

ЕВОЛЮЦІЙНІ ІГРИ В ТСП МЕРЕЖАХ З ПОЛІТИКАМИ ОБМЕЖЕННЯ ШВИДКОСТІ

Із розвитком комп'ютерних мереж і їх популяризацією, питання збереження і забезпечення їх ефективної роботи виходить на перший план. Користувачі мережі, які мають змогу впливати на обмін даними змінюючи реалізації протоколів обміну даними, створюють проблему досягнення справедливого поділу мережевих ресурсів. В даній роботі досліджується можливість співіснування різних реалізацій протоколів, які користувачі можуть змінювати з метою підвищення власної пропускної спроможності. За допомогою теорії ігор визначаються критерії існування станів рівноваги, за яких різні реалізації протоколів можуть співпрацювати і забезпечувати необхідний рівень пропускної спроможності для користувачів, а за яких певна реалізація домінуватиме над іншою.

Ключові слова: теорія ігор, рівновага Неша, еволюційні ігри, еволюційно-стабільна стратегія, динамічне відтворення.

Вступ

Конкурентний розвиток різних версій мережевих протоколів є невід'ємною частиною розвитку комп'ютерних мереж. Найбільш вживаним протоколом на сьогодні є протокол ТСП. Ядром протоколу є механізм керування переповнення, який контролює передачу пакетів у залежності від завантаженості вузьких місць мережі, при їх спільному використанні численними користувачами. Ідея керування переповненням досить проста: збільшити швидкість, якщо мережа недовантажена, або зменшити швидкість, якщо вона перевантажена. Момент зміни швидкості визначається на основі інформації, яку користувач може отримати про те, чи дійшов його пакет (за допомогою пакетів підтвердження АСК), або про те, що мережа перевантажена (якщо він не отримає підтвердження протягом певного часу).

На даний час вже створена велика кількість реалізацій протоколу ТСП ([1]), що відрізняються між собою різними підходами до реалізації механізму керування переповненням. Розвиток ТСП відбувається шляхом вдосконалення існуючих його реалізацій, а також через відмову від деяких з них і появу нових реалізацій. Можливість застосування нових версій протоколу дає користувачеві змогу підвищити швидкість передачі даних за допомогою вибору відповідного алгоритму реалізації ТСП. У ситуаціях, коли багато користувачів намагаються досягти більш високої

швидкості передачі даних, передбачити наслідки такої їх взаємодії буває непросто. Це приводить до необхідності рішення проблем забезпечення стабільної та ефективної роботи комп'ютерної мережі і справедливого поділу ресурсів між її раціональними користувачами в умовах їх динамічної конкурентної взаємодії.

Огляд наукових праць. З активізацією використання інтернету, а також з появою мобільних пристроїв та набуттям широкої популярності бездротовими мережами, необхідність у рішенні даної проблеми надихає вчених в усьому світі на віднаходження нових методів для забезпечення ефективності функціонування комп'ютерних мереж.

Природнім шляхом до рішення є застосування теорії ігор при розгляді взаємодії користувачів у мережі [2–6].

Деякі автори [2] базуючись на теорії ігор пропонують впровадити планувальники та менеджери черг, які «карають» ТСП-потоки, що порушують принципи керування переповненням.

У роботі [3] пропонується засновані на теоретико-ігровому підході протоколи, які, базуючись на даних, що отримують користувачі, дозволяють динамічно змінювати значення функції ціни передачі повідомлень, що дає змогу адаптивно змінювати швидкість передачі, щоб досягти рівноваги Неша у передачі пакетів.

Роботи [4–6] присвячені визначенню еволюційно-стабільної стратегії (ЕСС) для користувачів при пересилці даних. ЕСС [7] є поняттям з теорії еволюційних ігор, що визначається як стратегія (чиста або змішана), при дотриманні якої пропозиції популяцій не змінюються у часі і вони захищені від нападу інших малих популяцій. Під популяцією, в контексті комп'ютерних мереж, мається на увазі група гравців – користувачів мережі, а стратегія – певна реалізація протоколу ТСП. У роботах [5, 6] наводиться модель еволюційної гри «Яструб-Голуб» і за допомогою рівняння динамічної рівноваги визначаються умови існування ЕСС при взаємодії популяцій, що використовують алгоритм адитивне збільшення / мультиплікативне зменшення (АЗМЗ) з різними параметрами.

Постановка задачі

Розглянуті роботи хоч і охоплюють широке коло шляхів до застосування теорії ігор при моделюванні роботи протоколу ТСП в комп'ютерних мережах, але не розглядають випадки, коли маршрутизатори використовують не тривіальну політику обслуговування пакетів. Мова йде не про політику «покарання», описану в роботі [2], а про політику маршрутизатора, коли він обмежує максимальну швидкість потоків за певним законом.

У даній роботі досліджується існування точки рівноваги при взаємодії ТСП-потоків, що реалізують алгоритм АЗМЗ, у вузькому місці мережі, тоді, коли маршрутизатор обмежує їх максимальну швидкість. Зокрема, розглядаються випадки, коли маршрутизатор обмежує швидкість потоків у певному сталому співвідношенні (лінійно) і на певну сталу величину.

Математична модель

На сьогодні в протоколах ТСП використовуються кілька алгоритмів для керування переповненням. Це такі алгоритми, як АЗМЗ та мультиплікативне збільшення/мультиплікативне зменшення (МЗМЗ), а також їх варіація – адитивне збільшення/адитивне зменшення (АЗАЗ). Алгоритм мультиплікативне збільшен-

ня/адитивне зменшення практично не використовується, оскільки він дуже погано забезпечує керування переповненням, адже при його використанні вікно швидко зростає й повільно падає, що призводить до багатьох послідовних втрат пакетів, поки вікно зменшуватиметься. АЗАЗ дещо кращий, але й він недостатньо швидко зменшує вікно переповнення. МЗМЗ наразі використовується для забезпечення з'єднань через канали високої швидкості. Оскільки можливість таких каналів значно більша за інші, повільний зріст вікна переповнення призводить до неефективного їх використання. Хоча МЗМЗ й забезпечує необхідну швидкість зростання вікна, але він не забезпечує справедливого поділу каналу між з'єднаннями.

За час розробки різних версій протоколу ТСП стало зрозуміло, що саме алгоритм АЗМЗ забезпечує гарний рівень керування переповненнями, оскільки за такого алгоритму вікно зростає повільно і спадає швидко, що дає змогу швидше повертати вікно до розміру, за якого не виникає втрат пакетів, а після зменшення вікна – довше уникати нових втрат пакетів, а також забезпечує справедливий поділ каналу між різними з'єднаннями. Даний алгоритм можна записати у вигляді наступної системи:

$$cwnd(t+1) =$$

$$= \begin{cases} cwnd(t) + \alpha, & \text{поки нема} \\ & \text{переповнення} \\ cwnd(t) \times \beta, & \text{при втраті пакету} \end{cases} \quad (1)$$

де $cwnd(t)$ – вікно переповнення у час t , α – величина, на яку збільшується вікно переповнення, β – коефіцієнт, який визначає у скільки разів зменшиться вікно переповнення після втрати пакету. Причому α і β мають наступні обмеження:

$$0 \leq \beta < 1, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

Чому саме алгоритм АЗМЗ такий цікавий з точки зору теоретико-ігрового підходу моделювання взаємодії користувачів, що поділяють спільний канал? Для того, щоб відповісти на це питання, покажемо, що алгоритм АЗМЗ утворює неру-

хому точку, яка відповідає рішенням «гри» між з'єднаннями – рівновазі за Нешем.

Модель мережі. Нехай є топологія мережі, показана на рис. 1. В даній мережі 2 користувачі відкривають TCP-з'єднання, що реалізують алгоритм АЗМЗ для керування переповненням, з сервером і надсилають до нього якісь дані. Пропускна спроможність каналу C між сервером і маршрутизатором менша, ніж сумарна пропускна спроможність каналів від першого і другого користувачів до маршрутизатора, що забезпечує заповнення буфера маршрутизатора пакетами, що очікуватимуть обробки, і їх відкидання в разі його переповнення. Політика маршрутизатора для відкидання пакетів – «відкидання з хвоста» (droptail), тобто якщо буфер, до якого надходить новий пакет, переповнений, тоді новий пакет відкидається. Причому відкидання відбувається для обох з'єднань одночасно, тобто додатково відкидається пакет другого з'єднання, що знаходиться у буфері (така поведінка спостерігалась у роботі [8]). Нехай пріоритети у з'єднань рівні (пріоритетність відсутня). Окрім цього, модель задовольняє умовам, визначеним у роботі [4].

За визначених умов, поділ спільного каналу між користувачами має обмеження, графічно показані на рис. 2.

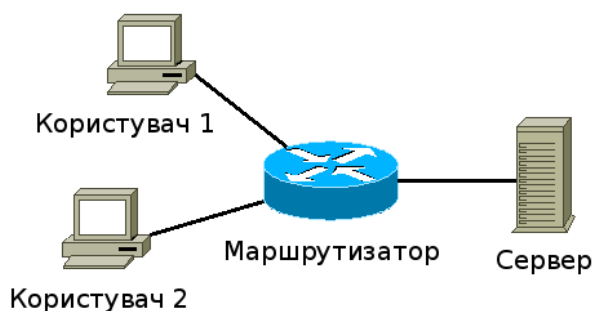


Рис. 1. Модель мережі

Геометричне доведення теореми про нерухому точку для АЗМЗ. Якщо роздивитись поділ каналу TCP-з'єднаннями, що використовують АЗМЗ з параметрами (α_1, β_1) та (α_2, β_2) для керування переповненням, в описаній моделі, який спостерігається в роботі [6] (рис. 2), то можна зробити припущення, що через певний час

поділ каналу між користувачами стабілізується і користувачі поділяють канал між собою пропорційно до параметрів АЗМЗ.

Нехай множина $X \in \mathbb{R}^2$ – це множина всіх можливих значень швидкостей (або величини вікна переповнення) двох з'єднань, що поділяють спільний канал. Вона обмежена трикутником $0CC$, зображеним на рис. 2, тож очевидно, що вона є опуклою множиною. Нехай функція d – функція, що визначає відстань між двома точками множини X . Тоді (X, d) – це метричний простір.

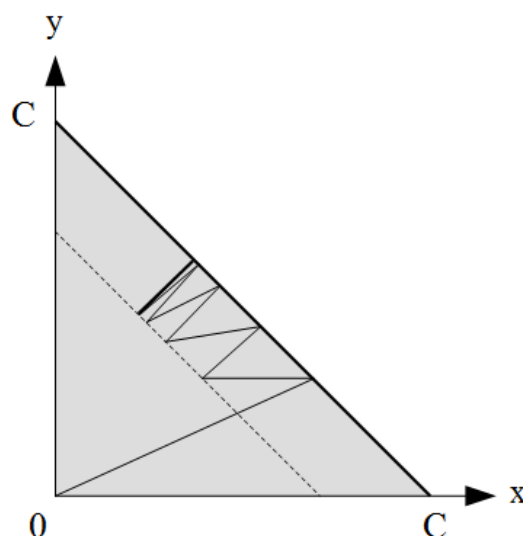


Рис. 2. Обмеження швидкості та поділ каналу між двома з'єднаннями

Згідно з теоремою Банаха про нерухому точку, в n -мірному повному метричному просторі $B^n \in \mathbb{R}^n$, в якому існує стискаюче відображення $f : B^n \rightarrow B^n$, існує єдина нерухома точка, така що $f(x) = x$. Нехай $f(x)$ – це перетворення, яке відбувається за один цикл роботи алгоритму АЗМЗ, що визначається системою (1). В такому разі для того, щоб довести, що даний алгоритм збігається до нерухомої точки, достатньо показати, що функція $f(x)$ є стискаючою. Покажемо спочатку це для розглянутої моделі (двовимірного випадку), тобто для X .

Стискаючою функція називається функція f , для якої виконується наступна умова:

$$d(f(x_1), f(x_2)) < \chi d(x_1, x_2),$$

де $\chi: 0 \leq \chi < 1$ – коефіцієнт стискання, x_i – деяка точка метричного простору X .

Перепишемо систему (1) у вигляді відображення точок прямої C_1C_2 ($C_1(0, C)$, $C_2(C, 0)$) (рис. 3) у саму себе:

$$f: x \rightarrow \beta x + \alpha t, \quad (3)$$

де x та $\beta x + \alpha t$ – точки відрізка C_1C_2 , $t: \min \{t \geq 0: \beta x + \alpha t \in C\}$, а β і α можуть бути записані у наступному вигляді:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Відображення (3), згідно із визначенням і враховуючи обмеження на β і α , є відображенням $f: C \rightarrow C$, і є неперервним, оскільки є комбінацією неперервних лінійних відображень.

Нехай $\beta_1 \geq \beta_2$ (якщо ж $\beta_2 > \beta_1$, то можемо поміняти індекси з'єднань, щоб розглядати випадок, коли $\beta_1 \geq \beta_2$). Нехай маємо дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, які належать відрізу C_1C_2 . Подіємо на ці точки перетворенням βx . Перед цим представимо β у вигляді наступної комбінації перетворень:

$$\beta = \beta_1 \cdot I \cdot \beta' = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta_2/\beta_1 \end{pmatrix}.$$

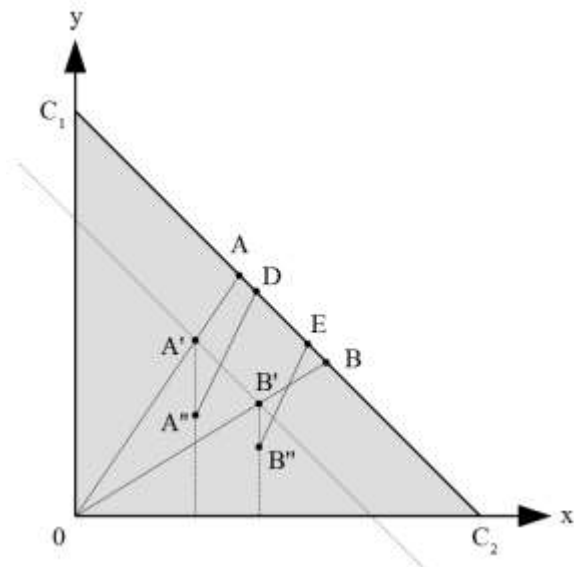


Рис. 3. Перетворення АЗМЗ для точок A і B

Спочатку подіємо на точки A і B перетворенням $\beta_1 I$. В результаті отримаємо дві нові точки A' і B' , які лежать на прямій, паралельній прямій C_1C_2 , оскільки координати цих точок були зменшені в однакову кількість разів, рівну β_1 . Тепер подіємо на точки A' і B' перетворенням β' і отримаємо точки A'' і B'' . Оскільки в матриці β' одне зі значень рівне 1, то одна координата (x_i) кожної з точок не зміниться, а друга (y_i) зменшиться у величину $\beta_1/\beta_2 \leq 1$. Якщо на отримані точки подіяти перетворенням αt , то ми отримаємо нові точки D та E , що належатимуть прямій $x + y = C$ (назвемо її c), а саме відрізу C_1C_2 , оскільки $\alpha_i > 0$, відповідно й напрям вектора α лежить у межах кута $(0, \pi/2)$.

Для того щоб показати, що відображення (3) є стискаючим, достатньо показати, що $d(AB) > d(DE)$. Очевидно, що $d(A'B') < d(AB)$ для $\forall \beta_1 < 1$. Оскільки пряма c , на якій лежить відрізок AB , та відрізок $A'B'$ паралельні, і перетворення αt є паралельною проекцією, то довжина відрізка утвореного цим перетворенням, прикладеним до A' і B' , рівна довжині для $\forall \alpha_i > 0$. t' має ті ж властивості, що і t , але в прикладенні до точок A' і B' .

А оскільки $d(A''B'') \leq d()$, причому одна координата – не змінюється, то можна зробити висновок, що відрізок DE , отриманий внаслідок прикладення перетворення αt до відрізка $A''B''$, буде не більшим за відрізок $A'B'$. Таким чином маємо наступну нерівність, яка й доводить, що перетворення (3) є стискаючим:

$$d(DE) \leq d(A'B') < d(AB). \quad (4)$$

Аналітичне доведення теореми про нерухому точку для АЗМЗ. Довести те, що нерухома точка для відображення (3) у X існує, причому існує єдина, можна й аналітично, за допомогою протиріччя.

Нехай маємо дві точки $x_1^*, x_2^* \in C$, $x_1^* \neq x_2^*$, $x_1^*: \beta x_1^* + \alpha t_1 = x_1^*$, $x_2^*: \beta x_2^* + \alpha t_2 =$

$= x_2^*$, тобто такі, що при перетворенні (3) переходять самі у себе, а відповідно є нерухомими. Нехай є деяка точка $y = \lambda x_1^* + (1 - \lambda)x_2^*$ – деяка точка з відрізка $x_1^* x_2^*$. Застосуємо відображення (3) до точки y :

$$\begin{aligned} f(y) &= \beta y + \alpha y = \\ &= \beta(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2^*) + \alpha y. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо C записати як $\lambda C + (1 - \lambda)C$, а t_y розписати за формулою

$$T_n = \frac{C - \beta_1 y_n - \beta_2 z_n}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

то отримаємо наступне значення:

$$\begin{aligned} t_y &= \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2} (\lambda C + (1 - \lambda)C - \\ &- \beta_1(\lambda(x_1^*)_1 + (1 - \lambda)(x_2^*)_1) - \\ &- \beta_2(\lambda(x_1^*)_2 + (1 - \lambda)(x_2^*)_2)), \end{aligned}$$

яке після рівноцінних перетворень прийме вигляд

$$t_y = \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2. \quad (6)$$

Підставивши значення (6) у формулу (5) і виконавши рівноцінні перетворення, отримаємо наступне рівняння:

$$f(y) = \lambda(\beta x_1^* + \alpha t_1) + (1 - \lambda)(\beta x_2^* + \alpha t_2) = y,$$

що можливо лише у випадку, коли всі $\beta = 1$ і всі $\alpha = 0$. А це протирічить умові.

Доведення теореми про нерухому точку для АЗМЗ для будь-якого скінченного числа з'єднань. Розглянемо модель, описану у попередньому пункті, але тепер для N з'єднань. Довести, що при взаємодії N ТСП-з'єднань, що реалізують АЗМЗ, існує єдина нерухома точка, можна аналогічно з доведенням для випадку двовірного простору.

Для N з'єднань швидкість надсилання даних обмежена простором X^n , який має обмеження $x_i > 0$ і $\sum_{i=1}^N x_i \leq C$, де

x_i – швидкість i -го з'єднання. β і α можуть бути записані у наступному вигляді:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Якщо, як і раніше, взяти дві довільні точки A і B , що належать $\sum_{i=1}^N x_i \leq C$, розмістити β_i у порядку зменшення зі збільшенням індексу, розкласти β у вигляді добутку $\beta_1 I \beta'$, і послідовно виконати відображення $\beta_1 I$, β' та α , то ми отримаємо точки D та E , причому такі, що відповідатимуть умові (4). Це досягається завдяки тому, що перетворення $\beta_1 I$ зменшить довжину відрізка AB , а β' та α не збільшать довжину відрізка отриманого внаслідок дії $\beta_1 I$.

Модель з лінійним обмеженням швидкості. Модель, розглянута у роботі [5], описує взаємодію двох ТСП-з'єднань, що реалізують АЗМЗ, у каналі з пропускною спроможністю C . Політика маршрутизатора така, що сумарна швидкість пересилки даних обома з'єднаннями не перевищує C й обмеження швидкості може бути записане як $x + y \leq C$. У попередньому пункті ми обґрунтували існування рівноваги за Нешем у такій моделі. Але чи існувала би рівновага, якби політика маршрутизатора була іншою? Якби він обмежував швидкість для деяких з'єднань, чи сприяв іншим? Для відповіді на це питання розглянемо модифікації описаної моделі.

Модифікуємо модель, визначивши політику маршрутизатора параметричним рівнянням:

$$\delta_1 x + \delta_2 y \leq C,$$

де δ_i – додатній параметр обмеження швидкості пересилки пакетів для i -го

з'єднання. Слід зазначити, що $\delta_i \geq 1$, оскільки в іншому випадку (коли $0 < \delta_i < 1$) можлива ситуація, коли фактичне значення швидкості пересилки даних з'єднанням буде більшим за пропускну спроможність C , що є неможливим.

Зазначена політика маршрутизатора певною мірою відповідає визначенню «пріоритетів» для різних з'єднань. Це не є тим пріоритетом, який вказується в сегментах протоколу ТСП, але така політика дозволяє зменшити швидкість надсилання даних для з'єднань ТСП, що реалізують АЗМЗ. Ситуації, коли деяке $\delta_i > 1$, відповідають політиці обмеження швидкості пересилки пакетів деякого з'єднання. Якщо обидва $\delta_i > 1$, то частина пропускну здатності взагалі не використовуватиметься даними з'єднаннями, що можливо коли, наприклад, частина спільного каналу була зарезервована для виділених каналів, які потребують певного постійного значення пропускну спроможності. Приклад поділу каналу між з'єднаннями показано на рис. 4.

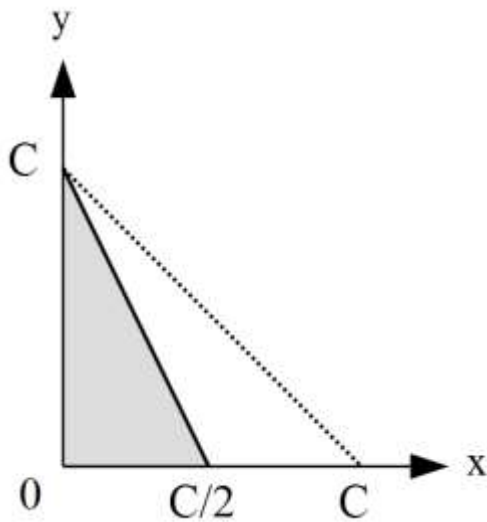


Рис. 4. Обмеження пропускну спроможності для з'єднань з лінійним обмеженням швидкості ($\delta_1 = 2, \delta_2 = 1$)

Доведення існування нерухомої точки для моделі з лінійним обмеженням швидкості. У випадку, коли пряма C_1C_2 була зміщена відповідно до параметрів δ_1 і δ_2 (рис. 5), нерухома точка теж існує і вона єдина. Доведення аналогічне

до геометричного доведення, наведеного вище.

Після того, як β_i розташовані у порядку спадання, й до точок A і B що належать $\delta_1x + \delta_2y = C$, застосовано відображення β_1I , будуть отримані точки A' і B' , причому виконується права частина нерівності (4). При застосуванні перетворення αt на до точок A'' і B'' , отриманих після застосування перетворення β' на точках A' і B' виконуватиметься й ліва частина нерівності (4).

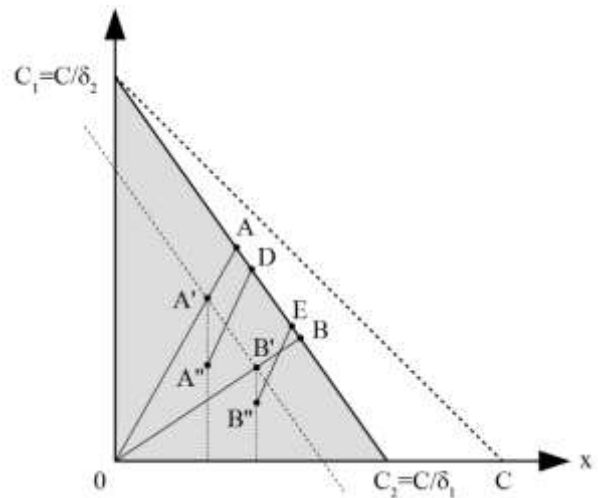


Рис. 5. Перетворення АЗМЗ для точок A і B (для моделі з лінійним обмеженням швидкості)

Матрична гра та функція корисності для моделі з лінійним обмеженням швидкості. Сформулюємо для описаної моделі умови гри «Яструб-Голуб» (рис. 6).

Оскільки рівняння прямої, що обмежує швидкість з'єднань у вузькому місці мережі змінилось, маємо записати нову формулу для функції корисності, що враховує параметри δ_1 і δ_2 . Запишемо рівняння для відображення АЗМЗ в даній моделі:

$$C = \delta_1x_n + \delta_2y_n = \delta_1x_{n+1} + \delta_2y_{n+1} = \delta_1(\beta_1x_n + \alpha_1T_n) + \delta_2(\beta_2y_n + \alpha_2T_n). \quad (7)$$

За допомогою (6) можна записати нову формулу для визначення часу до відкидання пакетів маршрутизатором:

$$T_n = \frac{C - \beta_1 x_n \delta_1 - \beta_2 y_n \delta_2}{\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2}.$$

Гравець 2

		Н	D
Гравець 1	Н	$J(H,H)$	$J(D,H)$
	D	$J(H,D)$	$J(D,D)$

Рис. 6. Біматрична гра “Яструб-Голуб”

Тепер можемо записати значення швидкості пересилки даних першим з’єднанням у момент часу перед $n+1$ -м відкиданням пакету x_{n+1} – (значення для y_{n+1} знаходиться аналогічно):

$$x_{n+1} = \beta_1 x_n + \alpha_1 T_n = q x_n + \frac{\alpha_1 C \bar{\beta}_2}{\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2},$$

$$q = \frac{\alpha_1 \delta_1 \beta_2 + \alpha_2 \delta_2 \beta_1}{\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2}, \quad \bar{\beta}_i = 1 - \beta_i.$$

Якщо таким же чином розписати x_n через x_{n-1} , а його через x_{n-2} і т. д., то отримаємо наступне значення x_n для довільного n :

$$x_n = q^n x_0 + \frac{\alpha_1 C \bar{\beta}_2}{\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2} \cdot \frac{(1 - q^n)}{(1 - q)}.$$

Тоді формули для знаходження середнього значення для x і T можуть бути записані наступним чином:

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\alpha_1 C \bar{\beta}_2}{\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2} \cdot \frac{1}{(1 - q)} = \frac{\alpha_1 C \bar{\beta}_2}{\alpha_1 \delta_1 \beta_2 + \alpha_2 \delta_2 \beta_1}.$$

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{C \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2}{\alpha_1 \delta_1 \beta_2 + \alpha_2 \delta_2 \beta_1}.$$

Значення функції корисності може бути розраховане за формулою:

$$J_i = K (Thp_i - \lambda R), \quad (8)$$

де K – коефіцієнт збільшення значення корисності, Thp_i – швидкість надсилання пакетів, λ – коефіцієнт чутливості до втрати пакетів, $R = 1 / T$ – швидкість втрати пакетів.

Для визначення значення функції корисності для даної моделі залишилось визначити значення Thp :

$$Thp_1 = \frac{\bar{x} + \beta_1 \bar{x}}{2} = \frac{1 + \beta_1}{2} \cdot \frac{\alpha_1 C \bar{\beta}_2}{\alpha_1 \delta_1 \beta_2 + \alpha_2 \delta_2 \beta_1}.$$

Хоча всі формули розглядають модель відносно x , але для y всі значення розраховуються аналогічно. Отримані середні значення Thp та T , можна використовувати у формулі (8) для визначення функції корисності для кожного з’єднання.

Критерії існування ЕСС для моделі з лінійним обмеженням швидкості. Критеріями існування ЕСС для даної моделі за визначених умов будуть наступні значення:

$$\mu_1 = \frac{C^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 (\beta_1 - \beta_2)}{8(\alpha_1 \delta_1 \beta_2 - \alpha_2 \delta_2 \beta_1)},$$

$$\mu_2 = \frac{C^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2}{4\delta_1 (\alpha_1^2 \delta_1^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2 \delta_2^2 \beta_1^2)} (\alpha_1 \delta_1 \bar{\beta}_2 (1 + \beta_1) + \alpha_2 \bar{\beta}_1 (\delta_2 - 2\delta_1 + \delta_2 \beta_1 - 2\delta_1 \beta_2)),$$

для чистих стратегій та

$$\mu_1 = \frac{C^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2}{4\delta_1 (\alpha_1^2 \delta_1^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2 \delta_2^2 \beta_1^2)} (\alpha_1 \delta_1 \bar{\beta}_2 (1 + \beta_1) + \alpha_2 \bar{\beta}_1 (\delta_2 - 2\delta_1 + \delta_2 \beta_1 - 2\delta_1 \beta_2)),$$

$$\mu_2 = \frac{C^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2}{4\delta_2 (\alpha_1^2 \delta_1^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2 \delta_2^2 \beta_1^2)} (\alpha_1 \bar{\beta}_2 (2\delta_2 - \delta_1 + 2\delta_2 \beta_1 - \delta_1 \beta_2) - \alpha_2 \delta_2 \bar{\beta}_1 (1 + \beta_2))$$

для змішаних.

Модель зі сталим обмеженням швидкості. Більш реальною, в порівнянні з попередньою, є політика маршрутизатора

за сталим обмеженням швидкості, тобто обмеження певною константною величиною. Така політика застосовується в бездротових мережах для обмеження швидкості особливо агресивних з'єднань. Це робиться для того, щоб маршрутизатор не був зайнятий обробкою даних лише одного з'єднання, а, в певній мірі, справедливо обслуговував всі з'єднання, чії дані проходять через нього.

Знов модифікуємо модель, визначену вище. Нехай x^* та y^* обмеження швидкості для кожного з двох з'єднань (тобто їх максимальна швидкість не може перевищувати ці обмеження). Тоді політика маршрутизатора може бути записана наступним чином:

$$x + y \leq C, x \leq x^*, y \leq y^*$$

або в іншій формі:

$$x + y \leq \min\{x^* + y, C, x + y^*\}.$$

Графічно така політика маршрутизатора показана на рис. 7.

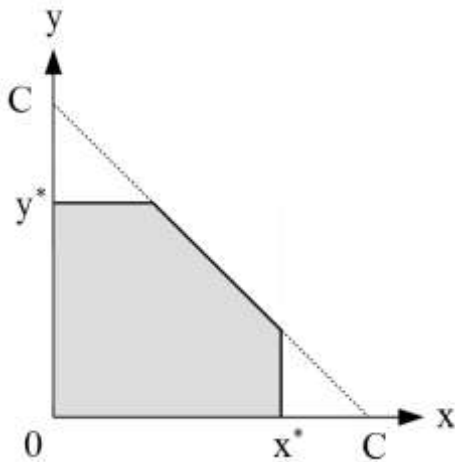


Рис. 7. Обмеження максимальної швидкості передачі даних з'єднаннями за допомогою констант

Доведення існування нерухомої точки для моделі зі сталим обмеженням швидкості. Оскільки границя області допустимих значень швидкостей з'єднань у моделі зі сталим обмеженням швидкості визначається не однією прямою, доведення того, що відображення АЗМЗ стискаюче для такого випадку складніше. Для даної

моделі множина X обмежена прямими $x = 0, x = x^*, y = 0, y = y^*$ та $x + y = C$.

Якщо розглянути окремо три області, утворені поділом множини X променями j та h з рис. 8, то для кожної окремо довести що перетворення АЗМЗ є стискаючим досить просто, й аналогічно до доведення для моделі без обмежень. Покажемо, що для критичних випадків, такого як відображення точок A і B , що лежать на різних прямих, відображення (3) все ще є стискаючим.

Після того, як на точки A і B подібно відображенням $\beta_1 I$, отримані точки A' і B' . Нехай промінь j перетинається з прямими $x = x^*$ і $x + y = C$ у точці J , а з прямими $x = \beta_1 x^*$ (на якій лежить A') і $x + y = \beta_1 C$ (на якій лежить B') у точці J' . Оскільки $0A, j$ та $0B$ – промені, а прямі $x = x^*$ і $x = \beta_1 x^*$ паралельні, та прямі $x + y = C$ і $x + y = \beta_1 C$ – паралельні, то за властивістю променів, що випущені з однієї точки й перетинають паралельні прямі, можна сказати, що $d(A'J') < d(AJ)$ і $d(B'J') < d(BJ)$.

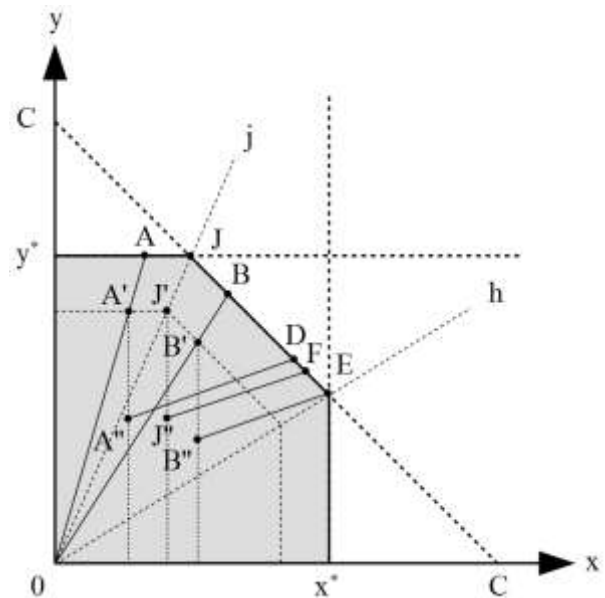


Рис. 8. Відображення АЗМЗ для моделі зі сталим обмеженням швидкості

Про точки A'', J'' і B'' , отримані внаслідок дії на точки A', J' і B' відображенням β' , можна сказати наступне:

1) $d(A''J'') = d(A'J')$, оскільки координата x однакова у A' і J' , а відображення β' , згідно з визначенням, впливає лише на координату y ;

$$2) d(B''J'') \leq d(B'J').$$

Якщо подіяти відображенням αt на відрізок $B''J''$, то $d(EF) \leq d(B''J'')$, як і було показано раніше.

Якщо подіяти відображенням αt^* на відрізок $A''J''$, де $t^*: \min\{x + \alpha t^* \in y^*\}$, то довжина утвореного відрізка (l) буде рівна довжині $A''J''$, хоча довжина відрізка, який утвориться на прямій $x + y = C$ (позначимо це відрізок g) може бути й більшою (тобто $d(DF) > d(A'B')$ й, можливо, $d(DF) > d(AB)$). Але якщо подіяти на точки A і B відображенням αt^{**} , де $t^{**}: \min\{x + \alpha t^{**} \in x + y = C\}$, то довжина отриманого відрізка буде більшою за довжину відрізка g , оскільки $d(AB) > l$.

Таким чином, умова (4) виконується для даного перетворення, що й треба було довести.

Функція корисності для моделі зі сталим обмеженням швидкості. Оскільки дана модель обмежує швидкість кількома функціями, необхідно роздивитись кожен випадок окремо. Для випадку, коли є 2 з'єднання необхідно роздивитись наступні три випадки:

$$\begin{cases} x < C - y^* \\ y = y^* \end{cases}, \text{ що відповідає ситуації,}$$

коли нерухома точка знаходиться на прямій $y = y^*$;

$$\begin{cases} x \geq C - y^* \\ y \geq C - x^* \end{cases}, \text{ що відповідає ситуації,}$$

коли нерухома точка лежить на прямій $x + y = C$;

$$\begin{cases} x = x^* \\ y < C - x^* \end{cases}, \text{ що відповідає ситуації,}$$

коли нерухома точка знаходиться на прямій $x = x^*$.

Друга ситуація була розглянута у [5 і 6], тож розглянемо перший та третій випадки.

Для першого випадку відображення АЗМЗ може бути записане формулою:

$$x_n + y^* = x_n + y_n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^* = y_n = y_{n+1} = \beta_2 y_n + \alpha_2 T_n.$$

Звідси ми можемо знайти значення T_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{y^* - \beta_2 y_n}{\alpha_2} = \frac{y^* - \beta_2 y^*}{\alpha_2} = \\ &= \frac{y^* (1 - \beta_2)}{\alpha_2} = \frac{y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки T_n не залежить від поточних координат x_n та y_n , його значення відповідає значенню середнього часу до відкидання пакетів T .

Знайдемо значення швидкості пересилки даних першим з'єднанням у момент часу перед $n+1$ -м відкиданням пакетів:

$$x_{n+1} = x_n \beta_1 + \alpha_1 T_n = x_n \beta_1 + \frac{\alpha_1 y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2}.$$

Формула для знаходження x_n для будь-якого n та середнє значення x можуть бути визначені за допомогою формул:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 \beta_1^n + \frac{\alpha_1 y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2} \cdot \frac{1 - \beta_1^n}{1 - \beta_1}, \\ \bar{x} &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\alpha_1 y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2} \cdot \frac{1}{1 - \beta_1} = \frac{\alpha_1 y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2 \beta_1}. \end{aligned}$$

Значення середньої швидкості пересилки даних для обох з'єднань може бути знайдене за наступними формулами:

$$Thp_1 = \frac{\bar{x} + \beta_1 \bar{x}}{2} = \frac{1 + \beta_1}{2} \cdot \frac{\alpha_1 y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2 \beta_1}, \quad (10)$$

$$Thp_2 = \frac{\bar{y} + \beta_2 \bar{y}}{2} = \frac{1 + \beta_2}{2} \cdot y^*. \quad (11)$$

Аналогічно знаходяться значення для другого з'єднання. Отримавши значення T та Thp , їх можна використати для розрахунку значення функції корисності (8).

Значення T та Thp для третього випадку, за якого нерухома точка знаходить-

ся на прямій $x = x^*$, можуть бути знайдені аналогічно до того, як були знайдені ці значення для першого випадку, розглянутого вище. Ці значення можуть бути записані наступними формулами:

$$T_1 = \frac{x^* \bar{\beta}_1}{\alpha_1}. \quad (12)$$

$$Thp_1 = \frac{\bar{x} + \beta_1 \bar{x}}{2} = \frac{1 + \beta_1}{2} \cdot x^*. \quad (13)$$

$$Thp_2 = \frac{\bar{y} + \beta_1 \bar{y}}{2} = \frac{1 + \beta_2}{2} \cdot \frac{\alpha_2 x^* \bar{\beta}_1}{\alpha_1 \beta_2}. \quad (14)$$

Визначивши значення середнього часу T та середньої швидкості надсилання пакетів користувачами Thp , можна визначити значення функцій корисності для різних комбінацій параметрів АЗМЗ протоколу TCP.

Нехай, як і в [5], є дві стратегії, які можуть обирати користувачі, з параметрами АЗМЗ (α_1, β_1) для агресивної стратегії H і (α_2, β_2) для мирної стратегії D . Значення функції корисності для різних стратегій можна буде визначити за різними формулами. Для випадків, коли два з'єднання використовують однакові стратегії, вони поділять спільний канал порівну, тобто виконуватиметься умова

$$\begin{cases} x \geq C - y^* \\ y \geq C - x^* \end{cases}. \text{ Вважаємо, що } x^* + y^* \leq C. \text{ В}$$

такому разі значення для T та Thp відповідатимуть значенням з [4]. У випадках, коли взаємодіють різні стратегії, і виконуються умови

$$\begin{cases} x < C - y^* \\ y = y^* \end{cases} \text{ і/або } \begin{cases} x = x^* \\ y < C - x^* \end{cases},$$

для розрахунку функції корисності слід використовувати значення T та Thp , що визначаються за формулами (9), (10), (11), (12), (13) і (14).

Визначивши всі функції корисності для даної моделі, можна перейти до визначення критеріїв існування ЕСС.

Критерії існування ЕСС для моделі зі сталим обмеженням швидкості. Оскільки при розгляді даної моделі необхідно розглядати 3 окремі випадки поло-

ження нерухомої точки, то й умови існування ЕСС також будуть розбиті на три частини.

Для чистих стратегій обмеження μ_1 матиме значення таке ж, як і визначене в [6]. Значення ж μ_2 буде різним, в залежності від того, чи виконується умова $\begin{cases} x < C - y^* \\ y = y^* \end{cases}$, тобто:

$$x < C - y^* \Rightarrow \frac{\alpha_1 y^* \bar{\beta}_2}{\alpha_2 \beta_1} < C - y^*. \quad (15)$$

Слід зазначити, що в умові (15) α_i і β_i не відповідають стратегіям H і D , а приймають значення в залежності від конкретної формули.

У разі виконання умови (15) μ_2 матиме наступне значення:

$$\begin{aligned} \mu_2 = & \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\alpha_2 y^* \bar{\beta}_1 (1 + \beta_2) - 2\alpha_1 C (1 + \beta_2))}{2\alpha_1 \beta_2} \times \\ & \times \frac{y^* C \bar{\beta}_1}{\alpha_1 (C - 2y^*)}, \end{aligned}$$

а в разі невиконання

$$\begin{aligned} \mu_2 = & \frac{C^2 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2}{4(\alpha_1^2 \beta_2^2 - \alpha_2^2 \beta_1^2)} (\alpha_1 \bar{\beta}_2 (1 + \beta_1) + \\ & + \alpha_2 \bar{\beta}_1 (\beta_1 - 2\beta_2 - 1)). \end{aligned}$$

Для змішаних стратегій, у разі виконання умови (15), μ_1 матиме таке ж значення, як і μ_2 для чистих стратегій. Значення ж μ_2 буде залежати від того, чи виконується умова

$$\begin{cases} x = x^* \\ y < C - x^* \end{cases}, \text{ тобто:}$$

$$y < C - x^* \Rightarrow \frac{\alpha_2 x^* \bar{\beta}_1}{\alpha_1 \beta_2} < C - x^*. \quad (16)$$

У разі виконання умови (16) μ_2 матиме наступне значення:

$$\begin{aligned} \mu_2 = & \frac{2(1 + \beta_1)x^* - (1 + \beta_2)C}{4} \times \\ & \times \frac{\bar{\beta}_1 \beta_2 x^* C}{\alpha_1 \beta_2 C - 2\alpha_2 \bar{\beta}_1 x^*}. \end{aligned}$$

А в разі невиконання умови, μ_2 прийме значення

$$\mu_2 = \frac{C^2 \overline{\beta_1 \beta_2} (\alpha_1 \overline{\beta_2} (1 + 2\beta_1 - \beta_2) - \alpha_2 \overline{\beta_1} (1 + \beta_2))}{4(\alpha_1^2 \overline{\beta_2^2} - \alpha_2^2 \overline{\beta_1^2})}$$

При розгляді випадку, коли користувачі мають симетрично протилежні обмеження, значення параметра чутливості до втрати пакетів будуть аналогічні до значень, отриманих за допомогою виведених вище формул. Різниця полягатиме лише у тому, що замість y^* буде x^* і навпаки.

Еволюційна гра для модифікованих математичних моделей. Нехай є популяція гравців, які поділяють вузьке місце мережі, і які можуть динамічно обирати одну з двох стратегій (реалізацій АЗМЗ). Рішення про зміну стратегії приймається гравцем на основі значення функції користності, яке визначається із певною затримкою, оскільки потрібен певний час, для того щоб порівняти наскільки нова стратегія краща за попередню. В процесі такого вибору, з часом, за певних умов, вибір користувачів може стати або однаковим, або розподілитись (тобто вони обиратимуть стратегію з певною ймовірністю).

Така взаємодія користувачів і називається еволюційною грою (в прикладенні до комп'ютерних мереж). Умови існування стабільного рішення такої гри, тобто ЕСС, для розглянутих модифікованих моделей були визначені на основі обмежень значення параметра чутливості до втрат пакетів λ . У загальному випадку цей параметр може мати різні значення для кожного з'єднання. Але при розгляді еволюційної гри для даних моделей ми вважаємо, що його значення однакове у всіх з'єднань.

Результати моделювання такої гри наведені у наступному розділі.

Моделювання

Модель з лінійним обмеженням швидкості. Нехай маємо двох користувачів з наступними значеннями параметрів АЗМЗ: $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.8)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (2.0, 1.0)$. Встановимо параметр δ_1 рів-

ним 2.0, а δ_2 рівним 1.0. Зазначимо, що розмір буферу було встановлено у 100 пакетів (розмір всіх пакетів з даними рівний). Пропускна спроможність спільного каналу C становить 1000 пакетів на секунду. Середні значення швидкостей користувачів матимуть значення

$$x = \frac{3}{8}C, \quad y = \frac{1}{8}C.$$

На рис. 9 показано поділ каналу за визначених значень параметрів.

Отримані значення майже точно відповідають розрахованим. На рис. 10 показано відношення величин вікна переповнення користувачів для визначених параметрів.

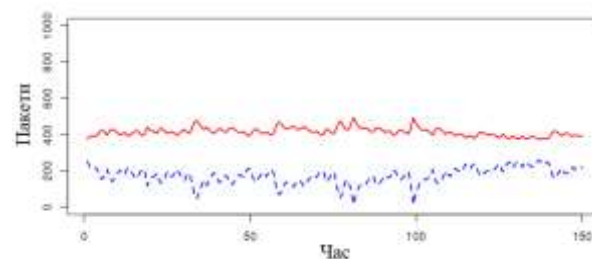


Рис. 9. Графік проходження пакетів користувачів через спільний канал при $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.8)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (2.0, 1.0)$ (пряма лінія – перший користувач, пунктирна лінія – другий)

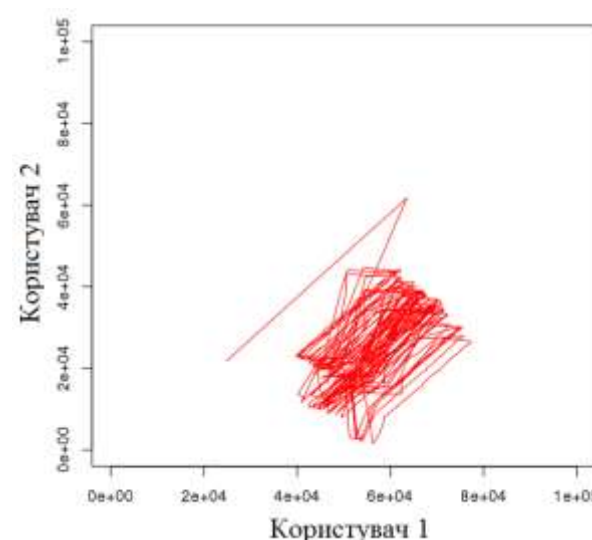


Рис. 10. Графік залежності величин вікна переповнення для двох користувачів при $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.8)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (2.0, 1.0)$

Зробимо зміну параметра. Встановимо $\beta_1 = 0.5$ і $\beta_2 = 0.8$. Розраховані значення середніх швидкостей рівні

$$x = \frac{3}{14}C, \quad y = \frac{9}{14}C.$$

Графіки поділу каналу та відношення величин вікна переповнення для нових параметрів показані на рис. 11 та рис. 12 відповідно.

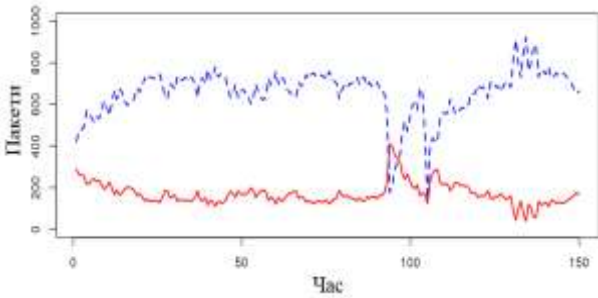


Рис. 11. Графік проходження пакетів користувачів через спільний канал при $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.5)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.8)$, $(\delta_1, \delta_2) = (2.0, 1.0)$ (пряма лінія – перший користувач, пунктирна лінія – другий)

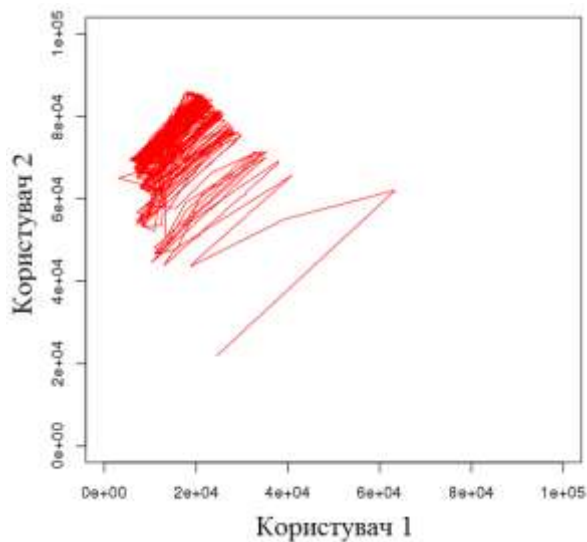


Рис. 12. Графік залежності величин вікна переповнення для двох користувачів при $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.5)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.8)$, $(\delta_1, \delta_2) = (2.0, 1.0)$

Нехай z приймає значення $0,75C$, а параметри АЗМЗ $(\alpha_1, \beta_1) = (1.5, 0.75)$,

$(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, тоді умова (16) може бути записана як

$$\frac{\alpha_2 x^* \bar{\beta}_1}{\alpha_1 \beta_2} < C - x^* \Rightarrow \frac{1}{4}C = 0.25C.$$

Можна побачити, що за даних параметрів, нерухома точка відображення АЗМЗ знаходиться на стику двох прямих, щоб обмежують швидкість передачі. За формулами (13) і (14) розрахуємо значення середніх швидкостей користувачів за нових умов:

$$x = \frac{3}{4}C, \quad y = \frac{1}{4}C.$$

Графік поділу спільного каналу для нових значень параметрів показано на рис. 13.

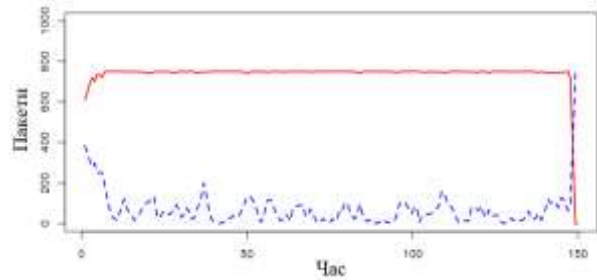


Рис. 13. Графік проходження пакетів користувачів через спільний канал при $(\alpha_1, \beta_1) = (1.5, 0.75)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $z = 0.75C$

Як видно з графіка, перший користувач захоплює більшу частину каналу, і його швидкість знаходиться на межі допустимої швидкості, тобто є трошки більшою, ніж очікувана середня швидкість. Швидкість першого користувача дещо менша за очікувану. Це стається через те, що при великій різниці між параметрами АЗМЗ, синхронне відкидання пакетів більше впливає на “мирне” з’єднання, ніж на “агресивне”. Для того, щоб виправити це, необхідно ускладнити процес керування чергою, й відкидати більше пакетів “агресивного” користувача, ніж “мирного”.

Графік відношення значень вікна переповнення показано на рис. 14.

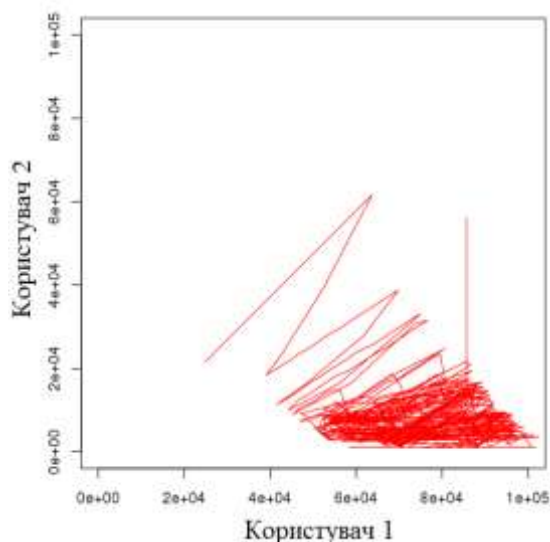


Рис. 14. Графік залежності величин вікна пропускання для двох користувачів при $(\alpha_1, \beta_1) = (1.5, 0.75)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $z = 0.75C$

Еволюційна гра для моделі з лінійним обмеженням швидкості. Нехай маємо популяцію користувачів, які динамічно обирають одну з двох реалізацій протоколу TCP, що реалізують алгоритм АЗМЗ з параметрами $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.7)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, а коефіцієнти обмеження швидкості рівні $(\delta_1, \delta_2) = (1.1, 1.0)$, та $C = 1000$. Для визначених параметрів АЗМЗ значення λ матиме наступні обмеження для ЕСС в змішаних стратегіях:

$$72995 < \lambda < 75000.$$

Якщо $\tau = 5$, $K = 1.5$, а $\lambda = 73500$, то розподіл користувачів за протоколами можна побачити на рис. 15.

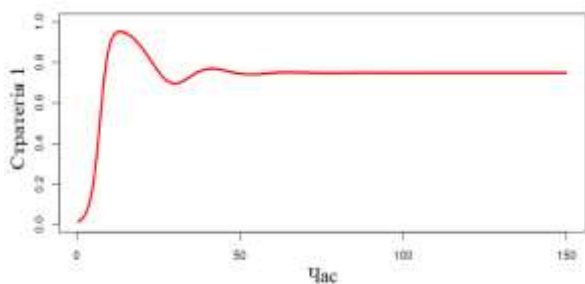


Рис. 15. Частка користувачів, що використовують протокол TCP з параметрами $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.7)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (1.1, 1.0)$

Еволюційна гра для моделі зі сталим обмеженням швидкості. Нехай маємо популяцію користувачів, які динамічно обирають одну з двох реалізацій протоколу TCP, що реалізують алгоритм АЗМЗ з параметрами $(\alpha_1, \beta_1) = (2.0, 0.8)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.5, 0.2)$, а коефіцієнт обмеження швидкості $z = 0.8C$ (що задовольняє умові (16)), та $C = 1000$. Для визначених параметрів АЗМЗ значення λ матиме наступні обмеження для ЕСС в змішаних стратегіях:

$$37333 < \lambda < 48000.$$

При $\tau = 5$, $K = 1.5$, а $\lambda = 40000$, то розподіл користувачів за протоколами можна побачити на рис. 16.

Збільшення значення коефіцієнта λ до 43000 призведе до зменшення очікуваної частки користувачів, що застосовують першу стратегію (рис. 17).

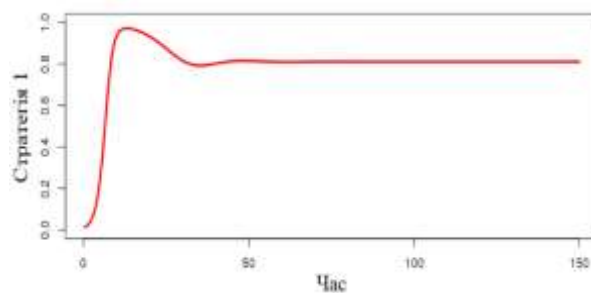


Рис. 16. Частка користувачів, що використовують протокол TCP з параметрами $(\alpha_1, \beta_1) = (2.0, 0.8)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.5, 0.2)$, $z = 0.8C$, $\lambda = 40000$

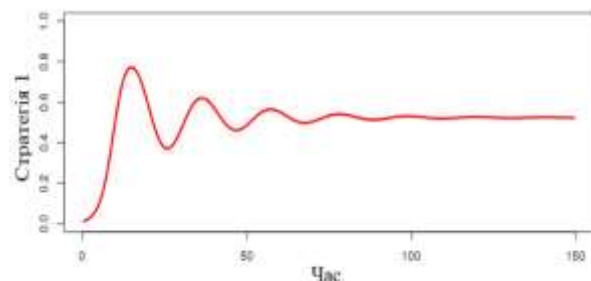


Рис. 17. Частка користувачів, що використовують протокол TCP з параметрами $(\alpha_1, \beta_1) = (1.0, 0.7)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1.0, 0.5)$, $z = 0.8C$, $\lambda = 43000$

Висновки

У роботі доведено існування точки рівноваги при використанні спеціальних політик обслуговування пакетів користувачів. Проведено моделювання, яке на практиці підтвердило збіжність поділу спільного каналу між користувачами до сталого значення.

В подальшому було б доцільно розширити досліджену модель на довільну структуру мережі з довільною кількістю користувачів, а також дослідити взаємодію ТСП-протоколів, що реалізують інші алгоритми (напр. МЗМЗ).

1. *Afanasyev A., Tilley N., Reiher P., Kleinrock L.* Host-to-Host Congestion Control for TCP // *IEEE Communications Surveys & Tutorials.* – 2012. – 12(3). – P. 304–342.
2. *Garg R., Kamra A., Khurana V.* A game-theoretic approach towards congestion control in communication networks // *Computer Communications Review.* – 2002. – 32(3). – P. 47–61.
3. *Alpcan, T., Bas, ar, T.* A utility-based congestion control scheme for Internet-style networks with delay // *IEEE Transactions on Networking.* – 2005. – 13(6). – P. 1261–1274.
4. *Altman E., El-Azouzi R., Hayel Y., Tembine H.* An evolutionary game approach for the design of congestion control protocols in wireless networks // *Proceedings of 2008 6th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile.* – 2008.
5. *Altman E., El-Azouzi R., Hayel Y., Tembine H.* The evolution of transport protocols: an evolutionary game perspective // *Computer Networks Journal.* – 2009. – 53(10). – P. 1751–1759.
6. *Ignatenko O. and Synetskyi O.* Evolutionary Game of N Competing AIMD Connections // *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications, Springer International Publishing.* – 2014. – P. 325–342.
7. *Maynard Smith J.* Game theory and the evolution of fighting // *John Maynard Smith (Ed.), On Evolution, Edinburgh University Press.* – 1972. – P. 8–28.

8. *Ait-Hellal, O., Altman, E., Elouadghiri, D., Erramdani, M., Mikou, N.* Performance of TCP/IP: the case of two Controlled Sources // *ICCC'97.* – 1997.

References

1. *Afanasyev A., Tilley N., Reiher P., Kleinrock L.* Host-to-Host Congestion Control for TCP // *IEEE Communications Surveys & Tutorials.* – 2012. – 12(3). – P. 304–342.
2. *Garg R., Kamra A., Khurana V.* A game-theoretic approach towards congestion control in communication networks // *Computer Communications Review.* – 2002. – 32(3). – P. 47–61.
3. *Alpcan, T., Bas, ar, T.* A utility-based congestion control scheme for Internet-style networks with delay // *IEEE Transactions on Networking.* – 2005. – 13(6). – P. 1261–1274.
4. *Altman E., El-Azouzi R., Hayel Y., Tembine H.* An evolutionary game approach for the design of congestion control protocols in wireless networks // *Proceedings of 2008 6th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile.* – 2008.
5. *Altman E., El-Azouzi R., Hayel Y., Tembine H.* The evolution of transport protocols: an evolutionary game perspective // *Computer Networks Journal.* – 2009. – 53(10). – P. 1751–1759.
6. *Ignatenko O. and Synetskyi O.* Evolutionary Game of N Competing AIMD Connections // *Information and Communication Technologies in Education, Research, and Industrial Applications, Springer International Publishing.* – 2014. – P. 325–342.
7. *Maynard Smith J.* Game theory and the evolution of fighting. *John Maynard Smith (Ed.), On Evolution, Edinburgh University Press.* – 1972. – P. 8–28.
8. *Ait-Hellal, O., Altman, E., Elouadghiri, D., Erramdani, M., Mikou, N.* Performance of TCP/IP: the case of two Controlled Sources // *ICCC'97.* – 1997.

Одержано 29.09.2016

Про авторів:

Ігнатенко Олексій Петрович,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 35.
<http://orcid.org/0000-0001-8692-02062>,

Молчанов Олексій Андрійович,
аспірант,
Кількість наукових публікацій в
українських виданнях – 2.
<http://orcid.org/0000-0001-8384-0918>.

Місце роботи авторів:

Інститут програмних систем
НАН України,
03187, Київ-187,
Проспект Академіка Глушкова, 40.
Тел.: 526 6025.
E-mail: o.ignatenko@gmail.com

Національний технічний університет
України «Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського»,
03056, Київ-56,
проспект Перемоги, 37.
E-mail: oleksii.molchanov@gmail.com