції $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ – це базові композиції логік кванторного рівня.

Композиція $\forall x$ є похідною:

$\forall xP = \neg\exists x\neg P$.

Результатом послідовного виконання двох композицій $\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ (застосовується першою) та $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (застосовується другою) є їх згортка – композиція реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}$. Вона визначається так: для кожного $d\in{}^{V}\!A$

$$\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)(d)=P(\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{w}}\bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)).$$

Основні властивості композицій реномінації:

– $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P)=\neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\vee Q)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\vee\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\,\&\,Q)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\,\&\,\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$;

– $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P)=\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ за такої умови: $z\in V$ неістотне для P.

Традиційні властивості $\exists x$ та $\forall x$:

– $\exists x\exists yP = \exists y\exists xP$; $\forall x\forall yP = \forall y\forall xP$;

– $\neg\exists xP = \forall x\neg P$; $\neg\forall xP = \exists x\neg P$;

– $\exists x\exists xP = \exists xP$; $\exists x\forall xP = \forall xP$;

– $\forall x\exists xP = \exists xP$; $\forall x\forall xP = \forall xP$;

– $\exists xP\vee\exists xQ = \exists x\,(P\vee Q)$;

– $\forall xP\,\&\,\forall xQ = \forall x\,(P\&Q)$.

Залучаючи до розгляду реномінації, маємо властивості:

– $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists xP)=\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists xP)$;

зокрема: $\mathrm{R}_{y}^{x}(\exists xP)=\exists xP$;

– $\mathrm{R}_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\forall xP)=\mathrm{R}_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\forall xP)$;

зокрема: $\mathrm{R}_{y}^{x}(\forall xP)=\forall xP$;

– $\exists yP=\exists z\mathrm{R}_{z}^{y}(P)$, z неістотне для P;

– $\forall yP=\forall z\mathrm{R}_{z}^{y}(P)$, z неістотне для P;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP)=\exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, де $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\forall yP)=\forall y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, де $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP)=\exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{z}^{y}(P)$, де z неістотне для P, $z\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$;

– $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\forall yP)=\forall z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{z}^{y}(P)$, де z неістотне для P, $z\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

Теорема 3. Композиції $\neg$, $\vee$, &, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$ зберігають однозначність, тотальність, монотонність, антитонність квазіарних предикатів.

Наслідок 1. Класи *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів, *RM*-предикатів, *RA*-предикатів, *PE*-предикатів, *TA*-предикатів замкнені відносно композицій $\neg$, $\vee$, &, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$.

Алгебру $(Pr_A^V, \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\})$, де Pr_A^V – певний клас *V-A*-квазіарних предикатів, назвемо чистою першопорядковою композиційною предикатною алгеброю (алгеброю квазіарних предикатів).

Необхідна умова, щоб клас квазіарних предикатів Pr_A^V утворив алгебру – замкненість щодо операцій алгебри, тобто замкненість класу Pr_A^V щодо композицій $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Надалі будемо розглядати композиційні предикатні алгебри із розширеною множиною базових композицій $CQ = \{\neg, \vee, \&, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x\}$.

В загальному випадку отримуємо алгебру $QR_A^V = (PrR_A^V, CQ)$ *V-A*-квазіарних *R*-предикатів.

Згідно наслідку 1, в алгебрі QR_A^V можна виділити такі підалгебри:

– алгебра *P*-предикатів $QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$,

– алгебра *T*-предикатів $QT_A^V = (PrT_A^V, CQ)$,

– алгебра *RM*-предикатів $QRM_A^V = (PrRM_A^V, CQ)$,

– алгебра *RA*-предикатів $QRA_A^V = (PrRA_A^V, CQ)$,

– алгебра *PE*-предикатів $QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$,

– алгебра *TA*-предикатів $QTA_A^V = (PrTA_A^V, CQ)$,

– алгебра *TS*-предикатів $QTS_A^V = (PrTS_A^V, CQ)$.

Можна також виділити сингулярні підалгебри з 1-елементним носієм

$$\perp_{V\text{-}A} = (\{\perp\}, CQ), \quad \top_{V\text{-}A} = (\{\top\}, CQ).$$

Предикатні алгебри (Pr_1, CQ) та (Pr_2, CQ) дуальні, якщо $\delta(\mathrm{Pr}_1) = \mathrm{Pr}_2$.

Тут δ – відображення дуалізації. Зрозуміло, що тоді $\delta(\mathrm{Pr}_2) = \mathrm{Pr}_1$.

Визначені вище предикатні алгебри утворюють такі дуальні пари:

QP_A^V та QT_A^V, QPE_A^V та QTA_A^V, QRM_A^V та QRA_A^V, $\perp_{V\text{-}A}$ та $\top_{V\text{-}A}$.

Алгебри QR_A^V та QTS_A^V є автодуальними.

3. Квазіарні реляції

Під квазіарною реляцією будемо розуміти [5] довільну $L \subseteq {}^V\!A$.

Квазіарні реляції можна трактувати як області істинності тотальних однозначних квазіарних предикатів. Дуальне трактування квазіарних реляцій – це області хибності таких предикатів.

Для квазіарних реляцій як множин ІМ вводимо традиційні операції: об'єднання $\cup$, перетин $\cap$, доповнення ~.

При трактуванні квазіарних реляцій як областей істинності тотальних однозначних квазіарних предикатів композиціям $\neg$, $\vee$, & для предикатів відповідають операції ~, $\cup$, $\cap$ для областей істинності відповідних предикатів. При дуальному трактуванні квазіарних реляцій як областей хибності зазначених предикатів композиціям $\neg$, $\vee$, & для предикатів відповідають операції ~, $\cap$, $\cup$ для їх областей хибності.

Для квазіарних реляцій вводимо також спеціальні номінативні операції реномінації та квантифікації.

Операція реномінації $\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ індукована відповідною операцією реномінації ІМ $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$:

$$\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) = \{d \in {}^V\!A \mid \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in L\} = (\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(L).$$

Операції квантифікації $\mathcal{E}x$ та $\mathcal{A}x$ індуковані відповідними композиціями квазіарних предикатів $\exists x$ та $\forall x$. Задамо їх так:

$\mathcal{E}x(L) = \{ d \in {}^V\!A | \, d \,\nabla x \mapsto a \in L$ для деякого $a \in A\}$;

$\mathcal{A}x(L) = \{ d \in {}^V\!A \mid d \,\nabla x \mapsto a \in L$ для всіх $a \in A\}$.

При трактуванні L як області істинності деякого предиката P квазіреляції $\mathcal{E}x(L)$ та $\mathcal{A}x(L)$ трактуємо як області істинності предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$. При дуальному трактуванні L як області хибності предиката P

трактуємо $\mathcal{E}x(L)$ та $\mathcal{A}x(L)$ як області хибності предикатів $\forall xP$ та $\exists xP$.

Ім'я $z\in V$ *неістотне* для квазіарної реляції L, якщо для всіх $d_1,\ d_2 \in {}^V A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо: $d_1 \in L \Leftrightarrow d_2 \in L$.

Послідовне застосування двох операцій реномінації можна подати у вигляді однієї, яку назвемо їх згорткою.

Згортка операцій $\rho_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ (застосовується першою) та $\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (застосовується другою) – це операція реномінації, яку позначаємо $\rho_{\bar{y}}^{\bar{w}} \circ_{\bar{x}}^{\bar{v}}$. Ця операція визначається так:

$$\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\rho_{\bar{y}}^{\bar{w}}(L)) = \rho_{\bar{y}}^{\bar{w}} \circ_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) = (\mathrm{r}_{\bar{y}}^{\bar{w}} \bullet_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(L).$$

В класі квазіарних реляцій можна виділити підкласи замкнених вгору квазіарних реляцій та замкнених вниз квазіарних реляцій.

Твердження 3. Нехай V-A-квазіарний предикат P монотонний, тоді множини $T(P)$ і $F(P)$ замкнені вгору.

Твердження 4. Нехай V-A-квазіарний предикат P антитонний, тоді множини $T(P)$ і $F(P)$ замкнені вниз.

Розглянемо властивості квазіарних реляцій.

Для операцій ~, $\cup$, $\cap$ маємо традиційні властивості булевої алгебри множин.

1. Комутативність $\cup$ та $\cap$:

$L\cup M = M\cup L$;

$L\cap M = M\cap L$.

2. Асоціативність $\cup$ та $\cap$:

$(L\cup M)\cup R = L\cup(M\cup R)$;

$(L\cap M)\cap R = L\cap(M\cap R)$.

3. Дистрибутивність $\cup$ відносно $\cap$ та $\cap$ відносно $\cup$:

$(L\cup M)\cap R = (L\cap R)\cup(M\cap R)$;

$(L\cap M)\cup R = (L\cup R)\cap(M\cup R)$.

4. Зняття подвійного заперечення:

$\sim\sim L = L$.

5. Ідемпотентність $\cup$ та $\cap$:

$L = L\cup L$;

$L = L\cap L$.

6. Закони де Моргана:

$\sim(L\cup M) = (\sim M)\cap(\sim L)$;

$\sim(L\cap M) = (\sim M)\cup(\sim L)$.

Можна вважати базовими операції ~ та $\cup$, тоді операція $\cap$ є похідною:

$L\cap M = \sim((\sim M)\cup(\sim L))$.

Властивості номінативних операцій реномінації та квантифікації для квазіарних реляцій індуковані відповідними властивостями квазіарних предикатів.

Для операції реномінації маємо:

– $\rho_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(L) = \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L)$;

– $\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim L) = \sim \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L)$;

– $\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L \cup M) = \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) \cup \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(M)$;

– $\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L \cap M) = \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) \cap \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(M)$;

– $\rho_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(L) = \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L)$ за умови, що $z\in V$ неістотне для L.

Для операцій квантифікації маємо:

– $\mathcal{E}x(\mathcal{E}y(L)) = \mathcal{E}y(\mathcal{E}x(L))$;

– $\mathcal{A}x(\mathcal{A}y(L)) = \mathcal{A}y(\mathcal{A}x(L))$;

– $\sim(\mathcal{E}x(L)) = \mathcal{A}x(\sim(L))$;

– $\sim(\mathcal{A}x(L)) = \mathcal{E}x(\sim(L))$;

– $\mathcal{E}x(\mathcal{E}x(L)) = \mathcal{E}x(L)$;

– $\mathcal{E}x(\mathcal{A}x(L)) = \mathcal{A}x(L)$;

– $\mathcal{A}x(\mathcal{E}x(L)) = \mathcal{E}x(L)$;

– $\mathcal{A}x(\mathcal{A}x(L)) = \mathcal{A}x(L)$;

– $\mathcal{E}x(L)\cup\mathcal{E}x(M) = \mathcal{E}x(L\cup M)$;

– $\mathcal{A}x(L)\cap\mathcal{A}x(M) = \mathcal{A}x(L\cap M)$.

Можна вважати базовою операцію $\mathcal{E}x$, тоді операція $\mathcal{A}x$ є похідною:

$$\mathcal{A}x(L) = \sim \mathcal{E}x(\sim(L)).$$

Для операції реномінації маємо:

– $\mathcal{E}y(L) = \mathcal{E}y(\rho_z^y(L))$,

якщо z неістотне для L;

– $\mathcal{A}y(L) = \mathcal{A}y(\rho_z^y(L))$,

якщо z неістотне для L;

– $\rho^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\mathcal{E}x(L)) = \rho^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\mathcal{E}x(L))$;

зокрема: $\rho^{x}_{y}(\mathcal{E}x(L)) = \mathcal{E}x(L)$;

– $\rho^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\mathcal{A}x(L)) = \rho^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\mathcal{A}x(L))$;

зокрема: $\rho^{x}_{y}(\mathcal{E}x(L)) = \mathcal{E}x(L)$;

– $\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathcal{E}y(L)) = \mathcal{E}y(\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(L))$,

якщо $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

– $\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathcal{A}y(L)) = \mathcal{A}y(\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(L))$,

якщо $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

– $\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathcal{E}y(L)) = \mathcal{E}z(\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z}(L))$,

якщо z неістотне для L, $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

– $\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\mathcal{A}y(L)) = \mathcal{A}z(\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{y}_{z}(L))$,

якщо z неістотне для L, $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$.

4. Алгебри квазіарних реляцій

Носієм алгебри квазіарних реляцій є множина квазіарних реляцій, а множина базових операцій – це $\{\sim, \cup, \cap, \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \mathcal{E}x, \mathcal{A}x\}$, яку позначимо O_{QR}. Зауважимо, що можна брати мінімальну множину базових операцій $\{\sim, \cup, \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \mathcal{E}x\}$, кожна з яких незалежна від інших, проте для зручності та виразності використовуємо саме O_{QR}.

Алгебра квазіарних реляцій – це об'єкт $A_{QR} = (2^{{}^{V}\!A}; O_{QR})$.

Теорема 4. Алгебра A_{QR} ізоморфна алгебрі TS-предикатів $QTS^{V}_{A} = (PrTS^{V}_{A}, CQ)$.

Можна задати два природних ізоморфізми алгебри QTS^{V}_{A} на алгебру A_{QR}:

$\varphi_T : PrTS^{V}_{A} \to 2^{{}^{V}\!A}$, його задаємо умовою $\varphi_T(P) = T(P)$;

$\varphi_F : PrTS^{V}_{A} \to 2^{{}^{V}\!A}$, його задаємо умовою $\varphi_F(P) = F(P)$.

Відображення φ_T зіставляє кожному предикату його область істинності, а відображення φ_F – його область хибності.

Зауважимо, що для тотального однозначного предиката P його області істинності та хибності пов'язані так:

$$T(P) = \sim F(P);\ F(P) = \sim T(P).$$

Для φ_T виконуються умови збереження значення базових операцій:

$\varphi_T(\neg P) = T(\neg P) = F(P) = \sim T(P) = \sim \varphi_T(P)$,

$\varphi_T(P \vee Q) = T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q) =$
$= \varphi_T(P) \cup \varphi_T(Q)$,

$\varphi_T(P \& Q) = T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q) =$
$= \varphi_T(P) \cap \varphi_T(Q)$,

$\varphi_T(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = T(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = (\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}})^{-1}(T(P)) =$
$= \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(T(P)) = \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\varphi_T(P))$,

$\varphi_T(\exists xP) = T(\exists xP) = \mathcal{E}x(T(P)) = \mathcal{E}x(\varphi_T(P))$,

$\varphi_T(\forall xP) = T(\forall xP) = \mathcal{A}x(T(P)) = \mathcal{A}x(\varphi_T(P))$.

Для φ_F теж виконуються умови збереження значення базових операцій:

$\varphi_F(\neg P) = F(\neg P) = T(P) = \sim F(P) = \sim \varphi_F(P)$,

$\varphi_F(P \vee Q) = F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q) =$
$= \varphi_F(P) \cap \varphi_F(Q)$,

$\varphi_F(P \& Q) = F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q) =$
$= \varphi_F(P) \cup \varphi_F(Q)$,

$\varphi_F(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = F(\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}(P)) = (\mathrm{r}^{\bar{v}}_{\bar{x}})^{-1}(F(P)) =$
$= \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(F(P)) = \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\varphi_F(P))$,

$\varphi_F(\exists xP) = F(\exists xP) = \mathcal{A}x(F(P)) = \mathcal{A}x(\varphi_F(P))$,

$\varphi_F(\forall xP) = F(\forall xP) = \mathcal{E}x(F(P)) = \mathcal{E}x(\varphi_F(P))$.

Таким чином, φ_T та φ_F – ізоморфізми алгебри QTS^{V}_{A} на алгебру A_{QR}.

Дія композицій $\neg$, $\vee$, &, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$, $\forall x$ на предикати при відображенні φ_T відповідає дії операцій $\sim, \cup, \cap, \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\mathcal{E}x$, $\mathcal{A}x$ на квазіарні реляції – області їх істинності.

При відображенні φ_F дія композицій $\neg$, $\vee$, &, $\mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\exists x$, $\forall x$ на предикати відповідає дії операцій $\sim, \cap, \cup, \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}$, $\mathcal{A}x$, $\mathcal{E}x$, на квазіарні реляції – області їх хибності.

Для опису алгебр квазіарних реляцій природно використовувати першопорядкову мову із таким алфавітом:

– множина сигнатурних символів $Cs=\{\neg,\vee,\&,R_{\bar{x}}^{\bar{v}},\exists x,\forall x\}$,

– множина Rs символів реляцій,

– множина V предметних імен, в якій виділена нескінченна підмножина $U\subseteq V$ тотально неістотних імен.

Предметні імена $x\in V$ позначають елементи множини базових даних A, сигнатурні символи позначають відповідні операції над реляціями, символи Rs позначають (виділяють) базові реляції в множині квазіарних реляцій.

Формули мови описують побудову складніших реляцій із базових. Дамо індуктивне визначення множини Fr формул:

– $Rs\subseteq Fr$; формули $p\in Rs$ атомарні;

– нехай $\Phi,\Psi\in Fr$, тоді

$$\neg\Phi,\vee\Phi\Psi,\&\Phi\Psi,R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi,\exists x\Phi,\forall x\Phi\in Fr.$$

Інтерпретуємо мову на алгебрах квазіарних реляцій.

Задамо стандартну інтерпретацію, коли квазіарні реляції трактуються як області істинності тотальних однозначних квазіарних предикатів. При такій інтерпретації сигнатурні символи $\neg,\vee,\&$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$ відповідно інтерпретуються як операції $\sim,\cup,\cap,\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}},\mathcal{E}x,\mathcal{A}x$.

Для позначення базових реляцій задаємо тотальне однозначне відображення $I_{RT}:Rs\to2^{{}^VA}$. Далі продовжимо його до відображення $I_{RT}:Fr\to2^{{}^VA}$:

– $I_{RT}(\neg\Phi)=\sim I_{RT}(\Phi)$,

– $I_{RT}(\vee\Phi\Psi)=I_{RT}(\Phi)\cup I_{RT}(\Psi)$,

– $I_{RT}(\&\Phi\Psi)=I_{RT}(\Phi)\cap I_{RT}(\Psi)$,

– $I_{RT}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi))=\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I_{RT}(\Phi))$,

– $I_{RT}(\exists x\Phi)=\mathcal{E}x(I_{RT}(\Phi))$,

– $I_{RT}(\forall x\Phi)=\mathcal{A}x(I_{RT}(\Phi))$.

Задамо тепер дуальну інтерпретацію, коли квазіарні реляції трактуються як області хибності тотальних однозначних квазіарних предикатів. При дуальній інтерпретації сигнатурні символи $\neg,\vee,\&$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$ інтерпретуються відповідно як операції $\sim,\cap,\cup,\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}},\mathcal{A}x,\mathcal{E}x$.

Для позначення базових реляцій задамо тотальне однозначне $I_{RF}:Rs\to2^{{}^VA}$.

Продовжимо його до $I_{RF}:Fr\to2^{{}^VA}$:

– $I_{RF}(\neg\Phi)=\sim I_{RF}(\Phi)$,

– $I_{RF}(\vee\Phi\Psi)=I_{RF}(\Phi)\cap I_{RF}(\Psi)$,

– $I_{RF}(\&\Phi\Psi)=I_{RF}(\Phi)\cup I_{RF}(\Psi)$,

– $I_{RF}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi))=\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I_{RF}(\Phi))$,

– $I_{RF}(\exists x\Phi)=\mathcal{A}x(I_{RF}(\Phi))$,

– $I_{RF}(\forall x\Phi)=\mathcal{E}x(I_{RF}(\Phi))$.

Таким чином, клас тотальних однозначних квазіарних предикатів можна описати як за допомогою композиційних предикатних алгебр, так і за допомогою алгебр квазіарних реляцій. Останнє можна робити двома способами: трактуючи реляції як області істинності предикатів і трактуючи їх як області хибності предикатів.

5. Алгебри бі-квазіарних реляцій

Для задання тотального однозначного квазіарного предиката необхідно вказавати його область істинності або його область хибності, при цьому області істинності та хибності пов’язані за допомогою операції заперечення. При переході до нетотальних чи неоднозначних предикатів ця залежність зникає. Для задання нетотального чи неоднозначного квазіарного предиката необхідно вказувати як область його істинності, так і область хибності.

Дія композицій $\neg,\vee,\&$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$ на квазіарні предикати відповідає дії операцій $\sim,\cup,\cap,\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}},\mathcal{E}x,\mathcal{A}x$ на області їх істинності та дії операцій $\sim,\cap,\cup,\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}},\mathcal{A}x,\mathcal{E}x$ на області їх хибності. Таким чином, дія композиції на квазіарний предикат рівносильна дії відповідної операції та дуальної до неї до двох квазіарних реляцій – області істинності та області хибності.

Побудуємо алгебри, визначені на множинах пар квазіарних реляцій. Назвемо їх алгебрами бі-квазіарних реляцій.

Алгебри бі-квазіарних реляцій мають вигляд $A_{BQR} = (2^{^V A} \times 2^{^V A}; O_{BQR})$, де $O_{BQR} = \{\neg_B, \vee_B, \&_B, R^{\bar{v}}_{\bar{x}\,B}, \exists x_B, \forall x_B\}$ є множиною базових операцій.

Операції $\neg_B, \vee_B, \&_B, R^{\bar{v}}_{\bar{x}\,B}, \exists x_B, \forall x_B$ діють на парах квазіарних реляцій так:

– як операції $\sim, \cup, \cap, \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \mathcal{E}x, \mathcal{A}x$ на першій компоненті пари (стандартно, як операції на областях істинності);

– як операції $\sim, \cap, \cup, \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \mathcal{A}x, \mathcal{E}x$ на другій компоненті пари (дуально, як операції на областях хибності).

Таким чином, на парах квазіарних реляцій визначаємо:

$\neg_B(L, M) = (M, L)$;

$(L, M) \vee_B (R, S) = (L \cup R, M \cap S)$;

$(L, M) \&_B (R, S) = (L \cap R, M \cup S)$;

$R^{\bar{v}}_{\bar{x}\,B}(L, M) = (\rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(L), \rho^{\bar{v}}_{\bar{x}}(M))$;

$\exists_B x\,(L, M) = (\mathcal{E}x(L), \mathcal{A}x(M))$;

$\forall_B x\,(L, M) = (\mathcal{A}x(L), \mathcal{E}x(M))$.

Бі-квазіарна реляція $(L, M) \subseteq {}^V A \times {}^V A$:

– однозначна, якщо $L \cap M = \varnothing$;

– тотальна, якщо $L \cup M = {}^V A$;

– однозначна, якщо $L \cap M = \varnothing$;

– замкнена вгору, якщо L та M замкнені вгору;

– замкнена вниз, якщо L та M замкнені вниз.

Згідно наслідку 1, класи *R*-предикатів, *P*-предикатів, *T*-предикатів, *TS*-предикатів, *RM*-предикатів, *RA*-предикатів, *PE*-предикатів, *TA*-предикатів замкнені відносно композицій $\neg, \vee, \&, \mathrm{R}^{\bar{v}}_{\bar{x}}, \exists x, \forall x$.

Звідси отримуємо.

Теорема 5. Класи однозначних, тотальних, замкнених вгору, замкнених вниз бі-квазіарних реляцій замкнені відносно операцій $\neg_B, \vee_B, \&_B, R^{\bar{v}}_{\bar{x}\,B}, \exists x_B, \forall x_B$.

Таким чином виділяємо наступні класи бі-квазіарних реляцій:

– *SR* – клас однозначних,

– *TR* – клас тотальних,

– *STR* – клас однозначних тотальних,

– *MR* – клас замкнених вгору,

– *AR* – клас замкнених вниз,

– *SER* – клас замкнених вгору однозначних,

– *TAR* – клас замкнених вниз тотальних бі-квазіарних реляцій.

Ми отримуємо наступні підалгебри алгебри A_{BQR}:

$A_{SBQR} = (SR; O_{BQR})$ – алгебра однозначних бі-квазіарних реляцій;

$A_{TBQR} = (TR; O_{BQR})$ – алгебра тотальних бі-квазіарних реляцій;

$A_{STQR} = (STR; O_{BQR})$ – алгебра однозначних тотальних бі-квазіарних реляцій;

$A_{MBQR} = (MR; O_{BQR})$ – алгебра замкнених вгору бі-квазіарних реляцій;

$A_{ABQR} = (AR; O_{BQR})$ – алгебра замкнених вниз бі-квазіарних реляцій;

$A_{SEBQR} = (SER; O_{BQR})$ – алгебра замкнених вгору однозначних бі-квазіарних реляцій;

$A_{TABQR} = (TAR; O_{BQR})$ – алгебра замкнених вниз тотальних бі-квазіарних реляцій.

У випадку *TS*-предикатів області їх істинності та хибності пов'язані за допомогою операції заперечення. Тому всі елементи *STR* мають вигляд $(L, \sim L)$.

Для бі-квазіарних реляцій відображення дуалізації $\delta : 2^{^V A} \times 2^{^V A} \to 2^{^V A} \times 2^{^V A}$ задамо так: $\delta(L, M) = (\sim M, \sim L)$.

Теорема 6. Відображення дуалізації:

1) є автоморфізмом алгебри A_{BQR};

2) є ізоморфізмом алгебр A_{SBQR} та A_{TBQR};

3) є ізоморфізмом алгебр A_{MBQR} та A_{ABQR};

4) є ізоморфізмом алгебр A_{SEBQR} та A_{TABQR};

5) є тотожним автоморфізмом алгебри A_{STQR}.

Твердження п. 5 очевидне.

Доведемо п. 1. Покажемо, що для δ виконуються умови збереження значення базових операцій. Маємо:

$$\delta(\neg_B(L, M)) = \delta(M, L) = (\sim L, \sim M) =$$
$$= \neg_B(\sim M, \sim L) = \neg_B(\delta(L, M));$$

$$\delta((L, M) \vee_B (R, S)) = \delta(L \cup R, M \cap S) =$$
$$= (\sim(M \cap S), \sim(L \cup R)) = (\sim M \cup \sim S, \sim L \cap \sim R) =$$
$$= (\sim M, \sim L) \vee_B (\sim S, \sim R) = \delta(L, M) \vee_B \delta(R, S);$$

$$\delta((L, M) \,\&_B\, (R, S)) = \delta(L \cap R, M \cup S) =$$
$$=(\sim(M \cup S), \sim(L \cap R)) = (\sim M \cap \sim S, \sim L \cup \sim R) =$$
$$= (\sim M, \sim L) \,\&_B\, (\sim S, \sim R) = \delta(L, M) \,\&_B\, \delta(R, S);$$

$$\delta(R_{\bar{x}\,B}^{\bar{v}}(L, M)) = \delta(\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L), \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(M)) =$$
$$= (\sim \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(M), \sim \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L)) = (\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim M), \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\sim L)) =$$
$$= R_{\bar{x}\,B}^{\bar{v}}(\sim M, \sim L) = R_{\bar{x}\,B}^{\bar{v}}(\delta(L, M));$$

$$\delta(\exists_B x\,(L, M)) = \delta(\mathcal{E}x(L), \mathcal{A}x(M)) =$$
$$= (\sim\mathcal{A}x(M), \sim\mathcal{E}x(L)) = (\mathcal{E}x(\sim M), \mathcal{A}x(\sim L)) =$$
$$= \exists_B x\,(\sim M, \sim L) = \exists_B x\,(\delta(L, M));$$

$$\delta(\forall_B x\,(L, M)) = \delta(\mathcal{A}x(L), \mathcal{E}x(M)) =$$
$$= (\sim\mathcal{E}x(M), \sim\mathcal{A}x(L)) = (\mathcal{A}x(\sim M), \mathcal{E}x(\sim L)) =$$
$$= \forall_B x\,(\sim M, \sim L) = \forall_B x\,(\delta(L, M)).$$

Таким чином, δ – автоморфізм алгебри A_{BQR}.

Подібним чином доводимо пп.2–4.

Теорема 7. 1) алгебри A_{BQR} і QR_A^V ізоморфні;

2) алгебри A_{SBQR}, A_{TBQR}, QP_A^V, QT_A^V ізоморфні;

3) алгебри A_{MBQR}, A_{ABQR}, QRM_A^V, QRA_A^V ізоморфні;

4) алгебри A_{SEBQR}, A_{TABQR}, QPE_A^V, QTA_A^V ізоморфні;

5) алгебри A_{STQR} і QTS_A^V ізоморфні.

Твердження п. 5 очевидне.

Доведемо п. 1. Для цього задамо відображення ізоморфізму φ алгебри QR_A^V на алгебру A_{BQR}.

Відображення $\varphi: PrR_A^V \to 2^{{}^V A} \times 2^{{}^V A}$ задаємо наступною умовою:

$$\varphi(P) = (T(P), F(P)).$$

Таке відображення φ зіставляє кожному предикату його область істинності та область хибності.

Покажемо, що для φ виконуються умови збереження значення базових операцій:

$$\varphi(\neg P) = (T(\neg P), F(\neg P)) =$$
$$= (F(P), T(P)) = \neg_B (T(P), F(P)) = \neg_B (\varphi(P));$$

$$\varphi(P \vee Q) = (T(P \vee Q), F(P \vee Q)) =$$
$$= (T(P) \cup T(Q), F(P) \cap F(Q)) =$$
$$= (T(P), F(P)) \vee_B (T(Q), F(Q)) = \varphi(P) \vee_B \varphi(Q);$$

$$\varphi(P \& Q) = (T(P \& Q), F(P \& Q)) =$$
$$= (T(P) \cap T(Q), F(P) \cup F(Q)) =$$
$$= (T(P), F(P)) \,\&_B\, (T(Q), F(Q)) =$$
$$= \varphi(P) \,\&_B\, \varphi(Q);$$

$$\varphi\,(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = (T(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)), F(\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P))) =$$
$$= ((\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(T(P)), (\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(F(P))) =$$
$$= (\rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(T(P)), \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(F(P))) = \rho_{\bar{x}}^{\bar{v}}(T(P), F(P)) =$$
$$= R_{\bar{x}\,B}^{\bar{v}}(T(P), F(P)) = R_{\bar{x}\,B}^{\bar{v}}(\varphi(P));$$

$$\varphi(\exists xP) = (T(\exists xP), F(\exists xP)) =$$
$$= (\mathcal{E}x(T(P)), \mathcal{A}x(F(P))) = \exists_B x\,(T(P), F(P)) =$$
$$= \exists_B x\,(\varphi(P));$$

$$\varphi(\forall xP) = (T(\forall xP), F(\forall xP)) =$$
$$= (\mathcal{A}x(T(P)), \mathcal{E}x(F(P))) = \forall_B x\,(T(P), F(P)) =$$
$$= \forall_B x\,(\varphi(P)).$$

Таким чином, φ – ізоморфізм алгебри QR_A^V на алгебру A_{BQR}.

Подібним чином доводимо пп. 2–4.

Для опису алгебр бі-квазіарних реляцій використовуємо описану вище першопорядкову мову із множиною сигнатурних символів $Cs = \{\neg, \vee, \&, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x\}$.

Інтерпретуємо цю мову на алгебрах бі-квазіарних реляцій таким чином.

Кожну бі-квазіарну реляцію трактуємо як пару множин – область істинності та область хибності певного квазіарного предиката. Сигнатурні символи $\neg$, $\vee$, &, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$, $\forall x$ інтерпретуються відповідно як операції $\neg_B, \vee_B, \&_B, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}{}_B, \exists x_B, \forall x_B$ на множині бі-квазіарних реляцій.

Для позначення базових бі-реляцій задаємо тотальне однозначне відображення $I_{BR} : Rs \to 2^{V_A} \times 2^{V_A}$. Таке I_{BR} далі продовжимо до $I_{BR} : Fr \to 2^{V_A} \times 2^{V_A}$:

– $I_{BR}(\neg\Phi) = \neg_B(I_{BR}(\Phi))$,

– $I_{BR}(\vee\Phi\Psi) = I_{BR}(\Phi) \vee_B I_{BR}(\Psi)$,

– $I_{BR}(\&\Phi\Psi) = I_{BR}(\Phi) \&_B I_{BR}(\Psi)$,

– $I_{BR}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}{}_B(I_{BR}(\Phi))$,

– $I_{BR}(\exists x\Phi) = \exists_B x(I_{BR}(\Phi))$,

– $I_{BR}(\forall x\Phi) = \forall_B x(I_{BR}(\Phi))$.

Таким чином, класи квазіарних предикатів можна описати як за допомогою композиційних предикатних алгебр, так і за допомогою алгебр бі-квазіарних реляцій. Кожна бі-квазіарна реляція визначає область істинності та область хибності квазіарного предиката.

Висновки

В роботі побудовано та досліджено низку алгебр квазіарних реляцій (відношень), розглянуто їх зв'язки із алгебрами квазіарних предикатів. На множині всіх квазіарних реляцій природним чином задаються булеві операції об'єднання, перетину, доповнення, а також спеціальні номінативні операції реномінації та квантифікації. Встановлено ізоморфізм алгебри квазіарних реляцій та першопорядкової алгебри тотальних однозначних квазіарних предикатів.

Побудовано алгебри бі-квазіарних реляцій, задані на множинах пар квазіарних реляцій. Визначено та досліджено різні підкласи таких алгебр. Встановлено ізоморфізми алгебри бі-квазіарних реляцій і алгебри квазіарних предикатів; ізоморфізми алгебр однозначних, тотальних, тотальних однозначних бі-квазіарних реляцій та алгебр часткових однозначних, тотальних, тотальних однозначних квазіарних предикатів; ізоморфізми алгебр замкнених вгору, замкнених вниз, замкнених вгору однозначних, замкнених вниз тотальних бі-квазіарних реляцій та алгебр монотонних, антитонних, однозначних еквітонних, тотальних антитонних квазіарних предикатів.

1. *Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л.* Алгебра, языки, программирование. – К.: Наукова думка, 1974. – 328 с.
2. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Математична логіка та теорія алгоритмів. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Прикладна логіка. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
4. *Birkhoff G.* Lattice theory. – Amer. Math. Soc., 1967. – 418 p.
5. *Нікітченко М.С., Шкільняк С.С.* Алгебри квазіарних відношень // Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development (TAAPSD'2014): 11th international conference: proceeding. – К., 2014. – С. 174–181.

References

1. *Glushkov V., Ceytlin G., Yuschenko E.* (1974). Algebras, languages, programming. – Kyiv: Naukova dumka (in Russian).
2. *Nikitchenko M., Shkilniak S.* (2008). Mathematical logic and theory of algorithms. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in Ukrainian).
3. *Nikitchenko M. and Shkilniak S.* (2013). Applied logic. – Kyiv: VPC Kyivskyi Universytet (in Ukrainian).

4. *Birkhoff G.* (1967) Lattice theory. Amer. Math. Soc., 1967.
5. *Nikitchenko M. and Shkilniak S.* (2014). Algebras of quasiary relations. In Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development (TAAPSD'2014): 11th international conference: proceeding. – Kyiv. P. 174–181 (in Ukrainian).

Одержано 09.11.2015

Про авторів:

Нікітченко Микола Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, завідувач кафедри теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій –
понад 200, у тому числі у фахових
виданнях – 100.
Кількість наукових публікацій в
іноземних виданнях – 30.
Індекс Гірша – 8 (6 з 2010).
http://orcid.org/0000-0002-4078-1062.

Шкільняк Степан Степанович,
доктор фізико-математичних наук,
професор, професор кафедри теорії
та технології програмування.
Кількість наукових публікацій –
понад 200,
у тому числі у фахових виданнях – 90.
Кількість наукових публікацій в
іноземних виданнях – 14.
Індекс Гірша – 4 (3 з 2010).
http://orcid.org/0000-0001-8624-5778.

***Місце роботи авторів*:**

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
01601, Київ, вул. Володимирська, 60.
Тел.: (044) 259 0519,
(044) 522 0640 (д).
E-mail: ttp@unicyb.kiev.ua