УДК 518.9

С.В. Пашко

ПОБУДОВА СТРАТЕГІЙ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЙ ЛЯПУНОВА

Розглядаються диференційні ігри переслідування, в яких кілька агентів доганяють одного. Критерієм виступає час захоплення цілі. Для відомої стратегії паралельного зближення описана функція, що задає максимальний час переслідування. Ця функція використовується як функція Ляпунова для побудови нової стратегії переслідування, що перевершує стратегію паралельного зближення в наступному сенсі. Максимальний час переслідування для побудованої стратегії не перевищує максимального часу для стратегії паралельного зближення; водночас існує значна кількість ігор, в яких максимальний час переслідування для нової стратегії виявляється меншим, ніж для стратегії паралельного зближення.

Ключові слова: конфліктно керований процес, агент, стратегія паралельного зближення, функція Ляпунова, максимальний час переслідування

Вступ

В даній роботі розглядається задача переслідування одного втікача кількома переслідувачами в скінченновимірному дійсному евклідовому просторі. Критерієм виступає час захоплення цілі, який переслідувачі намагаються мінімізувати, а втікач – максимізувати. Рух агентів вважається простим, швидкості вважаються кусково-неперервними за часом.

Останнім часом проводяться роботи з створення багатоагентних роботизованих систем захисту, систем безпілотних апаратів тощо, тому задача, що розглядається, є актуальною.

В роботах [1, 2] задача переслідування вирішена за умови, що втікач не належить внутрішній частині опуклої оболонки, яка утворена переслідувачами. Знайдено оптимальні стратегії переслідування та ціна гри. Доведено, що всі агенти з постійними максимальними швидкостями рухаються до деякої точки, де відбувається захоплення цілі. В даній роботі розглядаються здебільшого ігри (іншими словами – конфліктно керовані процеси), в яких утікач належить внутрішній частині опуклої оболонки, що утворена переслідувачами. Оптимальні стратегії відомі не для всіх таких процесів.

Побудована в даній роботі ефективна стратегія переслідування суттєво спирається на класичну стратегію паралельного зближення. Нагадаємо, що стратегія паралельного зближення полягає у наступному [2]. Кожен переслідувач, знаючи швидкість втікача в даний момент часу, вважає цю швидкість постійною та обчислює на лінії руху втікача точку захоплення, в якій він може догнати його, рухаючись з постійною максимальною швидкістю. В поточний момент часу вектор швидкості переслідувача направлений на точку захоплення, а величина швидкості максимальна. Якщо максимальні швидкості переслідувача і втікача рівні, а точка захоплення не існує, переслідувач рухається паралельно втікачеві.

В даній роботі максимальний час переслідування W для стратегії паралельного зближення, що залежить від координат агентів, використовується як функція Ляпунова для побудови стратегії переслідування, яка перевершує стратегію паралельного зближення в наступному розумінні. Для будь-якого конфліктно керованого процесу (з-поміж тих, що розглядаються) виконується нерівність $T \le W$, водночас для багатьох процесів справедливе співвідношення $T < W$; тут T – максимальний час переслідування для побудованої стратегії.

В цій статті результати роботи [3] узагальнюються на випадок багатовимірного евклідового простору та на процеси з довільною кількістю переслідувачів.

В роботі [4] доведено, що за умови рівності швидкостей всіх агентів, у випадку, коли втікач оточений переслідувачами, ціль буде захоплена, якщо всі переслідувачі застосовують стратегію паралельного зближення. В роботах [5, 6] також розглядається стратегія паралельного зближення, за допомогою якої вирішуються конфліктно керовані процеси якості та наводяться оцінки часу захоплення цілі. Детально стратегія паралельного зближення розглядається в [2]; відмічено, що в загальному випадку ця стратегія не є оптимальною. В роботах [1, 2, 7, 8] побудовано оптимальні стратегії переслідування кількома агентами одного втікача, але тільки за деяких умов щодо розташування агентів у просторі або їх кількості. Застосування функцій Ляпунова для керування динамічними системами розглядається в роботі [9].

Стратегії, максимальний час переслідування та функції Ляпунова

Нехай у точці $X_0 = X_0(t)$ n-вимірного дійсного евклідового простору E^n в момент часу t знаходиться втікач E, а в точках $X_i = X_i(t)$ знаходяться переслідувачі P_i, $i = 1,2,...,k.$ Вектори $V_i = V_i(t)$ розмірності n, $i = 0,1,...,k,$ означають швидкості агентів (нульове значення індексу i відноситься до втікача E).

Простір E^n складається з n-вимірних векторів $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ з дійсними компонентами, $2 \le n < \infty.$ Норма вектора X визначається формулою

$$\|X\| = \langle X, X \rangle^{1/2},$$

де $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ – скалярний добуток векторів $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ та $Y = (y_1, y_2,..., y_n).$

Процес переслідування починається в момент часу $t = 0.$ Рівняння руху агентів мають вигляд

$$\dot{X}_i = V_i, \quad i = 0,1,2,...,k. \qquad (1)$$

Кожне із співвідношень (1) виконується в кожен момент, в який відповідна швидкість є неперервною функцією від часу.

Вважаємо, що виконуються обмеження

$$0 \le \|V_i\| \le w_i, \; i = 0,1,..., k,$$

де $0 < w_i < \infty$ – максимальна величина швидкості, а також нерівності

$$w_0 \le w_i, \quad i = 1,2,..., k. \qquad (2)$$

Нехай $X(t) = (X_0(t), X_1(t),..., X_k(t))$ – фазовий вектор, що містить координати агентів. Вважаємо, що швидкість V_0 агента E має вигляд $V_0(t, X(t))$; назвемо цю швидкість стратегією втікача та позначимо $\Psi.$ Вважаємо, що швидкість V_i агента P_i має вигляд

$$V_i(t, X(t), V_0(t, X(t)), \; i \in \{1,2,..., k\};$$

назвемо цю швидкість стратегією i-го переслідувача та позначимо $\Phi_i.$ Стратегією переслідування назвемо вектор

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2,..., \Phi_k).$$

Швидкості $V_i(t),\; i = 1,2,..., k,$ вважаються кусково-неперервними функціями від часу. Це означає, що в кожному обмеженому часовому проміжку існує не більше скінченого числа точок розриву першого роду.

Нехай $l_i \ge 0$ – задані числа, $d_i(t) = \|X_i(t) - X_0(t)\|, \quad t \ge 0, \quad i = 1,2,..., k.$ Визначимо функцію $d(t)$ наступним чином: $d(t) = 0,$ якщо для деякого значення $i \in \{1,2,..., k\}$ справедлива рівність $d_i(t) = 0$ або виконується нерівність $d_i(t) < l_i;$ $d(t) = 1$ в протилежному випадку. Часом захоплення цілі назвемо величину

$$T(X(0), \Phi, \Psi) = \inf\{t | d(t) = 0\}.$$

Втікач E намагається максимізувати величину $T(X(0), \Phi, \Psi),$ а переслідувачі намагаються її мінімізувати.

Максимальним часом переслідування для стратегії Φ назвемо величину

$$T(X(0),\Phi)=\sup_{\Psi} T(X(0),\Phi,\Psi).$$

З двох стратегій переслідування більш ефективною вважаємо ту, для якої максимальний час переслідування менший.

Вважаємо, що

$$\left\|X_i(0)-X_0(0)\right\|>l_i,\quad i=1,2,...,k.$$

Для таких значень i, що $w_i=w_0$, додатково вимагаємо виконання нерівності $l_i>0$.

Розглянемо питання про існування та властивості розв'язку системи рівнянь (1). Нехай $T>0$ такий момент часу, що на протязі відрізка $[0,T]$ задіяні деякі стратегії втечі та переслідування, $t\in[0,T]$. Апріорі слід вважати, що фазовий вектор $X(t)$ може не існувати або може виявитися не єдиним. Визначимо функцію $\Theta(t)$ наступним чином:

$$\Theta(t)=\begin{cases} *,\ X(t)\text{ не існує},\\ X(t),\text{ існує єдиний вектор }X(t),\\ K(t),\text{ існує множина векторів }K(t).\end{cases}$$

Тут множина $K(t)$ складається з векторів $X(t)$ та містить більше одного елемента.

Припустимо, швидкість втікача визначається функцією $V_0(t,\Theta(t))\equiv\overline{V}_0(t)$, а швидкості переслідувачів визначаються функціями $V_i(t,\Theta(t),V_0(t,\Theta(t)))\equiv\overline{V}_i(t)$, $i=1,2,...,k.$ Вважаємо, що швидкості вибираються вказаним способом у кожен момент часу, і ці швидкості є векторами дійсного n-вимірного евклідового простору E^n. Також вважаємо, що функції $\overline{V}_i(t)$, $i=0,1,...,k$, є кусково-неперервними. Звідси випливає, що для кожного $i\in\{0,1,...,k\}$ та для кожного t існує єдине значення

$$X_i(t)=X_i(0)+\int_0^t\overline{V}_i(\tau)d\tau,$$

причому функції $X_i(t)$ абсолютно неперервні [10]. Тому в кожен момент часу існує єдине значення фазового вектора $X(t)=(X_0(t),X_1(t),...,X_k(t))$. Очевидно, $X(t)$ – єдиний розв'язок системи (1), що задовольняє заданим початковим умовам. Отже, справедлива теорема.

Теорема 1. Нехай на проміжку $[0,T]$ швидкості агентів існують та є кусково-неперервними функціями від часу. Тоді система диференційних рівнянь (1) має єдине рішення $X(t)$, $t\in[0,T]$, що задовольняє заданим початковим умовам. Це рішення є абсолютно неперервною функцією від часу.

Як бачимо, за умови існування та кускової неперервності швидкостей для всіх $t\in[0,T]$ виконується рівність $\Theta(t)=X(t)$, тобто функція $\Theta(t)$ не приймає значень $*$ або $K(t)$. Тому можна вважати, що швидкості визначаються виразами $V_0(t,X(t))$, $V_i(t,X(t),V_0(t,X(t)))$. Далі замість виразу $V_0(t,X(t))$ будемо вживати $V_0(t)$, замість виразу $V_i(t,X(t),V_0(t,X(t)))$ – $V_i(t)$. Прикладами кусково-неперервних стратегій можна вважати кусково-постійні стратегії Карліна [1].

Стратегії переслідування, побудовані далі, засновані на використанні функції Ляпунова $W(X)$. Нехай функція $W(X)$, визначена на фазовому просторі або на його підмножині, в якій лежать траєкторії фазової точки, приймає скінчені дійсні значення та задовольняє наступним умовам:

1) функція $W(X)$ обмежена знизу;

2) існує така стратегія переслідування, що для будь-якої стратегії втечі в кожен момент часу $t\geq 0$, що не перевищує часу захоплення цілі, виконується нерівність $W(t)\leq W(0)+ct$, де $c<0$ – константа, $W(t)=W(X(t))$, $W(0)=W(X(0))$.

Умови 1) – 2) гарантують існування стратегії переслідування, яка забезпечує захоплення цілі за скінчений час. Дійсно, нехай $\widetilde{W}=\inf\limits_X W(X)$. Із співвідношення $\widetilde{W}\leq W(0)+ct$ випливає, що час захоплення цілі не перевищує величини

$$\frac{W(0)-\widetilde{W}}{-c}.$$

Вважаємо, що в кожен момент часу переслідувачі вибирають свою швидкість таким чином, щоб функція $W(t)$ зменшувалась якомога швидше. Найкращою функцією Ляпунова $W(X)$ слід вважати ціну процесу (гри). Якщо ця функція невідома, слід знайти функцію Ляпунова, що забезпечує якомога менший максимальний час переслідування, та скористатись нею для побудови стратегії переслідування.

Максимальний час переслідування для стратегії паралельного зближення

Припустимо, всі переслідувачі застосовують стратегію паралельного зближення. Тоді швидкості переслідувачів $V_i(t)$ обчислюються за формулами

$$V_i(t) = V_0(t) - \lambda(t) N_i,\ i = 1,2,\ldots,k,\ t \ge 0, \quad (3)$$

де

$$N_i = \frac{X_i(0) - X_0(0)}{\|X_i(0) - X_0(0)\|},\quad \lambda(t) = \langle V_0(t), N_i\rangle + $$

$$+\sqrt{\langle V_0(t), N_i\rangle^2 + w_i^2 - \|V_0(t)\|^2}.$$

Функція $V_0(t)$ вважається кусково-неперервною. Це призводить до того, що функції $V_i(t)$, $i = 1,2,\ldots,k$, також є кусково-неперервними. Тому з теореми 1 випливає, що система рівнянь (1) має єдине рішення, яке задовольняє заданим початковим умовам. Це рішення є абсолютно неперервною функцією.

Позначимо $\operatorname{conv}\{X_1, X_2,\ldots, X_k\}$ опуклу оболонку точок $X_1, X_2,\ldots, X_k$. Нехай int Z – внутрішня частина множини Z. Розглянемо випадок, коли точка розташування втікача X_0 в початковий момент належить внутрішності опуклої оболонки точок $X_1, X_2,\ldots, X_k$, тобто виконується умова

$$X_0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1, X_2,\ldots, X_k\}. \quad (4)$$

Стратегія паралельного зближення має наступну властивість. Кути між векторами $\overrightarrow{X_0X_i}$ та $\overrightarrow{X_0X_j}$ на протязі конфліктного процесу залишаються постійними, оскільки прямі $X_0(t)X_q(t)$ і $X_0(0)X_q(0)$ паралельні для всіх моментів t, що не перевищують часу закінчення процесу, $q = 1,2,\ldots,k$ [2]. Тому з того, що умова (4) виконується в початковий момент, випливає, що ця умова виконується на протязі всього процесу.

З теореми 1 [11] випливає існування оптимальної стратегії втечі $\Psi^* = (t_1^*, t_2^*,\ldots, t_k^*, Z_1^*, Z_2^*,\ldots, Z_k^*)$, де величини t_i^*, Z_i^* означають наступне. Представимо проміжок $[0, T^*)$, де $T^* = \sum_{i=1}^{k} t_i^*$ – час захоплення цілі, у вигляді об'єднання k проміжків, що не перетинаються,

$$[0, T^*) = \bigcup_{i=1}^{k} [\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}).$$

Довжина проміжка $[\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ дорівнює t_i^*, а вектор швидкості стратегії втечі Ψ^* на проміжку $[\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ дорівнює $w_0 Z_i^*$, де $\|Z_i^*\| = 1$, $i = 1,2,\ldots,k$, n-вимірні вектори Z_i^* не змінюються з часом.

Теорема 2 [11] стверджує, що в кожен момент часу $t \in (0, T^*)$ такий, що оптимальна стратегія $V_0^*(t)$ неперервна, виконується рівність $\|V_0^*(t)\| = w_0$.

З роботи [11] випливає, що з будь-якою наперед заданою точністю можна отримати оптимальну стратегію втечі, вирішивши задачу лінійного програмування наступного вигляду

$$\sum_{R \in \{R\}} t_R \to \max, \quad (5)$$

$$\sum_{R \in \{R\}} u_{iR} t_R \le d_i - l_i,\quad i = 1,2,\ldots,k, \quad (6)$$

$$t_R \ge 0,\quad R \in \{R\}. \quad (7)$$

Тут t_R – змінні величини, R – $(n-1)$-вимірний вектор, $\{R\}$ – скінчена множина таких векторів, визначена в [11], величини u_{iR} визначені в [11], $d_i = \|X_i(0) - X_0(0)\|$.

За умови рівності швидкостей всіх агентів у роботі [12] доведена теорема, що дозволяє точно визначити оптимальну стратегію втечі, використовуючи оптимальне рішення наступної задачі лінійного програмування:

$$\sum_{I\in\{I\}}\sum_{s=1}^{2} t_{Is} \to \max, \quad (8)$$

$$\sum_{I\in\{I\}}\sum_{s=1}^{2} u_{iIs} t_{Is} \le d_i - l_i, \quad i = 1,2,...,k, \quad (9)$$

$$t_{Is} \ge 0, \quad I \in \{I\}, \ s = 1,2. \quad (10)$$

Тут t_{Is} – змінні величини, $I = \{i_1, i_2, ..., i_{n-1}\}$ – підмножина множини $\{1,2,...,k\}$ така, що система векторів $H = \{N_{i_1}, N_{i_2}, ..., N_{i_{n-1}}\}$ лінійно незалежна, $\{I\}$ – множина всіх таких підмножин, величини u_{iIs} розраховуються за формулами

$$u_{iIs} = \begin{cases} 0, & \langle N_i, N_{Is}\rangle < 0, \\ 2w\langle N_i, N_{Is}\rangle, & \langle N_i, N_{Is}\rangle \ge 0, \end{cases}$$

$i = 1,2,...,k$, $I \in \{I\}$, $s = 1,2$, де N_{I1}, N_{I2} – вектори одиничної довжини, ортогональні кожному вектору системи *H*, причому $N_{I1} = -N_{I2}$.

Розглянемо випадок, коли точка розміщення втікача X_0 не належить опуклій оболонці точок $X_1, X_2, ..., X_k$. Нехай виконуються співвідношення

$$X_0 \notin \mathrm{conv}\{X_1, X_2, ..., X_k\}, \quad (11)$$

$$w_i > w_0, \ l_i = 0, \ i = 1,2,...,k. \quad (12)$$

Позначимо A_i сферу Аполлонія, що відноситься до пари агентів *E*, P_i. Вона являє собою геометричне місце точок, в яких можуть зустрітися агенти *E* і P_i, якщо вони рухаються рівномірно та прямолінійно з максимальними швидкостями. Нехай C_i – замкнутий шар Аполлонія, що відповідає сфері A_i. Тоді $C = \bigcap_{i=1}^{k} C_i$ – множина таких точок простору E^n, до яких агент *E* встигне дійти не пізніше за кожного переслідувача. Внутрішність множини *C* являє собою множину точок, до яких втікач *E* встигне дійти раніше за будь-якого переслідувача. Нехай $X^* \in C$ – найбільш віддалена точка від точки X_0 з множини *C*, тобто для кожного $X' \in C$ справедлива нерівність

$$\|X^* - X_0\| \ge \|X' - X_0\|.$$

Припустимо, втікач застосовує стратегію, яка полягає в тому, що він постійно рухається з максимальною швидкістю в напрямку точки X^* (що вирахувана в момент $t = 0$). До моменту часу $\|X^* - X_0\|/w_0$ захоплення відбутися не може, тому для будь-якої стратегії переслідування максимальний час переслідування $T(X(0), \Phi)$ задовольняє нерівності

$$T(X(0), \Phi) \ge \|X^* - X_0\|/w_0. \quad (13)$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. За умов (11), (12) застосування стратегії паралельного зближення забезпечує захоплення цілі за час, що не перевищує величини $\|X^* - X_0\|/w_0$.

Доведення цієї теореми грунтується на ідеях, які застосовані під час доведення теорем 6.1 та 9.1 роботи [2]. Відмінність полягає у тому, що в теоремі 9.1 побудована стратегія переслідування, яка дещо відрізняється від стратегії паралельного зближення, та використані інші класи допустимих швидкостей агентів.

Якщо виконуються співвідношення (11), (12), то з теореми 2 та з оцінки (13) випливає наступне. Стратегія паралельного зближення є оптимальною, стратегія втечі агента *E*, яка полягає в прямолінійному русі з максимальною швидкістю у напрямку до точки X^*, також є оптимальною, величина $\|X^* - X_0\|/w_0$ є ціною конфліктно керованого процесу.

Замінивши в рівняннях руху X_i на $X_i - X_0$, отримуємо систему рівнянь

$$\dot{X}_i = V_i - V_0, \quad i = 1,2,...,k; \qquad (14)$$

агент E постійно знаходиться в початку вибраної декартової системи координат, $X_0(t) = (0,0,...,0)$. Далі вважаємо, що виконуються рівняння (14); фазовим вектором вважаємо $X(t) = (X_1(t),..., X_k(t))$.

Застосування функції Ляпунова в задачах переслідування на площині

Розглянемо приклад застосування функції Ляпунова в задачах переслідування на площині. Нехай кількість переслідувачів дорівнює трьом та максимальні швидкості всіх агентів рівні, тобто виконуються умови

$$k = 3, \quad n = 2, \quad w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = w. \qquad (15)$$

Також вважаємо, що в початковий момент часу справедливе співвідношення (4), оскільки інакше у випадку рівних швидкостей неможливо гарантувати захоплення цілі. Зауважимо, що за умови (4) оптимальні стратегії переслідування в загальному випадку в літературі не описані.

Символами α, β, γ позначимо кути X_2, X_0, X_3, X_3, X_0, X_1, X_1, X_0, X_2 відповідно. Маємо $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Вважаємо, що $\gamma \le \beta \le \alpha$. З умови (4) випливають нерівності $\gamma > 0$, $\alpha < \pi$. Оптимальне значення цільової функції задачі (8) – (10) позначимо W. В роботі [12] доведена формула

$$W = \frac{1}{2w}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\beta} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right), \qquad (16)$$

де $d_i = \|X_i\|, i = 1,2,3.$ Величина W означає максимальний час переслідування для стратегії паралельного зближення. Очевидно, величина W є функцією від фазової точки X, $W = W(X)$. Використаємо цю функцію для побудови стратегії переслідування.

Якщо переслідувачі застосовують стратегію паралельного зближення, а втікач застосовує оптимальну стратегію втечі, розраховану на цей випадок, то виконується рівність $\dot{W}(t) = -1$. Але якщо переслідувачі вибирають швидкості з умови мінімуму величини $\dot{W}(t)$ і на деякому часовому проміжку похідна $\dot{W}(t)$ існує, виконується нерівність $\dot{W}(t) < -1$, поза цим проміжком використовується стратегія паралельного зближення, функція $W(t)$ неперервна, то максимальний час переслідування буде меншим. За умови, що переслідувачі діють розумно, нерівність $\dot{W}(t) > -1$ неможлива, оскільки вони можуть використовувати стратегію паралельного зближення.

На множині точок X, що задовольняють умові (4) і нерівностям $\|X_i\| > l_i$, $i = 1,2,3$, функція $W(X)$ – кусково-гладка. Якщо фазова точка належить області гладкості, то швидкості переслідування, для яких величина $\dot{W}(t)$ приймає мінімальне значення, легко розрахувати, використовуючи градієнт функції $W(X)$. В протилежному випадку для визначення швидкостей переслідування досить вирішити кілька простих екстремальних задач, по одній для кожної прилеглої області гладкості.

Якщо точка $X_0 = (0,0)$, в якій знаходиться втікач, належить границі множини $\mathrm{conv}\{X_1, X_2, X_3\}$, і виконуються нерівності $\|X_i\| \ge l_i$, $i = 1,2,3$, то величина $W(X_1, X_2, X_3)$ приймає значення $+\infty$. За умови (4) справедливо співвідношення $W(X_1, X_2, X_3) < \infty$. Якщо стратегія переслідування така, що функція $W(t)$ є незростаючою, то із справедливості умови (4) в початковий момент випливає її справедливість на протязі всього процесу. З цього випливає, що виконуються нерівності $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.

Нехай $X_i = (x_i, y_i), i = 1,2,3.$ За умов $0 < \gamma < \beta < \alpha < \pi$, $\|X_i\| > l_i$, $i = 1,2,3$, знайдемо градієнт

$$G = \left(W_{x_1}, W_{y_1}, W_{x_2}, W_{y_2}, W_{x_3}, W_{y_3}\right)$$

функції $W(x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3)$, використовуючи (16). Тут W_{x_i}, W_{y_i} – похідні функції W за змінними x_i, y_i відповідно. Маємо

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{\langle X_2, X_3\rangle^2}{\|X_2\|^2\|X_3\|^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(x_2^2+y_2^2\right)\left(x_3^2+y_3^2\right)-\left(x_2x_3+y_2y_3\right)^2}}{\|X_2\|\,\|X_3\|} =$$

$$= \frac{\sqrt{x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2-2x_2y_2x_3y_3}}{\|X_2\|\|X_3\|} = \frac{|D_{23}|}{d_2d_3}. \quad (17)$$

Тут $D_{23} = x_2y_3 - x_3y_2$, Аналогічно отримуємо

$$\sin\beta = \frac{|D_{13}|}{d_1d_3}, \quad (18)$$

де $D_{13} = x_1y_3 - x_3y_1$. З (16) – (18) випливає формула

$$W = \frac{d_3}{2w}\left(d_1\frac{d_1-l_1}{|D_{13}|} + d_2\frac{d_2-l_2+d_3-l_3}{|D_{23}|}\right). \quad (19)$$

З нерівностей $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$ випливає, що величини D_{13} і D_{23} не дорівнюють нулю. Нехай

$$s_{13} = \begin{cases} -1, & D_{13}<0, \\ 1, & D_{13}>0. \end{cases}$$

З визначення D_{13} випливають формули

$$\partial|D_{13}|/\partial x_1 = s_{13}y_3, \quad \partial|D_{13}|/\partial y_1 = -s_{13}x_3,$$

за допомогою яких з (19) виводимо

$$W_{x_1} = \frac{s_{13}d_3}{2wD_{13}^2}\left(D_{13}x_1\left(2-\frac{l_1}{d_1}\right) - y_3d_1(d_1-l_1)\right),$$

$$W_{y_1} = \frac{s_{13}d_3}{2wD_{13}^2}\left(D_{13}y_1\left(2-\frac{l_1}{d_1}\right) + x_3d_1(d_1-l_1)\right).$$

Інші компоненти градієнта обчислюються подібним чином.

В області гладкості функції $W(X)$ знайдемо швидкості переслідувачів та втікача, для яких досягається мінімакс величини $\dot W(t)$. Нехай $\psi(t)$ – кут, який утворює з віссю абсцис вектор швидкості $V_0(t)$, $\varphi_i(t)$ – кути, що утворюють з віссю абсцис вектори швидкостей $V_i(t)$, $i=1,2,3$. Маємо

$$V_0(t) = v_0(t)(\cos\psi(t), \sin\psi(t)),$$

$$V_i(t) = v_i(t)(\cos\varphi_i(t), \sin\varphi_i(t)), \quad i=1,2,3.$$

Тут v_0, v_i – величини швидкостей втікача та переслідувачів. Система рівнянь (14) набуває вигляду

$$\dot x_i = v_i\cos\varphi_i - v_0\cos\psi,$$

$$\dot y_i = v_i\sin\varphi_i - v_0\sin\psi, \quad i=1,2,3.$$

Позначимо $v=(v_1,v_2,v_3)$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$. Маємо

$$\min_{\varphi,v}\max_{\psi,v_0}\dot W(t) =$$

$$= \min_{\varphi,v}\max_{\psi,v_0}\sum_{i=1}^{3}\left(W_{x_i}\dot x_i + W_{y_i}\dot y_i\right) =$$

$$= \min_{\varphi,v}\max_{\psi,v_0}\sum_{i=1}^{3}\Big(W_{x_i}\left(v_i\cos\varphi_i - v_0\cos\psi\right) +$$

$$+ W_{y_i}\left(v_i\sin\varphi_i - v_0\sin\psi\right)\Big) =$$

$$\min_{\varphi,v}\max_{\psi,v_0}\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\left(W_{x_i}\cos\varphi_i + W_{y_i}\sin\varphi_i\right) - \right.$$

$$\left. - v_0\left(\cos\psi\sum_{i=1}^{3}W_{x_i} + \sin\psi\sum_{i=1}^{3}W_{y_i}\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\bar v_i\left(W_{x_i}\cos\bar\varphi_i + W_{y_i}\sin\bar\varphi_i\right) -$$

$$- \bar v_0\left(\cos\bar\psi\sum_{i=1}^{3}W_{x_i} + \sin\bar\psi\sum_{i=1}^{3}W_{y_i}\right). \quad (20)$$

Тут $\bar\varphi_i, \bar\psi, \bar v_i, \bar v_0$ – значення змінних, для яких досягається мінімакс.

Позначимо

$$\rho_0 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3}W_{x_i}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3}W_{y_i}\right)^2},$$

$$\rho_i = \sqrt{\left(W_{x_i}\right)^2 + \left(W_{y_i}\right)^2}, \quad i=1,2,3. \quad (21)$$

З (20) випливає, що мінімакс досягається за умов

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_3 = w,$$

$$\cos\bar{\psi} = -\sum_{i=1}^{3} W_{x_i} / \rho_0, \ \sin\bar{\psi} = -\sum_{i=1}^{3} W_{y_i} / \rho_0,$$

$$\cos\bar{\varphi}_i = -W_{x_i} / \rho_i, \ \sin\bar{\varphi}_i = -W_{y_i} / \rho_i,$$
$$i = 1,2,3.$$

Отже, для досягнення мінімаксу значення $\dot{W}(t)$ в момент часу t швидкості можна вибрати за формулами

$$V_0 = -\frac{w}{\rho_0}\left(\sum_{i=1}^{3} W_{x_i}, \sum_{i=1}^{3} W_{y_i}\right),$$

$$V_i = -\frac{w}{\rho_i}\left(W_{x_i}, W_{y_i}\right), \quad i = 1,2,3. \qquad (22)$$

Величина $\dot{W}(t)$ в такому випадку обчислюється наступним чином

$$\dot{W}(t) = w\left(\rho_0 - \sum_{i=1}^{3} \rho_i\right). \qquad (23)$$

Легко довести, що в області гладкості функції $W(X)$ справедливі нерівності

$$\rho_i \geq 1/(2w), i = 1,2,3.$$

Отже, у формулах (22) знаменники $\rho_i, i = 1,2,3,$ більші нуля.

В області гладкості функції $W(X)$ компоненти її градієнта мають неперервні часткові похідні за фазовими змінними $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$, а швидкість втікача вважається кусково-неперервною функцією від часу. Із співвідношень (14), (22) випливають рівняння руху

$$\dot{X}_i = -\frac{w}{\rho_i}\left(W_{x_i}, W_{y_i}\right) - V_0, \quad i = 1,2,3. \qquad (24)$$

З теореми про існування та єдиність рішення нормальної системи диференційних рівнянь [13] випливає, що існує єдине непродовжне рішення $X(t)$ системи (24), що задовольняє заданим початковим умовам. Це рішення є неперервною функцією.

Знайдемо швидкості переслідувачів та втікача, для яких досягається мінімакс величини $\dot{W}(t)$, у випадку відсутності неперервних часткових похідних, тобто у випадку, коли виконуються співвідношення $\gamma = \beta < \alpha$, або $\gamma < \beta = \alpha$, або $\gamma = \beta = \alpha$.

Нехай в деякій точці $\bar{X}$ фазового простору виконується співвідношення $\gamma = \beta < \alpha$. Тоді $W = \max\{W_1, W_2\}$, де

$$W_1 = \frac{1}{2w}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\beta} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right),$$

$$W_2 = \frac{1}{2w}\left(\frac{d_1 - l_1}{\sin\gamma} + \frac{d_2 - l_2 + d_3 - l_3}{\sin\alpha}\right).$$

Позначимо M множину точок X фазового простору, що задовольняють рівнянню $W_1(X) = W_2(X)$. Очевидно, $\bar{X} \in M$. В деякій околиці точки $\bar{X}$ множина M являє собою гладку п'ятивимірну поверхню. Нехай G_1 та G_2 – градієнти функцій W_1 та W_2 відповідно, H – вектор одиничної довжини, ортогональний до поверхні M в точці $\bar{X}$. Легко довести, що $G_1 \neq G_2$. Очевидно, $H = z(G_1 - G_2)$, де z – дійсне число. Нехай $H = (G_1 - G_2)/\|G_1 - G_2\|$.

Позначимо

$$V = (V_1, V_2, V_3), \ \bar{V}_0 = (V_0, V_0, V_0).$$

Вважаючи вектор $\bar{V}_0$ постійним, вирішимо дві екстремальні задачі (25) і (26), та з двох оптимальних рішень виберемо краще для переслідувачів, тобто те, для якого значення цільової функції менше.

$$\left\langle V - \bar{V}_0, G_1 \right\rangle \underset{V}{\rightarrow} \min, \quad \left\langle V - \bar{V}_0, H \right\rangle \geq 0,$$

$$\|V_i\| \leq w, \quad i = 1,2,3, \qquad (25)$$

$$\left\langle V - \bar{V}_0, G_2 \right\rangle \underset{V}{\rightarrow} \min, \quad \left\langle V - \bar{V}_0, H \right\rangle \leq 0,$$

$$\|V_i\| \leq w, \quad i = 1,2,3. \qquad (26)$$

Втікач повинен вибрати таку шидкість V_0, щоб після цього вирішення задач (25) та (26) давало якомога гірший результат для переслідування.

Випадки $\gamma < \beta = \alpha$ і $\gamma = \beta = \alpha$ розглядаються аналогічно. Отже, для множини фазових точок, які задовольняють нерівностям

$$\|X_i\| > l_i,\ \ i = 1,2,3,$$

та умові (4), описана стратегія переслідування, що грунтується на функції Ляпунова $W(X)$. Назвемо цю стратегію Φ^0. За досить загальних умов можна довести, що побудована швидкість переслідування $V(t)$ є вимірною функцією. Однак вище стратегія переслідування

$$V(t) = V(t, X(t), V_0(t, X(t))$$

визначена як така, що є кусково-неперервною функцією від часу. Опишемо одну з можливих кусково-неперервних стратегій переслідування.

Якщо переслідувач в кожен момент часу рухається у напрямку втікача з максимальною швидкістю, стратегія переслідування називається погонною.

Нехай $\Delta > 0$ – константа. Скажемо, що в момент часу t' виконується умова H, якщо для кожного числа $\tau \in (t', t' + \Delta)$ справедливе наступне твердження. Якщо на проміжку $[t', t' + \tau)$ застосовуються стратегія Φ^0 та будь-яка стратегія втечі і для всіх $t \in [t', t' + \tau)$ виконуються нерівності $\|X_i(t)\| > l_i, i = 1,2,..., k,$ то на цьому проміжку

- функції $V(t)$ та $\dot{W}(t)$ є неперервними у всіх точках t за винятком, можливо, тих точок, в яких функція $V_0(t)$ має розрив;
- функції $V(t)$ і $\dot{W}(t)$ допускають розриви тільки першого роду;
- за умови існування $\dot{W}(t)$ виконується нерівність $\dot{W}(t) < -1$.

Тут величина $\dot{W}(t')$ означає похідну справа.

Визначимо функцію $\mu(t)$ наступним чином:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо в момент } t \text{ переслідувачами} \\ & \text{встановлена справедливість } H, \\ 1 & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Вважаємо, що рівність $\mu(t) = 0$ тягне за собою справедливість H для моменту t. Очевидно, якщо $X(t)$ належить області гладкості функції $W(X)$, права частина рівності (23) менша за -1 та виконуються нерівності $\|X_i(t)\| > l_i,\ \ i = 1,2,..., k,$ то існує таке $\Delta > 0$, що в момент t виконується умова H; в такому випадку вважаємо, що переслідувачами встановлена справедливість умови H та $\mu(t) = 0$.

Стратегія переслідування Φ^1. Нехай процес починається в момент часу $t = 0$ у фазовій точці $X(0)$. Виберемо $\bar{t} = 0$. Нехай $\Delta, \overline{\Delta}$ – додатні числа, що є параметрами стратегії переслідування. У кожен момент часу t такий, що $\|X_i(t)\| > 0$, $i = 1,2,..., k,$ виконуються наступні дії:

1) Якщо виконуються нерівності $\|X_i(t)\| > l_i,\ \ i = 1,2,..., k,$ переходимо до кроку 2). Переслідувачі, для яких $\|X_i(t)\| \le l_i$, обчислюють свої швидкості $V_i(t)$, використовуючи погонну стратегію, всі інші переслідувачі для обчислення швидкості використовують стратегію паралельного зближення. Переходимо до кроку 7);

2) якщо $t < \bar{t}$, переходимо до кроку 5);

3) Нехай $t = \bar{t}$. Якщо $\mu(t) = 1$, вибираємо $\bar{t} = t + \overline{\Delta}$ та переходимо до кроку 5), інакше переходимо до кроку 6);

4) нехай $t > \bar{t}$. Якщо

$$t = \sup\{\tau \,|\, \bar{t} \le \tau < t,\ \mu(\tau) = 0\} + \frac{\Delta}{2},$$

то вибираємо $\bar{t} = t + \overline{\Delta}$ та переходимо до кроку 5), інакше переходимо до кроку 6);

5) для обчислення швидкостей всіх переслідувачів використовуємо стратегію паралельного зближення. Переходимо до кроку 7);

6) для обчислення швидкостей всіх переслідувачів використовуємо стратегію Φ^0;

7) застосовуємо швидкості переслідування $V_i(t)$.

Під час використання стратегії Φ^1 на проміжку часу такому, що для всіх i

справедливі нерівності $\|X_i(t)\| > l_i$, почергово застосовуються стратегії Φ^0 та стратегія паралельного зближення; момент закінчення роботи останньої позначено $\bar{t}$. Довжина часового проміжку застосування стратегії Φ^0 не менша $\Delta / 2$, а стратегії паралельного зближення – не менша $\overline{\Delta}$ (окрім, можливо, останнього часового проміжку). Швидкість втікача вважається кусково-неперервною. Застосування стратегії Φ^1 гарантує, що функції $V(t)$ та $\dot{W}(t)$ також є кусково-неперервними. Якщо для деякого i виконується умова $\|X_i(t)\| = l_i$, то i-й переслідувач використовує погонну стратегію; це призводить до того, що момент t є часом захоплення цілі за умови, що вектор швидкості втікача є неперервним та відмінним від $-w\dfrac{X_i(t)}{\|X_i(t)\|}$.

Нехай використовується стратегія Φ^1, а процес починається в момент $t = 0$ з фазової точки $\overline{X}(0)$, в якій функція $W(X)$ є гладкою. Із співвідношення (23) випливає, що для досить малого числа $\Delta > 0$ справедливе наступне. Якщо в нульовий момент часу виконується нерівність $\dot{W}(0) < -1$ (беремо похідну справа), то нерівність $\dot{W}(t) < -1$ залишається справедливою на протязі деякого часового проміжку $(0, t_1)$, де $t_1 > 0$. Оскільки в інші моменти часу виконується нерівність $\dot{W}(t) \le -1$ (за винятком скінченого числа моментів, у яких похідна $\dot{W}(t)$ не існує), максимальний час переслідування буде меншим, ніж за умови використання стратегії паралельного зближення.

Якщо процес починається з фазової точки $\overline{X}(0)$, в якій функція $W(X)$ є гладкою, та виконується нерівність $\dot{W}(0) < -1$ (мається на увазі похідна справа), то нерівність $\dot{W}(0) < -1$ виконується також для процесів, початкова фазова точка яких належить деякому шару з центром в $\overline{X}(0)$. Для всіх таких процесів стратегія Φ^1 забезпечує менший максимальний час переслідування, ніж стратегія паралельного зближення. Як показують приклади, початкові фазові точки, що задовольняють вказаним умовам, існують. Оскільки для будь-якої максимальної швидкості w та для будь-якого набору чисел l_i кожен процес визначається своєю початковою фазовою точкою, можна сказати, що стратегія Φ^1 забезпечує менший максимальний час переслідування у порівнянні зі стратегією паралельного зближення для множини процесів, міра Лебега яких додатня. Водночас доведена в наступному розділі теорема 4 стверджує, що для всіх процесів стратегія Φ^1 не гірша за стратегію паралельного зближення.

Розглянемо приклади задач переслідування. Нехай $w = 1$, в момент часу $t = 0$ переслідувачі P_1, P_2, P_3 розташовані в точках $(300, 200)$, $(-300, 300)$, $(0, -400)$ відповідно, а втікач знаходиться на початку координат. У початковій фазовій точці функція Ляпунова (16) є гладкою, її градієнт задається наведеними вище формулами. Обчислення показують, що в даній точці за умов $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ справедливе співвідношення $\dot{W}(0) = -1.237$ (тут $\dot{W}(0)$ – похідна справа функції $W(t)$ для $t = 0$), у випадку $l_1 = l_2 = l_3 = 30$ виконується рівність $\dot{W}(0) = -1.229$, а у випадку $l_1 = l_2 = l_3 = 300$ справедлива рівність $\dot{W}(0) = -1.469$. Ясно, що існує проміжок часу $(0, t_1)$ такий, для якого $\dot{W}(t) < -1$ та $t_1 > 0$. Тому максимальний час переслідування для побудованої стратегії Φ_1 за умови, що число $\Delta > 0$ досить мале, менший, ніж для стратегії паралельного зближення.

В таблиці наведено приклади значень величини $\dot{W}(0)$ для декількох початкових фазових точок, у кожній з яких функція $W(X)$ гладка. Вважаємо, що $l_1 = l_2 = l_3 = 0$. Для кожної початкової фазової точки $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ з цієї таблиці величина $\dot{W}(0)$ менша за -1, тому для кожного процесу, що починається з такої точки, побудована стратегія перевершує стратегію паралельного зближення.

Таблиця. Приклади значень величини $\dot{W}(0)$

x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	$\dot{W}(0)$
-2	3	-3	-1	3	-1	-1.87
-1	2	-3	-1	3	-1	-1.59
-1	3	-3	-2	3	-1	-1.25
-1	3	-3	-1	3	-1	-1.32
-1	3	-2	-1	3	-1	-1.24
0	1	-3	-1	2	-1	-1.18
0	1	-3	-1	3	-2	-1.22
0	2	-3	-1	2	-1	-1.18
0	2	-3	-1	3	-2	-1.21
0	3	-3	-1	2	-1	-1.17
0	3	-3	-1	3	-2	-1.20

Функції Ляпунова для задач переслідування в багатовимірному евклідовому просторі

Нехай у n-вимірному евклідовому просторі k переслідувачів доганяють одного втікача. Вважаємо, що в початковий момент виконується умова (4) та максимальні швидкості всіх агентів рівні,

$$w_0 = w_1 = ... = w_k = w.$$

Нехай W – оптимальне значення цільової функції задачі лінійного програмування (8) – (10). Величина W дорівнює максимальному часу переслідування для стратегії паралельного зближення. Ясно, що W є функцією від параметрів задачі лінійного програмування (8) – (10), які в свою чергу є функціями від координат фазової точки X, тому W є функцією від X, тобто $W = W(X)$. Виберемо функцію $W(X)$ як функцію Ляпунова для того, щоб побудувати нову стратегію переслідування, що перевершує стратегію паралельного зближення.

Нехай A – матриця розміру $r \times s$; b, y – вектори розмірності r; c, x – вектори розмірності s. Вважаємо, що ранг матриці A дорівнює r та виконуються умови $s > r$, $b \neq (0,0,...,0)$. Якщо вектор приймає участь в операціях з матрицями, він вважається матрицею-стовпцем, вираз A^T означає транспоновану матрицю.

Опорне рішення задачі лінійного програмування, яка зведена до канонічного виду, називається невиродженим, якщо воно має рівно r додатніх компонент [14] (вважаємо, що матриця обмежень A розміру $r \times s$ задовольняє наведеним вище умовам). Справедлива наступна теорема, що за змістом є близькою до теореми 3.9 роботи [15].

Теорема 3. Нехай для $A = A_0$, $b = b_0$, $c = c_0$ опорні оптимальні рішення x^*, y^* відповідно прямої

$$\max_x \left\{ \langle c, x \rangle \middle| Ax = b,\, x \geq 0 \right\} = W(A, b, c)$$

та двоїстої

$$\min_y \left\{ \langle b, y \rangle \middle| A^T y \geq c \right\} = W(A, b, c)$$

задач лінійного програмування невироджені. Тоді оптимальні рішення x^*, y^* єдині та виконуються співвідношення

$$\frac{\partial W}{\partial c_j}(A_0, b_0, c_0) = x_j^*, \quad j = 1,..., s,$$

$$\frac{\partial W}{\partial b_i}(A_0, b_0, c_0) = y_i^*, \quad i = 1,..., r,$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_{ij}}(A_0, b_0, c_0) = -x_j^* y_i^*, \;\; i = 1,..., r, \;\; j = 1,..., s.$$

Розглянемо досить малу околицю точки (A_0, b_0, c_0). З невиродженості рішень $x^* = x^*(A_0, b_0, c_0), y^* = y^*(A_0, b_0, c_0)$ випливає, що в цій околиці множина номерів базисних координат оптимальних рішень не змінюється. З теореми 3 робимо висновок, що справедливі формули

$$\frac{\partial W}{\partial c_j}(A, b, c) = x_j^*(A, b, c),$$

$$\frac{\partial W}{\partial b_i}(A, b, c) = y_i^*(A, b, c),$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_{ij}}(A, b, c) = -x_j^*(A, b, c) y_i^*(A, b, c),$$

$$i = 1,..., r, \;\; j = 1,..., s.$$

Тут вектори $x^*(A, b, c), y^*(A, b, c)$ є опорними оптимальними рішеннями прямої та двоїстої задач для точки (A, b, c) та обчислюються за формулами

$$x^*(A, b, c) = B^{-1} b, \quad y^*(A, b, c) = \left(B^T\right)^{-1} \bar{c},$$

де B – оптимальна базисна матриця, $\bar{c}$ – вектор розмірності r, що містить базисні компоненти вектора c. Оскільки матриця B невироджена, то елементи матриці B^{-1} є неперервними функціями від B, а вектори $x^*(A, b, c), y^*(A, b, c)$ є неперервними функціями від (A, b, c). Тому в достатньо малій околиці точки (A_0, b_0, c_0) часткові похідні $\frac{\partial W}{\partial c_j}, \frac{\partial W}{\partial b_i}, \frac{\partial W}{\partial a_{ij}}$ є неперервними функціями від (A, b, c).

Таким чином, використовуючи теорему 3, можна обчислити часткові похідні функції W за елементами матриці A та векторів b, c. Для задачі (8) – (10) згадані елементи простими формулами пов'язані з точками фазового простору. Оскільки часткові похідні є неперервними функціями від (A, b, c), то, використовуючи правило диференціювання складної функції [16], можна обчислити градієнт функції $W(X)$ в області її гладкості.

Задачу (8) – (10) запишемо в наступному вигляді:

$$\sum_{I \in \{I\}} \sum_{s=1}^{2} t_{Is} \to \max, \tag{27}$$

$$\sum_{I \in \{I\}} \sum_{s=1}^{2} u_{iIs} t_{Is} + z_i = b_i, \quad i = 1,2,..., k, \tag{28}$$

$$t_{Is} \ge 0, \;\; z_i \ge 0, \;\; I \in \{I\},$$

$$s = 1,2, \;\; i = 1,2,..., k. \tag{29}$$

Тут $b_i = d_i(0) - l_i$, величини u_{iIs} обчислюються за формулами

$$u_{iIs} = \begin{cases} 0, & \langle N_i, N_{Is} \rangle < 0, \\ 2w\langle N_i, N_{Is} \rangle, & \langle N_i, N_{Is} \rangle \ge 0, \end{cases}$$

$$i = 1,2,..., k, \;\; I \in \{I\}, \;\; s = 1,2. \tag{30}$$

Нехай t_{Is}^* – оптимальні значення змінних t_{Is} задачі (27) – (29), y_i^* – оптимальні значення двоїстих змінних, $X_i = (x_{i1}, x_{i2},..., x_{in})$, $i = 1,2,..., k$. Застосовуючи теорему 3 до задачі (27) – (29), отримуємо

$$\frac{\partial W(X)}{\partial x_{\alpha\beta}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{I \in \{I\}} \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial W}{\partial u_{iIs}} \frac{\partial u_{iIs}}{\partial x_{\alpha\beta}} + \frac{\partial W}{\partial b_i} \frac{\partial b_i}{\partial x_{\alpha\beta}} \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \sum_{I \in \{I\}} \sum_{s=1}^{2} t_{Is}^* y_i^* \frac{\partial u_{iIs}}{\partial x_{\alpha\beta}} + y_\alpha^* \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_{\alpha\beta}},$$

$$\alpha = 1,2,..., k, \quad \beta = 1,2,..., n. \tag{31}$$

Маємо

$$\frac{\partial b_\alpha}{\partial x_{\alpha\beta}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}} \sqrt{x_{\alpha 1}^2 + x_{\alpha 2}^2 + ... + x_{\alpha n}^2} = \frac{x_{\alpha\beta}}{\|X_\alpha\|}. \tag{32}$$

Обчислимо $\dfrac{\partial u_{iIs}}{\partial x_{\alpha\beta}}$. Нагадаємо, що $I=\{i_1,i_2,...,i_{n-1}\}$ – підмножина множини $\{1,2,...,k\}$ така, що система векторів $H=\{N_{i_1},N_{i_2},...,N_{i_{n-1}}\}$ лінійно незалежна, $\{I\}$ – множина всіх таких підмножин, N_{I1},N_{I2} – вектори одиничної довжини, ортогональні кожному вектору із системи H, причому $N_{I1}=-N_{I2}$. Ясно, що за умов $i\in I$ або $\langle N_i,N_{Is}\rangle<0$, або $i\notin I,\alpha\notin I,i\neq\alpha$ виконується рівність

$$\frac{\partial u_{iIs}}{\partial x_{\alpha\beta}}=0. \tag{33}$$

Оскільки $N_i=X_i/\|X_i\|$, то за умов $i\notin I$, $i=\alpha,\langle N_i,N_{Is}\rangle>0$ справедливі співвідношення

$$\frac{\partial u_{iIs}}{\partial x_{\alpha\beta}}=2w\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\langle N_i,N_{Is}\rangle=$$

$$=2w\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\langle X_\alpha/\|X_\alpha\|,N_{Is}\rangle=$$

$$=2w\frac{\partial}{\partial x_{\alpha\beta}}\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{\alpha j}n_{Isj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}x_{\alpha j}^2}}=$$

$$=2w\frac{n_{Is\beta}\|X_\alpha\|^2-\langle X_\alpha,N_{Is}\rangle x_{\alpha\beta}}{\|X_\alpha\|^3}, \tag{34}$$

де n_{Isj} – j-та компонента вектора N_{Is}, $N_{Is}=(n_{Is1},...,n_{Isn})$. У випадку $i\notin I,\alpha\in I$, $\langle N_i,N_{Is}\rangle>0$ маємо

$$\frac{\partial u_{iIs}}{\partial x_{\alpha\beta}}=2w\sum_{j=1}^{n}n_{ij}\frac{\partial n_{Isj}}{\partial x_{\alpha\beta}}, \tag{35}$$

де n_{ij} – j-та компонента вектора N_i, $N_i=(n_{i1},...,n_{in})$.

Часткові похідні $\dfrac{\partial n_{Isj}}{\partial x_{\alpha\beta}}$ з формули (35) легко обчислити. Використовуючи формули (31) – (35), можна розрахувати градієнт $G=\left(W_{x_{11}},W_{x_{12}},...,W_{x_{kn}}\right)$ функції $W(x_{11},x_{12},...,x_{kn})$ в точках її гладкості.

В області гладкості функції $W(X)$ знайдемо швидкості агентів, для яких досягається мінімакс величини $\dot W(t)$. Представимо швидкості V_i у вигляді

$$V_i=v_i(v_{i1},v_{i2},...,v_{in}),$$

де

$$v_i=\|V_i\|,\quad v_{i1}^2+v_{i2}^2+...+v_{in}^2=1,\quad i=0,1,...,k.$$

Рівняння руху набувають вигляду

$$\dot x_{ij}=v_iv_{ij}-v_0v_{0j},\quad i=1,2,...,k,\quad j=1,2,...,n.$$

Позначимо $V=(V_1,V_2,...,V_k)$. Маємо

$$\min_V\max_{V_0}\dot W(t)=\min_V\max_{V_0}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}W_{x_{ij}}\dot x_{ij}=$$

$$=\min_V\max_{V_0}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}W_{x_{ij}}(v_iv_{ij}-v_0v_{0j})=$$

$$=\min_V\max_{V_0}\left(\sum_{i=1}^{k}v_i\sum_{j=1}^{n}W_{x_{ij}}v_{ij}-v_0\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}W_{x_{ij}}v_{0j}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\bar v_i\sum_{j=1}^{n}W_{x_{ij}}\bar v_{ij}-\bar v_0\sum_{j=1}^{n}\bar v_{0j}\sum_{i=1}^{k}W_{x_{ij}}. \tag{36}$$

Тут $\bar v_i,\bar v_{ij},\bar v_0,\bar v_{0j}$ – значення змінних, для яких досягається мінімакс.

Позначимо

$$\rho_0=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}W_{x_{ij}}\right)^2},$$

$$\rho_i=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}W_{x_{ij}}^2},\quad i=1,2,...,k.$$

З формули (36) випливає, що мінімакс досягається за умов

$$\bar v_0=\bar v_1=...=\bar v_k=w,$$

$$\bar v_{0j}=-\sum_{i=1}^{k}W_{x_{ij}}/\rho_0,\ \ \bar v_{ij}=-W_{x_{ij}}/\rho_i,$$

$$i=1,2,...,k,\quad j=1,2,...,n.$$

Отже, для досягнення мінімаксу величини $\dot{W}(t)$ в момент часу t швидкості можна вибрати за формулами

$$V_0 = -\frac{w}{\rho_0}\left(\sum_{i=1}^{k} W_{x_{i1}},...,\sum_{i=1}^{k} W_{x_{in}}\right),$$

$$V_i = -\frac{w}{\rho_i}\left(W_{x_{i1}},...,W_{x_{in}}\right), \quad i=1,2,...,k. \quad (37)$$

Якщо $\rho_i = 0, i \in \{0,1,...,k\}$, швидкість V_i можна вибрати будь-якою з множини $\|V_i\| \le w_i$. Значення $\dot{W}(t)$ обчислюється наступним чином

$$\dot{W}(t) = w\left(\rho_0 - \sum_{i=1}^{k}\rho_i\right). \quad (38)$$

Як показують числові приклади, наведені в таблиці, величина $\dot{W}(t)$ у багатьох випадках є меншою, ніж -1. Внаслідок цього максимальний час переслідування виявляється меншим, ніж для стратегії паралельного зближення.

Нехай

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Позначимо Ω відкриту область фазового простору, в якій виконуються наступні умови:

- $X_0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1, X_2,..., X_k\}$, $\|X_i\| > l_i, \quad i=1,2,...,k;$
- в задачі (27) – (29) існують невироджені опорні оптимальні рішення прямої та двоїстої задач;
- величини $\operatorname{sign}(\langle N_i, N_{Is}\rangle)$ та $\operatorname{sign}(\rho_i)$ не змінюються, $I \in \{I\}$, $s=1,2$, $i=1,2,...,k$.

В області Ω функція $W(X)$ – гладка.

Побудуємо стратегію переслідування. Припустимо, фазова точка X в деякий момент часу t знаходиться в області Ω. Позначимо

$$I_0 = \{i : i \in \{1,2,...,k\}, \rho_i = 0\},$$

$$I_1 = \{i : i \in \{1,2,...,k\}, \rho_i > 0\}.$$

Нехай i-й переслідувач за умови $i \in I_0$ використовує стратегію паралельного зближення, а якщо $i \in I_1$, то його швидкість розраховується за відповідною формулою (37).

Із співвідношень (14), (37) випливають рівняння руху

$$\dot{X}_i = V_i - V_0, \quad i \in I_0, \quad (39)$$

$$\dot{X}_i = -\frac{w}{\rho_i}\left(W_{x_{i1}},...,W_{x_{in}}\right) - V_0, \quad i \in I_1. \quad (40)$$

Неважко перевірити, що компоненти градієнта $G = \left(W_{x_{11}}, W_{x_{12}},..., W_{x_{kn}}\right)$ в області Ω мають неперервні часткові похідні за фазовими змінними. Швидкість втікача V_0 вважається кусково-неперервною функцією від часу. Оскільки для $i \in I_0$ переслідувачі застосовують стратегію паралельного зближення, то функції V_i, $i \in I_0$, є кусково-неперервними функціями від часу. З теореми про існування та єдиність рішення нормальної системи диференційних рівнянь [13] випливає, що існує єдине непродовжне рішення $X(t)$ системи (39) – (40), що задовольняє заданим початковим умовам. Це рішення є неперервною функцією.

Якщо в деякий момент часу t фазова точка не належить області Ω, необхідно вирішити екстремальну задачу, в якій швидкість втікача в момент t вважається відомою, а швидкості переслідувачів V_i вибираються таким чином, щоб величина W зменшувалась якомога швидше за умов $\|V_i\| \le w$, $i=1,2,...,k$. Нехай, наприклад, всі опорні оптимальні рішення задачі (27) – (29) невироджені, $\{B_1, B_2,..., B_q\}$ – множина оптимальних базисних матриць, кожна з яких відповідає невиродженому опорному оптимальному рішенню. Необхідно вирішити наступну екстремальну задачу:

$$\max_{r=1,...,q} \left\langle G_r, V - \bar{V}_0 \right\rangle \underset{V}{\rightarrow} \min, \; \|V_i\| \le w, \; i=1,2,...,k.$$

Тут $V=(V_1,V_2,...,V_k)$, $\bar{V_0}=(V_0,V_0,...,V_0)$, G_r − градієнт функції $W_r(X)=\sum_{j=1}^{k}(B_r^{-1}b)_j$, b – вектор обмежень задачі (27) − (29), вектор b та матриці B_r – функції від фазової точки X. Якщо існують вироджені опорні оптимальні рішення задачі (27) − (29), екстремальна задача має подібний вигляд. Детально розглядати ці задачі не станемо; вважаємо, що переслідувачі можуть вирішувати їх з достатньою точністю. Описану стратегію переслідування позначимо Φ^0.

У загальному випадку, який тут розглядається, для забезпечення кускової неперервності швидкостей можна застосувати стратегію Φ^1, що описана в попередньому розділі та використовується там же для вирішення більш простої задачі; в такому разі необхідно врахувати, що кількість переслідувачів дорівнює k. Стратегія Φ^1 використовує стратегію Φ^0 як допоміжну. Зауваження, зроблені в попередньому розділі щодо стратегії Φ^1, залишаються справедливими і тут. Зокрема, залишається справедливим висновок про те, що стратегія Φ^1 забезпечує менший максимальний час переслідування у порівнянні зі стратегією паралельного зближення для множини процесів, міра Лебега яких додатня. Водночас, як стверджує теорема 4, для всіх процесів стратегія Φ^1 не гірша за стратегію паралельного зближення.

Доведемо теорему про максимальний час переслідування для стратегії Φ^1. Позначимо G множину фазових точок

$$X=(X_1,X_2,...,X_k),$$

які задовольняють умовам

$$\|X_i\|>l_i, \quad i=1,2,...,k,$$

$$X_0\in \operatorname{int}\operatorname{conv}\{X_1,X_2,...,X_k\}.$$

Лема 1. Функція $W(X)$ неперервна на множині G.

Доведення леми наводити не будемо. Нехай процес починається у фазовій точці X, $T(X,\Phi^1)$ – максимальний час переслідування для стратегії Φ^1.

Теорема 4. Справедлива нерівність $T(X,\Phi^1)\le W(X)$.

Доведення. Припустимо, застосовується стратегія Φ^1. Позначимо t_1 момент часу такий, що для $t<t_1$ виконуються нерівності $\|X_i(t)\|>l_i$, $i=1,2,..k$, та існує як мінімум одна точка $X_i(t_1)$, для якої справедлива рівність $\|X_i(t_1)\|=l_i$.

Нехай в момент t_1 існує не менше двох точок $X_i(t_1)$, які не лежать на одному промені, що виходить з початку координат, та для яких справедливі рівності $\|X_i(t_1)\|=l_i$. Оскільки починаючи з моменту t_1 переслідувачі, для яких справедливі рівності $\|X_i(t_1)\|=l_i$, застосовують погонну стратегію, то легко довести, що t_1 є часом захоплення цілі.

Нехай в момент часу t_1 існує тільки одна точка $X_i(t_1)$, для якої справедлива рівність $\|X_i(t_1)\|=l_i$ (якщо існують декілька точок $X_i(t_1)$, для яких $\|X_i(t_1)\|=l_i$, та які лежать на одному промені, що виходить з початку координат, ситуація аналізується аналогічно). Оскільки починаючи з моменту t_1 переслідувач, для якого $\|X_i(t_1)\|=l_i$, застосовує погонну стратегію, то оптимальною стратегією втікача є рух з максимальною швидкістю у напрямку, протилежному від переслідувача P_i. В такому випадку, згідно стратегії Φ^1, всі переслідувачі, за винятком P_i, застосовують стратегію паралельного зближення. Швидкість переслідувача P_i, який застосовує погонну стратегію, дорівнює швидкості, що відповідає стратегії паралельного зближення. Якщо в момент $t\ge t_1$ неперервності функції $V_0(t)$ швидкість $V_0(t)$ не є максимальною або не направлена у напрямку, протилежному від переслідувача P_i, то t – час захоплення цілі.

Оскільки функції $V_i(t), i = 0,1,..., k$ – кусково-неперервні, з теореми 1 випливає, що система диференційних рівнянь (14) має єдине рішення $X(t)$, яке задовольняє заданим початковим умовам. Це рішення є неперервною функцією від часу. Нехай t' – момент часу такий, що $0 \le t' < t_1$. Згідно з лемою 1 функція $W(t) = W(X(t))$ неперервна на проміжку $[0, t']$ як суперпозиція неперервних функцій.

З опису стратегії Φ^1 випливає, що існує скінчена множина моментів часу $\tau_0, \tau_1, ..., \tau_i$ така, що $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_i < t'$, а на інтервалах

$$(\tau_0, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), ..., (\tau_{i-1}, \tau_i), (\tau_i, t')$$

почергово застосовуються стратегії паралельного зближення та Φ^0, причому на кожному з інтервалів використовується тільки одна з них.

Якщо на інтервалі (τ_i, t') застосовується стратегія паралельного зближення, то з визначення функції W випливають співвідношення

$$W(t') - W(\tau_i) = W(X(t')) - W(X(\tau_i)) \le$$
$$\le \tau_i - t'. \qquad (41)$$

Якщо на інтервалі (τ_i, t') застосовується стратегія Φ^0, то співвідношення (41) випливають з того, що функція $W(t)$ неперервна на відрізку $[0, t']$, на інтервалі (τ_i, t') похідна $\dot{W}(t)$ має розриви тільки першого роду не більш як у скінченому числі точок, а в точках неперервності похідної виконується нерівність $\dot{W}(t) < -1$. З тих же причин справедливі нерівності

$$W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}) \le \tau_{j-1} - \tau_j, \quad j = 1,2,..., i.$$

Маємо

$$W(t') - W(\tau_0) = \sum_{j=1}^{i} \left(W(\tau_j) - W(\tau_{j-1}) \right) +$$
$$+ W(t') - W(\tau_i) \le \sum_{j=1}^{i} \left(\tau_{j-1} - \tau_j \right) + \tau_i - t' = -t',$$

звідки випливає нерівність

$$t' + W(t') \le W(0). \qquad (42)$$

Нехай i – такий номер, що $\|X_i(t_1)\| = l_i$. Позначимо T' час захоплення цілі за умови, що, починаючи з момента t', швидкість V_0 – постійна та обчислюється за формулою

$$V_0 = -w \frac{X_i(t')}{\|X_i(t')\|},$$

а переслідувачі застосовують стратегію паралельного зближення. Очевидно, справедлива нерівність $T' \le t' + W(t')$, тому з (42) випливає

$$T' \le W(0). \qquad (43)$$

Починаючи з моменту часу t_1, оптимальна швидкість V_0 є постійною та обчислюється за формулою

$$V_0 = -w \frac{X_i(t_1)}{\|X_i(t_1)\|}, \qquad (44)$$

а швидкості переслідувачів відповідають стратегії паралельного зближення. Тому $T - t_1 = T' - t' + \sigma(t', t_1)$, де T – час захоплення цілі для стратегії Φ^1 за умови (44), а величина $\sigma(t', t_1)$ задовольняє умові $\lim_{\delta \to 0} \sigma(t', t_1) = 0$, де $\delta = t_1 - t'$. Оскільки

$$T' = T - t_1 + t' - \sigma(t', t_1),$$

то з (43) випливає

$$T + \sigma_1(t', t_1) \le W(0), \qquad (45)$$

де $\sigma_1(t', t_1) = -t_1 + t' - \sigma(t', t_1)$. Справедливе співвідношення

$$\lim_{\delta \to 0} \sigma_1(t', t_1) = 0,$$

тому з (45) випливає нерівність $T \le W(0)$.

Теорему доведено.

Теорема 4 доводить те, що максимальний час переслідування для стратегії Φ^1 не більший, ніж для стратегії паралельного зближення.

В даній роботі функція Ляпунова використана у випадку рівності швидкостей агентів. Якщо швидкості переслідувачів перевищують швидкість втікача, функцію Ляпунова можна побудувати, використовуючи задачу лінійного програмування (5) − (7). В такому разі слід враховувати, що оптимальне значення її цільової функції лише приблизно дорівнює максимальному часу переслідування для стратегії паралельного зближення. Для побудови функції Ляпунова можна також використати відповідну задачу нелінійного програмування.

Висновки

В статті розглянуто задачу переслідування одного втікача кількома переслідувачами. Побудовано стратегії переслідування з використанням функції Ляпунова. Для будь-якого конфліктно керованого процесу виконується нерівність $T \leq W$, водночас для багатьох процесів справедливе співвідношення $T < W$, де W та T – максимальний час переслідування для стратегії паралельного зближення та побудованої стратегії відповідно.

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями. Ташкент: ФАН, 1989. 232 с.
3. Пашко С.В. Эффективные стратегии преследования, основанные на использовании функции Ляпунова. Доповіді НАН України. 2016. № 1. С. 26–33.
4. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка, 1992. 264 с.
5. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
6. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями. ДАН СССР. 1981. 256.3. С. 530–535.
7. Ибрагимов Г.И., Рихсиев Б.Б. О некоторых достаточных условиях оптимальности времени преследования в дифференциальной игре со многими преследующими. *Автоматика и телемеханика.* 2006. № 4. С. 16–24.
8. Иванов Р.П., Ледяев Ю.С. Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простыми движениями. Труды МИАН СССР. 1981. 158. С. 87–97.
9. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.
10. *Колмогоров* А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
11. Пашко С.В., Яловец А.Л. Максимальное время преследования для стратегии параллельного сближения. *Проблеми програмування.* 2014. № 4. С. 78–93.
12. Пашко С.В. Гарантированное время преследования для стратегии параллельного сближения в случае равенства скоростей игроков. *Компьютерная математика*. 2014. № 1. С. 140–149.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.
14. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. Киев: Вища школа, 1975. 371 с.
15. Первозванский А.А. Математические моде-ли в управлении производством. М.: Наука, 1975. 615 с.
16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969. Т. 1. 607 с.

References

1. Isaacs R. (1999). Differential Games. New York: Dover Publications.
2. Rikhsiev B.B. (1989). Simple Motion Differential Games. Tashkent: FAN. (In Russian).
3. Pashko S.V. (2016). Effective Strategies of Pursuit, Based on Lyapunov Function. Dopov. NAN Ukraine. N 1. P. 26 – 33. (In Russian).
4. Pshenichnyi B.N., Ostapenko V.V. (1992). Differential Games. Kyiv: Nauk. Dumka. (In Russian).

5. Chikrii A.A. (1992). Conflict-Controlled Processes. Kyiv: Nauk. Dumka. (In Russian).
6. Pshenichnyi B.N., Chikrii A.A., Rappoport I.S. (1981). Dokl. AN SSSR. 256. 3. P. 530–535. (In Russian).
7. Ibragimov G.I., Rikhsiev B.B. (2006). On some Sufficient Conditions for Optimality of the Pursuit Time in the Differential Game with Multiple Pursuers. Automation and Remote Control. Volume 67, Issue 4. P. 529–537. (In Russian).
8. Ivanov R.P., Lediaev Yu.S. (1981). Time Optimality for the Pursuit of Several Objects with Simple Motion in a Differential Game. Trudy Mat. Inst. Steklov.158. P. 87–97. (In Russian).
9. Kuntsevich V.M., Lychak M.M. (1977). Synthesis of Systems of Automatic Control with the Use of Lyapunov Functions. Moscow: Nauka. (In Russian).
10. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. (1972). Introductory Real Analysis. Moscow: Nauka. (In Russian).
11. Pashko S.V., Yalovets A.L. (2014). Maximal Time of Pursuit for the Strategy of Parallel Approach. Problems in Programming. N 4. P. 78–93. (In Russian).
12. Pashko S.V. (2014). Maximal time of pursuit for the strategy of parallel approach in case of equal speeds. Computer Mathematics. Kyiv: Institute of Cybernetics of the NAS of Ukraine. N 1. P. 140–149. (in Russian).
13. Pontryagin L.S. (1965). Ordinary Differential Equations. Moscow: Nauka. (In Russian).
14. Lyashenko I.N., Karagodova E.A., Chernikova N.V., Shor N.Z. (1975). Linear and Nonlinear Programming. Kyiv: Vishcha Shkola. (In Russian).
15. Pervozvansky A.A. (1975). Mathematical Models in Production Management. Moscow: Nauka. (In Russian).
16. Fikhtengolts G.M. (1969). Course of Differential and Integral Calculus. Volume 1. Moscow: Nauka. (In Russian).

Одержано 06.06.2017.

Про автора:

Пашко Сергій Володимирович,
кандидат фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник.
Кількість наукових публікацій в українських виданнях – понад 30.
Кількість наукових публікацій в зарубіжних виданнях – 2.
Індекс Хірша в SCOPUS – 3.
http://orcid.org/0000-0002-0453-4128.

Місце роботи автора:

Інститут програмних систем
НАН України,
03187, Київ-187,
проспект Академіка Глушкова, 40.

Тел.: (044) 526 6025.
E-mail: pashko55@yahoo.com